JEAN-PIERRE KAHANE

Travaux de Beurling et Malliavin

Séminaire N. Bourbaki, 1961-1962, exp. nº 225, p. 27-39
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__27_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, nº 225

Décembre 1961

TRAVAUX DE BEURLING ET MALLIAVIN

par Jean-Pierre KAHANE

1. - Les articles [1] et [2], à paraître, répondent aux questions suivantes :

1° Caractériser les fonctions entières qui sont quotients de fonctions entières de type exponentiel bornées sur la droite réelle.

2° Calculer le rayon de totalité $R(\Lambda)$ d'une suite réelle Λ , c'est-à-dire la borne supérieure des r tels que les exponentielles $\{e^{i\lambda x}\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ forment un système total dans $L^2(-r , r)$.

Outre [1] et [2] (manuscrits multiformes), on peut consulter [4] et [5].

2. - La réponse au problème 1 est très simple. Désignons par E_a l'ensemble des fonctions entières f bornées sur la droite réelle et telles que

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log |f(z)|}{|z|} < a \qquad ,$$

et par E la réunion des E_a $(a > 0)$. Posons

$$J(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(x)|}{1 + x^2} dx$$

chaque fois que le second membre a un sens comme intégrale de Lebesgue.

THÉORÈME I. - <u>Soit</u> g <u>une fonction entière.</u>

a. <u>S'il existe une</u> $f \in E$ <u>telle que</u> $fg \in E$, g <u>est de type exponentiel et</u> $J(\log^+|g|) < \infty$.

b. <u>Si</u> g <u>est de type exponentiel et que</u> $J(\log^+|g|) < \infty$, <u>toute</u> E_a $(a > 0)$ <u>contient une</u> f <u>telle que</u> $fg \in E$.

La partie (a) est immédiate, à partir des résultats classiques :

α. Toute fonction entière quotient de deux fonctions entières de type exponentiel est de type exponentiel.

β. $f \in E$, $f \neq 0 \Longrightarrow J(|\log |f||) < \infty$.

La partie (b), par contre, est difficile ; nous en esquisserons la démonstration plus loin.

<u>Remarque</u>. – D'après PALEY-WIENER, on sait que les éléments de E_a sont transfouriés de distributions à support dans $]-a, a[$. On peut d'ailleurs, sans modifier l'énoncé du théorème I, remplacer E et E_a par les ensembles de fonctions transfouriés de distributions à support compact (resp. à support dans $]-a, a[$).

Voici une application du théorème I aux équations de convolution (indiquée par MALGRANGE). Soit I un intervalle ouvert, soit μ une distribution à support dans I, et soit $F = F(\mu, I)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{E}(I)$ satisfaisant $f \star \mu = 0$ sur l'intervalle où le premier membre a un sens.

THÉORÈME II. – F <u>est le sous-espace fermé de</u> $\mathcal{E}(I)$ <u>engendré par les exponentielles-polynômes</u> $P(x)\, e^{i\lambda x}$ <u>qu'il contient</u>.

<u>Démonstration</u>. – Il s'agit de montrer que toute distribution $\tilde{v}$ à support dans I et orthogonale aux $P(x)\, e^{i\lambda x} \in F$ est orthogonale à F. L'hypothèse sur v signifie que sa transfouriée $\hat{v}$ est le produit de $\hat{\mu}$ par une fonction entière g. D'après le théorème I, (a), g est de type exponentiel et $J(\log^+|g|) < \infty$; d'après (b) et la remarque, il existe, pour tout $a > 0$, une distribution χ à support dans $]-a, a[$ telle que $\hat{\chi} g \in E$, soit $\hat{\chi} g = \hat{\lambda}$, λ étant (si a est assez petit) une distribution à support dans I. Comme $\hat{v}\hat{\chi} = \hat{\lambda}\hat{\mu}$, on a

$$v \star \chi = \lambda \star \mu \quad .$$

Choisissons a de façon que $f \star v$ soit définie sur $]-2a, 2a[$. On a alors $(f \star v) \star \chi$ sur $]-a, a[$. Par le procédé de Schwartz (remplacer $\hat{\chi}$ par sa dérivée, et itérer), on a aussi $(f \star v) \star x^n \chi = 0$ pour tout entier n, donc $f \star v = 0$ sur $]-a, a[$, d'où la conclusion.

