MICHEL DEMAZURE

Sous-groupes arithmétiques des groupes algébriques linéaires

Séminaire N. Bourbaki, 1961-1962, exp. nº 235, p. 209-220

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__209_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 235

Mai 1962

SOUS-GROUPES ARITHMÉTIQUES DES GROUPES ALGÉBRIQUES LINÉAIRES

par Michel DEMAZURE

Ceci est l'exposé des résultats de A. BOREL et HARISH-CHANDRA exposés, ou annoncés dans [1], [2], [3], et un aperçu des méthodes de démonstration.

1. Énoncé des résultats.

Soit G un groupe algébrique linéaire défini sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire un sous-groupe défini sur $\mathbb{Q}$ d'un $GL(n, \mathbb{C})$. Si B est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, on désignera par G_B le sous-groupe de G formé des éléments dont les coefficients sont dans B et le déterminant inversible dans B, c'est-à-dire $G_B = G \cap GL(n, B)$. Si B est un corps, G_B n'est autre que le groupe des éléments de G rationnels sur B.

En particulier, $G_{\mathbb{R}}$ est un groupe de Lie réel et $G_{\mathbb{Z}}$ en est un sous-groupe discret. On notera que si G est un groupe affine défini sur $\mathbb{Q}$ et f (resp. f') un isomorphisme rationnel sur $\mathbb{Q}$ de G sur un groupe linéaire, alors $f^{-1}(f(G)_{\mathbb{Z}})$ et $f'^{-1}(f'(G)_{\mathbb{Z}})$ sont commensurables (i. e. leur intersection est d'indice fini dans chacun d'eux) de telle sorte que les théorèmes énoncés ci-dessous sont encore vrais pour un groupe affine, le sous-groupe $G_{\mathbb{Z}}$ étant défini "à la commensurabilité près" par la méthode précédente.

Si G est un groupe algébrique (défini sur $\mathbb{Q}$), on notera $X(G)$ (resp. $X_{\mathbb{Q}}(G)$, resp. $\mathfrak{g}$, resp. G^u) le groupe des caractères de G (resp. le groupe des caractères de G rationnels sur $\mathbb{Q}$, resp. l'algèbre de Lie de G, resp. l'ensemble des éléments unipotents de G). Toutes les représentations linéaires envisagées seront des représentations à droite.

Les principaux résultats de [3] sont les théorèmes 1 à 3 ci-dessous.

THÉORÈME 1. - Soient G un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}$ et $f : G \to GL(V)$ une représentation linéaire rationnelle sur $\mathbb{Q}$. Soient Γ un réseau de $V_{\mathbb{Q}}$ (i. e. un sous-groupe de $V_{\mathbb{Q}}$ tel que l'application canonique $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to V_{\mathbb{Q}}$ soit bijective) invariant par $G_{\mathbb{Z}}$ et X une orbite fermée de G. Alors X est la réunion d'un nombre fini d'orbites de $G_{\mathbb{Z}}$.

COROLLAIRE. - *Soit* $f : G \to G'$ *une isogénie rationnelle sur* $\mathbb{Q}$ *de groupes linéaires. Alors* $f(G_{\mathbb{Z}})$ *et* $G'_{\mathbb{Z}}$ *sont commensurables.*

On se ramène aisément (cf. § 2) au cas où G est réductif connexe. On peut même supposer $f(G_{\mathbb{Z}}) \subset G'_{\mathbb{Z}}$. Si $G' \subset GL(m, \mathbb{C})$, faisons opérer G sur $\mathbb{M}(m, \mathbb{C})$ par translations à droite par l'intermédiaire de f. Alors $G'_{\mathbb{Z}}$ est l'intersection de l'orbite fermée G' de G et du réseau $\mathbb{M}(m, \mathbb{Z})$ invariant par $G_{\mathbb{Z}}$.

Définition. - Un *ouvert fondamental* du groupe linéaire connexe G défini sur $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble ouvert (pour la topologie ordinaire) U de $G_{\mathbb{R}}$ tel que :

(i) $G_{\mathbb{R}} = U.G_{\mathbb{Z}}$;

(ii) Il existe un sous-groupe compact maximal K de $G_{\mathbb{R}}$ tel que $K.U = U$;

(iii) Pour $x, y \in G_{\mathbb{Q}}$, l'intersection $U^{-1}.U \cap x.G_{\mathbb{Q}}.y$ est finie.

