SERGE LANG

Fonctions implicites et plongements riemanniens

Séminaire N. Bourbaki, 1961-1962, exp. nº 237, p. 245-254
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__245_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 237

Mai 1962

FONCTIONS IMPLICITES ET PLONGEMENTS RIEMANNIENS

par Serge LANG

(d'après J. NASH [2] et J. MOSER [1])

1. Métriques induites.

Soit X une variété différentiable compacte. Un morphisme $u : X \to V$ de X dans une autre variété est un plongement si et seulement si elle est injective, et son application tangente est une injection en chaque point. Supposons que ceci soit le cas, et que V soit munie d'une métrique (i. e. d'un champ de tenseurs bilinéaires symétriques) g. Alors u induit une métrique sur X, notée $u^*(g)$. Si X est aussi munie d'une métrique g_1, on dira que u est un plongement métrique si $u^*(g) = g_1$. Si les métriques sont définies positives ($g > 0$ et $g_1 > 0$), on dit qu'elles sont riemanniennes, et que u est un plongement riemannien.

Les métriques sur X forment un espace vectoriel $\mathrm{Met}(X)$. Si l'on considère X comme une variété de classe C^p $(0 \leqslant p < \infty)$ cet espace vectoriel est même un espace de Banach, car on peut prendre le sup des dérivées d'ordre $\leqslant p - 1$ (par rapport à un nombre fini de cartes locales recouvrant X) pour définir la norme. Ceci étant, les métriques riemanniennes forment alors un ouvert $\mathrm{Ri}(X)$ dans ce Banach, et par conséquent, on se doit de considérer $\mathrm{Ri}(X)$ comme variété (de dimension infinie), dont l'espace tangent n'est autre que $\mathrm{Met}(X)$.

Notons $M^p(X, V)$ l'ensemble des morphismes (= applications différentiables) de classe C^p de X dans V. Si $V = \underset{\sim}{R}^n$, alors $M^p(X, \underset{\sim}{R}^n)$ est un espace vectoriel, et un espace de Banach pour la p-norme des dérivées $\leqslant p < \infty$. Le sous-ensemble des plongements noté $\mathrm{Em}^p(X, \underset{\sim}{R}^n)$ est ouvert dans $M^p(X, \underset{\sim}{R}^n)$. Si on considère $\underset{\sim}{R}^n$ comme muni de sa métrique ordinaire ρ, alors on a une application

$$f : M^p(X, \underset{\sim}{R}^n) \to \mathrm{Met}^{p-1}(X)$$

qui, à tout morphisme u, associe $u^*(\rho) = f(u)$. En outre, f applique l'ouvert des plongements dans l'ouvert des métriques riemanniennes,

$$f : \mathrm{Em}^p(X , \mathbb{R}^n) \to \mathrm{Ri}^{p-1}(X) \qquad .$$

Le théorème de Nash, selon lequel toute variété riemannienne admet un plongement riemannien dans un espace euclidien, peut s'exprimer alors en disant que f est surjective (pour un choix convenable de n en fonction de d).

Pour démontrer le théorème, GARSIA m'a fait remarquer qu'on peut se borner au cas où X est un tore. En effet, toute variété compacte se plonge dans un espace euclidien, et son image est contenue dans une boule ouverte bornée qu'on peut plonger dans une carte locale sur le tore. On obtient alors X comme sous-variété fermée du tore, et la métrique riemannienne donnée s'étend à une métrique riemannienne sur le tore, d'abord localement, puis globalement par une partition de l'unité. Il suffit alors de plonger le tore métriquement dans un $\mathbb{R}^n$ pour résoudre le problème pour X .

Pour des raisons techniques, il est fréquemment plus facile de traiter le tore qu'une variété quelconque. Par exemple, dans ce cas, soit $u : T^d \to \mathbb{R}^n$ un plongement. La métrique $f(u) = g$ sur T induite par ρ s'écrit

$$g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial u}{\partial x_i} , \frac{\partial u}{\partial x_j} \rangle \qquad i , j = 1 , \dots , d$$

si $(x_1 , \dots , x_d)$ sont les coordonnées (globales!) de T et si u est représenté comme fonction périodique sur $\mathbb{R}^d$.