3. – Le rayon de totalité $R(\Lambda)$ est, d'après PALEY-WIENER, la borne inférieure des a tels que E_a contienne une $f \neq 0$ s'annulant sur Λ. Il est clair que $R(\Lambda)$ est proportionnel à une certaine "densité" de Λ. Pour simplifier les écritures, supposons $0 \notin \Lambda$.

Soit n_Λ la fonction de distribution de Λ, c'est-à-dire la primitive, nulle en 0, de la mesure $\sum_{\lambda\in\Lambda} \delta_\lambda$. BEURLING et MALLIAVIN appellent "densité effective" de Λ, et notent $D_e(\Lambda)$ (nous noterons aussi $D_{eff}(\Lambda)$) la borne inférieure des a, tels que

$$J(n_{a,\Lambda} - n_\Lambda) < \infty \tag{1}$$

$n_{a,\Lambda}$ étant la fonction dont la restriction à $t > 0$ (resp. $t < 0$) est la plus petite (resp. la plus grande) des fonctions croissantes de pente $\leq a$ majorant (resp. minorant) n_Λ.

THÉORÈME III. - $R(\Lambda) = \pi D_e(\Lambda)$.

<u>Démonstration</u>. - Propositions A, B, C ci-dessous.

Pour comparer ce résultat aux estimations de $R(\Lambda)$ jusqu'alors connues, et en donner une application simple (théorème 4), quelques remarques sur les "densités" des suites sont opportunes.

Au sens strict, une densité D est une fonction positive, définie sur un ensemble M de suites ("suites mesurables"), avec les propriétés suivantes :

- si deux suites disjointes Λ_1 et Λ_2 sont mesurables, leur réunion Λ l'est aussi, et $D(\Lambda) = D(\Lambda_1) + D(\Lambda_2)$;
- si Λ et Λ_1 sont mesurables, et $\Lambda_1 \subset \Lambda$, $\Lambda - \Lambda_1$ est aussi mesurable.

A chaque densité D sont associées une "densité intérieure" D_i et une "densité extérieure" D_e (que nous noterons aussi D_{ext}) : pour toute Λ, $D_i(\Lambda)$ (resp. $D_e(\Lambda)$) est la borne supérieure (resp. inférieure) des densités des suites mesurables contenues dans (resp. contenant) Λ. Si Λ_1 et Λ_2 sont complémentaires par rapport à une suite mesurable Λ, il est alors immédiat que

$$D_i(\Lambda_1) + D_e(\Lambda_2) \leq D(\Lambda) .$$

Dans les exemples qui suivent, il y a égalité.

<u>Exemples</u> :

a. <u>Densité ordinaire</u>. - Λ est mesurable et de densité ordinaire $\mathcal{D}(\Lambda)$, si

$$\mathcal{D}(\Lambda) = \lim_{|t|\to\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t}$$

existe. $\mathcal{D}_e$ et $\mathcal{D}_i$ s'appellent la densité maximum et la densité minimum (POLYA).

b. Densité uniforme. – Λ est mesurable et de densité uniforme $\Delta(\Lambda)$, si

$$n_\Lambda(t) - \Delta(\Lambda)\; t = O(1) \quad .$$

Δ_e et Δ_i ont été appelées densités supérieure et inférieure de répartition.

Depuis PALEY-WIENER et LEVINSON (1934-1935), on savait que

$$\pi\mathcal{D}_e(\Lambda) \leq R(\Lambda) \leq \pi\Delta_e(\Lambda) \tag{2}$$

et il est immédiat que, pour certaines suites Λ , $R(\Lambda) < \pi\Delta_e(\Lambda)$. Il est moins immédiat, quoique facile, de construire des Λ pour lesquelles $R(\Lambda) > \mathcal{D}_e(\Lambda)$; le dernier résultat dans cette direction était la construction d'une suite Λ d'entiers, telle que $\mathcal{D}(\Lambda) = 0$, et telle que $R(\Lambda) = \pi\Delta_e(\Lambda) = \pi$ (KOOSIS, [3]).

c. Densité maligne. – Λ est mesurable et de densité maligne $\mathcal{D}(\Lambda)$, si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|n_\Lambda(t) - D(\Lambda)\; t|}{1 + t^2}\, dt < \infty \quad .$$

La "densité effective" de MALLIAVIN-BEURLING n'est autre que la densité maligne extérieure. Cela résulte des propositions suivantes, qui entraînent le théorème III.

PROPOSITION A. – $D_{eff}(\Lambda) \geq D_{ext}(\Lambda)$.

Car, si (1) a lieu, la suite Λ' définie par

$$n_{\Lambda'}(t) = [at - n_{a,\Lambda}(t) + n_\Lambda(t)]$$

contient Λ , et admet a pour densité maligne.

PROPOSITION B. – Supposons

$$J(n_{a,\Lambda} - n_\Lambda) = \infty \quad . \tag{1}$$

Si $b < a$ et si $f \in E_{\pi b}$ s'annule sur Λ , $f = 0$. Donc $R(\Lambda) \geq \pi D_{eff}(\Lambda)$.

PROPOSITION C. – Si Λ admet une densité maligne D , il existe, pour tout $D' > D$, une $f \in E_{\pi D'}$, s'annulant sur Λ , et $\neq 0$. Donc $R(\Lambda) \leq \pi D_{ext}(\Lambda)$.

Voici une application immédiate du théorème III. Soit Λ une suite d'entiers, et F_Λ l'ensemble des fonctions périodiques de spectre dans Λ. Problème : quelle est la borne inférieure $U(\Lambda)$ des longueurs des intervalles I tels que la seule fonction F_Λ, nulle sur I, soit la fonction nulle ?

THÉORÈME IV. - $U(\Lambda) = 2\pi\, D_i(\Lambda)$ (densité maligne intérieure).

Car, dire que $f \in F_\Lambda$, c'est dire que la restriction de f à un intervalle de longueur 2π est orthogonale aux $e^{i\lambda' x}$ $(\lambda' \in \Lambda')$, Λ' désignant la suite d'entiers complémentaire de Λ.

4. - Démonstration de la proposition B.

Supposons pour fixer les idées

$$\int_1^\infty \frac{n_a(t) - n(t)}{t^2}\, dt = \infty \tag{3}$$

($n_a = n_{a,\Lambda}$ et $n = n_\Lambda$). L'ensemble A des $t > 1$, où $n_a(t) > n(t)$, est une réunion d'intervalles $I_m =]\alpha_m, \alpha_m + \ell_m[$ $(m = 1, 2, \ldots)$ que l'on peut ordonner par origines α_m croissantes. Si l'un de ces intervalles (le dernier) est une demi-droite, on a $\mathcal{D}_e(\Lambda) \geqslant a$, et (2) établit le résultat [1]. Sinon, soit

$$J_m =]\alpha_m, \beta_m[, \quad \beta_m = \alpha_m + \ell_m + \varepsilon\ell_m$$

($\varepsilon > 0$ sera fixé plus loin). De la suite des J_m, supprimons tour à tour, dans l'ordre des m croissants, tout intervalle contenu dans la réunion des autres ; on obtient ainsi une suite d'intervalles J_μ (μ parcourant une suite d'entiers) recouvrant A sans triple superposition. Chacune des deux suites obtenues à partir de $\{J_\mu\}$ en supprimant un intervalle sur deux est formée d'intervalles disjoints, et pour l'une au moins, soit $\{J_\nu\}$, on a, d'après (3),

$$\sum_\nu \int_{J_\nu} \frac{n_a(t) - n(t)}{t^2}\, dt = \infty \tag{4}$$

(ν parcourt une suite d'entiers convenables). Comme, pour tout ℓ et tout α_m, on a

[1] On peut aussi adapter la méthode qui suit.

$$\int_{\alpha_m}^{\alpha_m+\ell} \frac{n_a(t) - n(t)}{t^2}\, dt < \frac{\ell^2}{2\alpha_m^2}$$