L'application f admet alors une dérivée

$$f' : M^p(T , \mathbb{R}^n) \to \mathrm{Met}^{p-1}(T)$$

qui s'écrit

$$(1) \qquad f'(u)\ v = \langle \frac{\partial u}{\partial x_i} , \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle + \langle \frac{\partial u}{\partial x_j} , \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle$$

par rapport à ces coordonnées.

L'espace des plongements n'est d'ailleurs pas le plus agréable à regarder, et c'est vraiment aux plongements non-dégénérés qu'on en a. On dit qu'un plongement $u : X^d \to \mathbb{R}^n$ est <u>non-dégénéré</u> si, en chaque point, il existe des coordonnées locales $(x_1 , \dots , x_d)$ telles que la matrice

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \end{bmatrix}$$

soit carrée et de déterminant non nul en chaque point. Cela implique, en particulier, que $n = d + d(d+1)/2$, et que la matrice ait n colonnes et n lignes. On voit immédiatement que cette condition est indépendante du choix de coordonnées locales (un changement de coordonnées ne fait qu'introduire des relations linéaires, donc ne peut que réduire le rang de la matrice, d'où égalité de rang par symétrie).

Notre application f induit alors une application (encore notée f)

$$f : ND^p(X, \underset{\sim}{R}^n) \to Ri^{p-1}(X) \quad .$$

Il est évident que les plongements non-dégénérés forment aussi un ouvert dans $M^p(X, \underset{\sim}{R}^n)$. On cherche alors à décrire la structure de l'application f. NASH démontre que c'est une application ouverte, et c'est cette partie de la démonstration qui représente la contribution la plus substantielle de son article. C'est la seule que nous considérons ici.

MOSER [1] a repris la question, et suivant la méthode de NASH, l'exprime sous la forme d'un théorème de fonctions implicites que nous étudierons plus loin en détail. Il est naturel de se demander si f est localement une projection. Cette question n'est pas resolue.

Nous n'entrerons pas dans la seconde partie de la démonstration de NASH. Elle consiste à montrer, d'abord, qu'il existe des plongements non-dégénérés, et, ensuite, que toute métrique riemannienne s'approche par une métrique induite par un tel plongement. A ceci, il faut encore ajouter une astuce pour tenir compte de certaines uniformités en ce qui concerne les sup de dérivées supérieures. Notre but ici est uniquement d'exposer la relation entre le théorème des fonctions implicites et le problème du plongement.

2. Fonctions implicites et métriques.

Soit $p \geqslant 3$, et notons E_p l'espace de Banach $M^p(T, \underset{\sim}{R}^n)$. Soit F l'espace de Banach $Met^{p-1}(T)$. On a l'application

$$f : E_p \to F$$

et sa dérivée f'. On notera que cette dérivée admet une extension linéaire à E_{p-2}, donnée par la formule (1).

$$E_{p-2} \supset E_p \xrightarrow{f} F \quad .$$

Soit $\overset{\circ}{u}$ un plongement non-dégénéré de T dans $\underset{\sim}{R}^n$. Nous allons définir pour chaque u suffisamment voisin de $\overset{\circ}{u}$ (pour la p-topologie) un opérateur linéaire continu

$$L(u) : F \to E_{p-2}$$

tel que $f'(u) \circ L(u) = id$, c'est-à-dire un inverse à droite pour $f'(u)$. A chaque métrique h il existe une application $v : T \to \underset{\sim}{R}^n$ et une seule qui satisfasse au système de conditions linéaires :

(3) $$-2 \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} , v \right\rangle = h_{ij} \quad ,$$

(4) $$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i} , v \right\rangle = 0 \quad .$$

La condition (4) exprime le fait que v est perpendiculaire à l'espace tangent au tore dans $\underset{\sim}{R}^n$. La condition (3) s'obtient en prenant la dérivée de (4) et en la combinant avec la relation