(4) implique $\sum_V \frac{\ell_V^2}{\alpha_V^2} = \infty$, ou aussi bien

(5) $$\sum_V \frac{\ell_V^2}{\beta_V^2} = \infty \quad .$$

Soit maintenant $f \in E_{\pi b}$, nulle sur Λ . Utilisons, comme KOOSIS ([3]), la formule de Jensen autour du point x ; on obtient

$$\log|f(x)| \leqslant -\int_0^R \frac{n(x+t) - n(x-t)}{t}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(x + Re^{i\theta})|\, d\theta$$

$$\leqslant -\int_0^R \frac{n(x+t) - n(x-t)}{t}\, dt + 2bR$$

et en intégrant

$$\int_\alpha^\beta \log|f(x)|\, dx \leqslant -\int_0^R \frac{N(\beta+t) - N(\beta-t) - N(\alpha+t) + N(\alpha-t)}{t}\, dt + 2bR(\beta-\alpha)$$

$N(t)$ étant une primitive de $n(t)$. Comme

$$N(\alpha+t) - N(\alpha-t) \leqslant 2tn(\alpha+R)$$

$$N(\beta+t) - N(\beta-t) \geqslant 2tn(\beta-R)$$

on a

(6) $$\int_\alpha^\beta \log|f(x)|\, dx \leqslant 2R(b(\beta-\alpha) - (n(\beta-R) - n(\alpha+R))) \quad .$$

Choisissons $\alpha = \alpha_V$, $\beta = \beta_V$, et $R = \varepsilon\ell_V$; (6) s'écrit

$$\int_{J_V} \log|f(x)|\, dx \leqslant 2\varepsilon\ell_V^2(b(1+\varepsilon) - a(1-\varepsilon)) \quad .$$

Choisissons ε assez petit pour avoir $a(1-\varepsilon) - b(1+\varepsilon) = \varepsilon' > 0$; alors

$$\int_{J_V} \frac{\log|f(x)|}{x^2}\, dx \leqslant -\varepsilon' \frac{\ell_V^2}{\beta_V^2} \quad .$$

D'après (5), et le fait que les J_V sont disjoints, $J(\log|f(x)|) = \infty$, donc $f = 0$. La proposition B est démontrée.

5. – Démonstration de la proposition C.

Pour toute suite Λ ayant une densité maligne D, posons

$$r_\Lambda(t) = \frac{n_\Lambda(t) - Dt}{t}$$

$$C_\Lambda(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{\lambda\in\Lambda,\ |\lambda|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) \quad .$$

On a par hypothèse

$$I(r_\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|r_\Lambda(t)|}{\sqrt{1+t^2}}\, dt < \infty$$

et l'égalité

$$\int_{-R}^{R} \log\left|1 - \frac{x}{\lambda}\right| dn_\Lambda(t) = \left[\log\left|1 - \frac{x}{t}\right| n_\Lambda(t)\right]_{-R}^{R} + \text{v. p.} \int_{-R}^{R} \frac{x}{x-t} \frac{n_\Lambda(t)}{t}\, dt$$

donne

$$\frac{1}{x} \log|C_\Lambda(x)| = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_\Lambda(t)}{t-x}\, dt = U_\Lambda(x) \quad .$$

$C_\Lambda(z)$ est de type exponentiel πD, et

$$J(\log|C_\Lambda(x)|) < \infty \iff I(U_\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|U_\Lambda(x)|}{\sqrt{1+x^2}}\, dx < \infty \quad .$$

Supposons acquis le théorème I. Il nous suffit de montrer que, quel que soit $D_1 > D$, il existe une suite Λ_1 de densité maligne D_1, contenant Λ, et telle que $I(U_{\Lambda_1}) < \infty$.

Plus généralement, soit $V(t)$ une fonction croissante telle que

$$V(t) = Dt + o(|t|)$$

$(t \to \pm \infty)$, et soit

$$r_V(t) = \frac{V(t) - Dt}{t}$$

$$U_V(x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_V(t)}{t - x}\, dt \quad \text{si} \quad I(r_V) < \infty \quad .$$

Il est connu, et facile de voir, que, si $V(t) - n_\Lambda(t) = O(1) \quad (t \to \pm \infty)$, on a

$$U_\Lambda(x) - U_V(x) = O\left(\frac{\log|x|}{|x|}\right) \qquad (x \to \pm \infty) \quad ,$$

de sorte que $I(U_\Lambda) < \infty \iff I(U_V) < \infty$. Pour démontrer la proposition C, il suffit donc d'établir :

(C'). - Quel que soit $D_1 > D$, il existe une fonction croissante

$$V(t) = D_1\, t + o(|t|)$$

$(t \to \pm \infty)$, telle que $V(t) - n_\Lambda(t)$ soit une fonction croissante, et telle que $I(r_V) < \infty$ et $I(U_V) < \infty$.

Les choses seraient évidentes s'il était vrai que $I(r_V) < \infty$ entraînât $I(U_V) < \infty$. Faute de cela, on a le succédané :

LEMME. - Supposons qu'existe une suite croissante $\{\xi_n\}$ ($n = \dots -1 , 0 , 1 , \dots$; $\xi_0 = 0$ et $\lim_{n\to\pm\infty} \xi_n = \pm \infty$) telle que, sur chaque intervalle $[\xi_n , \xi_{n+1}]$, $r_V(t)/t$ ait une valeur moyenne nulle, et que, en posant $\ell_n = \xi_{n+1} - \xi_n$ pour $n > 0$, $\ell_n = \xi_n - \xi_{n-1}$ pour $n < 0$, on ait

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell_n^2}{\xi_n^2} < \infty \quad . \tag{7}$$

Alors $I(r_V) < \infty$ et $I(U_V) < \infty$.

DÉMONSTRATION. - Soit $r_{V,n}$ la restriction de r_V à $[\xi_n , \xi_{n+1}]$ (pour fixer les idées, $n > 0$), et

$$U_{V,n}(x) = \text{v. p.} \int \frac{r_{V,n}(t)}{t - x}\, dt$$

Observons que, si $\frac{V(t)}{t} < c$, on a $t\,dr_V(t) > -c\,dt$, donc $dr_{V,n}(t) > -\frac{c}{\xi_n}\,dt$ et, compte tenu du fait que $r_{V,n}$ prend des valeurs positives et négatives,

(8)
$$|r_{V,n}(t)| \leqslant \frac{c\ell_n}{2\xi_n}$$

(7) et (8) entraînent $I(r_V) < \infty$. Il suffit maintenant de montrer

(9)
$$I(U_{V,n}) < K\,\frac{\ell_n^2}{\xi_n^2}$$

K indépendant de n . Soit $[\xi_n', \xi_n'']$ l'intervalle de même milieu que $[\xi_n , \xi_{n+1}]$ et de longueur triple. Chacune des intégrales

$$\int_{-\infty}^{\xi_n'} \int_{\xi_n'}^{\xi_n''} \int_{\xi_n''}^{\infty} \frac{|U_{V,n}(x)|}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

admet une majoration du type (9). Donnons-en rapidement la raison : pour la première et la dernière, cela résulte d'un calcul direct, utilisant (8) ; pour la seconde, du fait que

$$\int_{\xi_n'}^{\xi_n''} U_{V,n}^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} r_{V,n}^2(t)\,dt$$

(propriété isométrique dans L^2 de la transformation de Hilbert), et de l'inégalité de Schwarz. On a donc (9), et le lemme est démontré.

Pour démontrer (C'), on cherche à construire $V(t)$ satisfaisant l'hypothèse du lemme. Indiquons la construction pour $t > 0$ (c'est la même pour $t < 0$). Soit $0 < \varepsilon < D_1 - D$, et $q(t)$ une fonction telle que

(10)
$$\begin{cases} q'(t) > -\varepsilon\,\dfrac{dt}{t} \\[2ex] q(t) = o(1) \quad (t \to \infty) \end{cases} .$$

On pose, pour t assez grand (de façon que $V(t) - n_\Lambda(t)$ $\nearrow$)

$$V(t) = n_\Lambda(t) + (D_1 - D)\,t + t\,q(t)$$

d'où $r_V(t) = r_\Lambda(t) + q(t)$. Reste à construire $q(t)$ satisfaisant (10), et une suite $\{\xi_n\}$ satisfaisant (7), telles que

$$(11) \qquad \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (r_\Lambda(t) + q(t)) \frac{dt}{t} = 0 \ , \quad \forall \ n \quad .$$