(5) $$f'(u)\ v = h \quad .$$

Cela montre que l'on peut écrire

$$L(u)\ h = Q(u_x , u_{xx})\ h$$

avec une matrice Q de fonctions rationnelles en les u_x, u_{xx} dont le dénominateur n'est autre que le déterminant de (2). Par conséquent, v est de classe C^{p-2} et Q est continue, en tant qu'application

$$B_a(\overset{\circ}{u} , E_p) \to E_{p-2}$$

définie sur une petite boule de rayon a autour de $\mathring{u}$ dans E_p.

Pour regagner les deux dérivées que nous avons perdues, il faudra des opérateurs de régularisation qu'on décrira au prochain paragraphe. Le dernier paragraphe donnera alors le théorème de fonctions implicites qui, moyennant des hypothèses de dérivabilité supplémentaires, nous permettra de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 1. – Soit $p \geqslant 3$. Soit $\mathring{u}$ un plongement non-dégénéré de T dans $\underset{\sim}{R}^n$ de classe $p+44$, et posons $\mathring{g} = f(\mathring{u})$. Soit $A > 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, si g est de classe $p + 44 - 2 = p + 42$, si $\|g\|_{p+42} < A$, et $\|g - \mathring{g}\|_{p-1} < \delta$, alors $g = f(u)$ avec un u de classe C^p, tel que

$$\|u - \mathring{u}\|_p < \varepsilon \quad .$$

En fait, ce théorème ne devrait être qu'un lemme, et on devrait pouvoir démontrer dans le cas C^∞ que l'application

$$f : \ ND^\infty(T , \underset{\sim}{R}^n) \to Met^\infty(T)$$

est ouverte, et même possède une section locale en chaque point $\mathring{u}$. Je m'excuse de ne pas avoir été capable de le faire. En tous cas, on obtient le u désiré comme limite d'une suite

$$u_{n+1} = u_n - T_{\xi_{n+1}} L(u_n) \; [f(u_n) - g]$$

avec des opérateurs T_ξ définis au prochain paragraphe.

3. Opérateurs de régularisation.

THÉORÈME 2. – Soient $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ les espaces de Banach des fonctions de classe C^0, C^1, C^2, ... sur $\underset{\sim}{R}^d$, à supports compacts. Pour tout nombre $\xi > 1$, il existe une application linéaire

$$T_\xi : \ K_0 \to K_\infty = \bigcap K_p$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\|T_\xi v\|_{r+s} \leq c(r\ ,\ s)\ \xi^s \|v\|_r$$

$$\|(I - T_\xi)\ v\|_r \leq c(r\ ,\ s)\ \xi^{-s} \|v\|_{r+s}$$

$r\ ,\ s \geqslant 0\ ,\quad v \in K_{r+s}$. <u>On note</u> $c(r\ ,\ s)$ <u>une constante ne dépendant que de</u> r <u>et</u> s , <u>indépendante de</u> $\xi\ ,\ v$.

<u>Démonstration</u>. – Désignons par $x\ ,\ y\ ,\ \ldots$ des points de $\mathbb{R}^d$, $x = (x_1\ ,\ldots,x_d)$. Posons $|x| = \sup|x_i|$. Soit φ_0 une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 1$, et

$$\varphi_0(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ y < 1/2 \\ 0 & \text{si } \ y \geqslant 1 \end{cases} .$$

Définissons $\varphi(x) = \varphi_0(x_1) \cdots \varphi_0(x_d)$ et soit $\psi = \hat{\varphi}$ sa transformée de Fourier. Alors ψ est analytique, on a

(i) Pour chaque $\nu\ ,\ \mu \geqslant 0$ la fonction

$$|x|^\nu\ |\psi^{(\mu)}\ (x)|$$

est bornée par $|\varphi^{(\nu+\mu)}|$ (à une constante près).

(ii) Si on pose $k = (k_1\ ,\ \ldots\ ,\ k_d)$ et $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}$ alors

$$\int x^k\ \psi(x)\ dx = \begin{cases} 1 & \text{si } \ k = 0 \\ 0 & \text{si } \ k \neq 0 \end{cases} .$$

La première assertion se montre facilement en dérivant ψ , et la seconde en dérivant la transformée de Fourier de ψ et en employant la formule d'inversion, plus le fait que φ est constante en un voisinage de l'origine.

On définit T_ξ par la convolution

$$(T_\xi\ u)(x) = \xi^d \int \psi(\xi(x - y))\ u(y)\ dy \qquad .$$

La première inégalité est évidente du fait que les opérateurs de dérivation commutent à la convolution. Quant à la seconde, relative à $I - T_\xi$, on se ramène aussitôt au cas où $r = 0$, puis on évalue la convolution en évaluant

$$u(x) - \int \psi(z)\, u(x - \tfrac{z}{\xi})\, dz = \int \psi(z)\, [u(x) - u(x - \tfrac{z}{\xi})]\, dz$$

en développant $u(x) - u(x - \frac{z}{\xi})$ suivant sa série de Taylor, il reste :

$$\left|u(x) - u(x - \tfrac{z}{\xi}) - \sum_{|k|<s} a_k(x)\, z^k\right| \leq \frac{z^s}{\xi^s} C\|u\|_s \quad .$$

On trouve l'estimation voulue en se servant de (ii).

On démontre l'existence de tels opérateurs de régularisation sur une variété compacte en la plongeant dans un espace euclidien. Dans le cas particulier du tore, on pourrait aussi prendre la convolution sur le tore.

4. Théorème abstrait de fonctions implicites.

Supposons donnés quatre espaces de Banach

$$E_- \supset E_+ \supset E_\flat \supset E_\sharp$$

qui, dans les applications, correspondraient à des espaces fonctionnels,

$$E_{p-\sigma} \supset E_p \supset E_{p+\beta} \supset E_{p+\beta+\lambda} \quad .$$

(Dans la discussion du § 2, on aurait $\sigma = \lambda = 2$ et $\beta = 42$.) On suppose donnée une application linéaire pour chaque entier ξ ,

$$T_\xi : E_- \to E_\sharp$$

et on n'aura besoin que d'une partie des hypothèses du théorème 2, à savoir qu'il existe des nombres α , β , $\sigma > 0$ et $C > 2$ tels que T_ξ soit un opérateur borné, les bornes entre les espaces variés étant données par :

$$|T_\xi| \leq C\xi^\alpha \qquad \text{pour } E_- \to E_\sharp$$

$$|I - T_\xi| \leq C\xi^{-\beta} \qquad \text{pour } E_\flat \to E_+$$

$$|T_\xi| \leq C\xi^\sigma \qquad \text{pour } E_- \to E_+ \quad .$$

On supposera qu'il existe un nombre s , $1 < s < 2$, tel que, si l'on pose $\tau = (s\sigma + 1)/(2 - s)$, alors

$$s\beta - \alpha \geqslant s^2(\sigma + \tau) + 1 \quad .$$

Dans l'application du § 2, on prend $s = 3/2$ et $\beta = 42$.

THÉORÈME 3. – Les notations étant comme ci-dessus, prenons un nombre $0 < a < 1/2$ et $u_o \in E_+$. Soit $f : B_{2a}(u_o , E_+) \to F$ une application de classe C^2 dans un espace de Banach F , dont les dérivées f' et f'' sont bornées par C dans la boule B_{2a} . Supposons que, pour tout u dans la boule $B_a(u_o , E_+)$,

(i) Il existe une application linéaire $L(u) : F \to E_-$, aussi bornée par C , et une extension linéaire de $f'(u)$ à l'image de $L(u)$ telles que $f'(u) \circ L(u) =$ identité.