L'idée est de prendre pour $q(t)$ une fonction triangulaire de pente $\frac{\pm\varepsilon}{\xi_n}$ sur $[\xi_n , \xi_{n+1}]$ (elle satisfait bien (8)) et, ξ_n étant défini et $q(t)$ astreinte à la condition ci-dessus, de choisir ξ_{n+1} maximum tel que (11) ait lieu ; de (11) résulte alors

$$\frac{\ell_n^2}{4\xi_n \xi_{n+1}} \leqslant \left| \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} r_\Lambda(t) \frac{dt}{t} \right|$$

d'où (7). Une petite difficulté apparaît si $r_\Lambda(t)$ est trop petit à droite de ξ_n : il se peut que le procédé indiqué donne $\xi_{n+1} = \xi_n$, ou ξ_{n+1} très voisin de ξ_n (disons : $\xi_{n+1} < (1 + \frac{1}{n}) \xi_n$) ; dans ce cas, on renonce à ce procédé, on pose $\xi_{n+1} = (1 + \frac{1}{n}) \xi_n$, et on choisit $q(t)$ en conséquence (c'est-à-dire satisfaisant (10) et (11)) sur $[\xi_n , \xi_{n+1}]$; on vérifie que l'on a encore (7).

Moyennant le théorème I, la proposition C se trouve ainsi démontrée.

6. - **Démonstration** du théorème I.

Rappelons que seule la partie (b) est à démontrer. On peut d'abord supposer g nulle en 0 . Puis, comme g est majorée sur la droite réelle par

$$g_1(z) = 1 + g(z)\ \overline{g(\bar{z})} + g(-z)\ \overline{g(-\bar{z})} \qquad ,$$

on peut, quitte à remplacer g par g_1 , supposer g de la forme

$$(12) \qquad g(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

avec

$$(13) \qquad \begin{cases} |g(x)| \geqslant 1 \quad \text{pour} \quad x \ \text{réel} \\ \\ J(\log|g(x)|) < \infty \qquad . \end{cases}$$

Nous allons donner une interprétation de $\log|g(x)|$ en théorie du potentiel.

Soit $G(x, y) = \log\left|\frac{x+y}{x-y}\right|$ (noyau de Green du demi-plan $Rz > 0$, restreint à la demi-droite $x > 0$). Le potentiel d'une mesure μ positive portée par $[0, \infty[$ est

$$U^{\mu}(x) = \int_0^{\infty} G(x, y)\, d\mu(y) \tag{14}$$

et son énergie est

$$E(\mu) = \int_0^{\infty} U^{\mu}(x)\, d\mu(x) \quad . \tag{15}$$

(14) est aussi défini pour certaines mesures réelles. En particulier, (14) et (15) ont un sens pour les mesures réelles à support compact dans $]0, \infty[$ (soit $\mu \in M$) et $||\mu|| = \sqrt{E(\mu)}$ est une norme hilbertienne pour M. Le complété de M pour cette norme est l'espace $\mathcal{E}$ des distributions d'énergie finie. On sait que la convergence des μ dans $\mathcal{E}$ entraîne la convergence presque-partout des $U^{\mu}(x)$. On définit ainsi les potentiels d'énergie finie (= potentiels des distributions d'énergie finie).

On a les deux importantes propositions :

PROPOSITION D. - Si g est une fonction de type exponentiel satisfaisant (12) et (13), $\frac{1}{x}\log|g(x)|$ est un potentiel d'énergie finie, soit U^{γ}.

PROPOSITION E. - Si $d\varphi$ est une mesure d'énergie finie telle que

$$d\varphi(x) > -a\,\frac{dx}{x} \quad \text{pour } t \text{ assez grand,} \quad a > 0 \tag{16}$$

il existe une fonction f de type exponentiel $\leq a$, paire, égale à 1 en 0, telle que

$$\log|f(x)| = -x\, U^{\varphi}(x) + O(\log x) \quad (x \to \infty) \quad .$$

Admettons-les. Pour démontrer le théorème I, il suffit d'associer à toute g satisfaisant (12) et (13) une f paire de type exponentiel $\leq a$, telle que

$$\begin{cases} \log|f(x)| < O(\log x) \\ \log|f(x)| + \log|g(x)| < O(\log x) \end{cases} \quad .$$

D'après les propositions D et E, il suffit donc de résoudre le problème suivant : associer à toute distribution γ d'énergie finie telle que

$$U^{\gamma} \geq 0 \;, \qquad \int_0^{\infty} U^{\gamma}(x)\,\frac{dx}{x} < \infty$$

une mesure φ d'énergie finie satisfaisant (16) et telle que $U^{\varphi} \geq U^{\gamma}$ quasi partout.