(ii) Si $u \in B_a(u_o , E_+)$ et $u - u_o \in E_\#$, alors $L(u)\ f(u)$ est dans $E_\flat$ et

$$|L(u)\ f(u)|_\flat \leqslant C \sup(1 , |u - u_o|_\#) \quad .$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ dépendant de $\alpha , \beta , \sigma , s , C$ tel que, si $|f(u_o)| < \varepsilon$, il existe $u \in B_a(u_o , E_+)$ tel que $f(u) = 0$.

Remarques. – Dans les applications, on applique le théorème à l'application $f_g(u) = f(u) - g$ pour g voisin de $g_o = f(u_o)$. La condition (ii) dans le cas particulier du § 2 se démontre facilement au moyen de formules d'interpolation pour les dérivées, de sorte que notre théorème 3 implique immédiatement le théorème 1.

Nous prenons ξ_o suffisamment grand, et nous posons $\xi_n = \xi_o^{s^n}$. Nous supposons en outre que $|f(u_o)| \leqslant a/C^3 . \xi_o^{-s(\sigma+\tau)}$. Nous montrerons alors que la suite

$$u_{n+1} = u_n - T_{\xi_{n+1}}\ L(u_n)\ f(u_n)$$

converge dans $B_a(u_o , E_+)$ vers un élément w tel que $f(w) = 0$. On démontrera récursivement que

(1n) $$|f(u_n)| \leqslant a/C^3 . \xi_{n+1}^{-(\sigma+\tau)}$$

(2n) $$|u_{n+1} - u_n|_+ \leqslant a\xi_{n+1}^{-\tau}$$

(3n) $$|u_n - u_o|_\# \leqslant a\xi_n^{\alpha} \quad .$$

D'après (2n), on voit que la suite est une suite de Cauchy, que tous les u_n sont dans la boule $B_a(u_o , E_+)$, ξ_o étant grand. D'après (1n) on voit que la suite u_n converge vers un zéro de f. On n'a mis (3n) que pour faciliter la récurrence.

Pour $n = 0$, la condition (1n) est une hypothèse, (3n) est évidente, et pour (2n), on estime $|u_1 - u_o|_+$ en employant successivement la borne de T_ξ de E_- à E_+ , la borne absolue de $L(u_o)$, et l'hypothèse sur la borne de $|f(u_o)|$. Pour démontrer les conditions $n + 1$, on a :

1(n + 1). – Par le fait que f est deux fois différentiable,

$$|f(u_{n+1}) - f(u_n) - f'(u_n)(u_{n+1} - u_n)| \leq C|u_{n+1} - u_n|_+^2 \quad .$$

L'expression à gauche est égale à

$$|f(u_{n+1}) - f(u_n) - f'(u_n)\, T_{\xi_{n+1}}\, L(u_n)\, f(u_n)| \quad .$$

Écrivons $T = T - I + I$. Alors le terme en $f(u_n)$ disparaît. On obtient ce qu'on veut en employant la borne de $I - T$, la borne absolue de f' et la condition (ii), ainsi que l'hypothèse que $s\beta - \alpha \geqslant s^2(\sigma + \tau) + 1$.

2(n + 1). – C'est comme pour $n = 0$, à savoir : on se sert successivement de la borne pour $T_{\xi_{n+2}}$, de la borne uniforme pour $L(u_{n+1})$, et de l'hypothèse de récurrence pour $f(u_{n+1})$.

3(n + 1). – Par récurrence, on trouve

$$|u_{n+1} - u_o|_\# \leq |u_{n+1} - u_n|_\# + |u_n - u_o|_\# \quad .$$

Pour le premier terme, on estime successivement la borne de $T_{\xi_{n+1}}$ de E_- à $E_\#$, la borne uniforme de $L(u_n)$ et finalement la borne de $f(u_n)$ d'après l'hypothèse de récurrence. Pour le second terme, on se sert de l'hypothèse de récurrence. Une estimation grossière donne ce qu'on veut.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MOSER (J.). - A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 47, 1961, p. 1824-1831.

[2] NASH (J.). - The embedding problem for Riemannian manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 20-63.