Soit A_{γ} l'ensemble des distributions d'énergie finie ψ telles que $U^{\psi} \geq U^{\gamma}$ q. p., et

$$\ell(\psi) = E(\psi) + 2a \int_0^{\infty} U^{\psi}(x) \frac{dx}{x} \quad .$$

A_{γ} est un cône convexe fermé dans $\mathcal{E}$, et $\ell(\psi)$ est semi-continue inférieurement sur A_{γ} (car la convergence dans $\mathcal{E}$ entraîne la convergence q. p. des potentiels) ; de plus, $\ell(\psi)$ n'est pas constamment ∞ sur A_{γ}, car $\ell(\gamma) < \infty$. Soit $\varphi \in A_{\gamma}$ telle que $\ell(\varphi)$ soit minimum. Nous allons montrer que φ est une mesure et satisfait (16).

Considérons en effet une fonction indéfiniment dérivable positive à support compact dans $]0, \infty[$. C'est un potentiel d'énergie finie U^{θ}, et $\varphi + \lambda\theta \in A_{\gamma}$ pour tout $\lambda > 0$. Or (en utilisant la notation intégrale pour (φ, U^{θ}))

$$\ell(\varphi + \lambda\theta) = \ell(\varphi) + 2\lambda \int U^{\theta}(x) \left(d\varphi(x) + a\frac{dx}{x}\right) + \lambda^2 E(\theta)$$

donc l'intégrale du second membre est positive. Cela veut dire que la distribution $d\varphi(x) + a\frac{dx}{x}$ est positive ; c'est donc une mesure, et φ satisfait (16).

Moyennant les propositions D et E, dont on trouvera la démonstration en [5], le théorème I est donc démontré.

7. - Compléments et problèmes.

1° En ce qui concerne le problème 2, B et M ne se limitent pas à des suites Λ réelles ; on a le résultat :

$$\text{si} \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{|\mathfrak{I}\lambda|}{|\lambda|^2} < \infty, \qquad R(\Lambda) = \pi D_e(\Lambda_r)$$

Λ_r étant la suite réelle telle que tout demi-disque $|z| < R$, $Rz > 0$ ou $Rz < 0$ contienne autant de points de Λ et de Λ_r ;

$$\text{si} \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{|\mathfrak{I}\lambda|}{|\lambda|^2} = \infty, \qquad R(\Lambda) = \infty \quad .$$

Cela donne une caractérisation complète des spectres des fonctions moyenne-périodiques d'une variable puisque une suite complexe Λ est un tel spectre si et seulement si $R(\Lambda) < \infty$.

2° Problème : Soit E_a l'ensemble des fonctions entières de n variables, de type exponentiel $< a$, et bornées dans le domaine réel, et soit E la réunion des E_a . Montrer (?) que si une fonction entière s'écrit $\frac{f}{g}$, $f \in E$, $g \in E$, elle s'écrit aussi, pour tout $a > 0$, $\frac{f_1}{g_1}$, $f_1 \in E$, $g_1 \in E_a$.

3° Le théorème 4 s'étend aux fonctions pseudopériodiques ayant leur spectre dans une suite Λ régulière $(\inf|\lambda' - \lambda| > 0)$.

Problème : Étendre le théorème 4 aux fonctions moyenne-périodiques ayant leur spectre dans une suite Λ complexe (satisfaisant $R(\Lambda) < \infty$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING (A.) and MALLIAVIN (P.). - Closure of a set of exponentials on an interval, Acta Mathematica (à paraître).

[2] BEURLING (A.) and MALLIAVIN (P.). - On Fourier transforms of measures with compact support, Annals of Math. Series 2 (à paraître).

[3] KOOSIS (Paul). - Sur la totalité des systèmes d'exponentielles imaginaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2102-2103.

[4] MALLIAVIN (Paul). - Spectres des fonctions moyenne-périodiques, totalité d'une suite d'exponentielles sur un segment, Séminaire Lelong : Analyse, t. 3, 1961, n° 11, 12 p.

[5] MALLIAVIN (Paul). - Somé applications of entire functions of exponential type to harmonic analysis. Stanford, Summer Institute, Stanford University, 1961 (Multigraphed Lectures).