(L'interprétation d'un tel U dans l'espace symétrique $K \setminus G_{\mathbb{R}}$ est évidente.)

THÉORÈME 2. - *Tout groupe algébrique linéaire connexe* G *défini sur* $\mathbb{Q}$ *possède un ouvert fondamental* U. *Si* $X_{\mathbb{Q}}(G) = \{1\}$ (alors $G_{\mathbb{R}}$ est unimodulaire, cf. [8], chapitre 2), *l'ouvert* U *est de volume fini pour la mesure de Haar de* $G_{\mathbb{R}}$. *En particulier* $G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}$ *est de volume invariant fini. Si réciproquement* $G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}$ *est de volume fini, alors* $X_{\mathbb{Q}}(G) = \{1\}$.

COROLLAIRE. - *Le groupe* $G_{\mathbb{Z}}$ *est de type fini.*

Soit en effet $(G_{\mathbb{R}})^{o}$ la composante connexe du groupe de Lie $G_{\mathbb{R}}$. Alors les indices $[G_{\mathbb{R}} : (G_{\mathbb{R}})^{o}]$ et $[G_{\mathbb{Z}} : G_{\mathbb{Z}} \cap (G_{\mathbb{R}})^{o}]$ sont finis. D'après (iii), $U^{-1}.U \cap G_{\mathbb{Z}}$ est fini, et le corollaire résulte du lemme élémentaire suivant :

Si un groupe H opère sur un espace topologique connexe M et si U est un ouvert de M tel que $U.H = M$, le groupe H est engendré par les $h \in H$ tels que $U.h \cap U \neq \emptyset$.

THÉORÈME 3. - *Soit* G *un groupe algébrique linéaire connexe défini sur* $\mathbb{Q}$. *L'espace homogène* $G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}$ *est compact si et seulement si* $X_{\mathbb{Q}}(G) = \{1\}$ *et si* $G_{\mathbb{Q}} \cap G^{u}$ (ou, ce qui revient au même $G_{\mathbb{Z}} \cap G^{u}$) *est contenu dans le radical de* G.

Ces trois théorèmes se généralisent aisément au cas de groupes définis sur des corps de nombres algébriques, cf. [3]. Ils ont également une formulation adélique

([1]) ; notons $G_{\mathbb{A}}$ le groupe des points adéliques de G muni de la topologie habituelle (le sous-groupe $G^{o}_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{R}} \times (\prod G_{\mathbb{Z}_p})$ est ouvert).

THÉORÈME 4. – Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur $\mathbb{Q}$. Alors l'espace de classes doubles $G^{o}_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}}$ est fini. Pour que l'espace $G_{\mathbb{A}}/G_{\mathbb{Q}}$ soit de volume fini (resp. compact), il faut et il suffit que $X_{\mathbb{Q}}(G) = \{1\}$ (resp. $X_{\mathbb{Q}}(G) = \{1\}$ et $G_{\mathbb{Q}} \cap G^{u} \subset$ radical de G).

THÉORÈME 5. – Soient G un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}$ et $f : G \to GL(m, \mathbb{C})$ une représentation rationnelle sur $\mathbb{Q}$. Soit v un point de $\mathbb{Q}^{m}$ dont l'orbite sous $f(G)$ est fermée. Alors $v.f_{\mathbb{A}}(G_{\mathbb{A}}) \cap \mathbb{Q}^{m}$ est la réunion d'un nombre fini d'orbites de $G_{\mathbb{Q}}$.

On tire aisément du théorème 5 le théorème suivant :

THÉORÈME 6. – Soit G comme dans le théorème 5 ; alors les espaces homogènes principaux de G définis sur $\mathbb{Q}$ qui ont des points rationnels dans toutes les complétions de $\mathbb{Q}$ forment un nombre fini de classes d'isomorphisme.

Nous nous proposons de démontrer (approximativement) les théorèmes 2 et 3.

2. Préliminaires de géométrie algébrique.

On rappelle qu'un groupe algébrique linéaire connexe, défini sur un corps de caractéristique 0, est le produit semi-direct d'un sous-groupe réductif connexe par un sous-groupe invariant unipotent connexe, tous deux définis sur le corps de base du groupe. De même un groupe réductif connexe G est produit de son tore central $T = Z(G)^{o}$ et de son sous-groupe dérivé G' qui est semi-simple connexe. En outre, $X(G) \to X(T)$ et $X_{\mathbb{Q}}(G) \to X_{\mathbb{Q}}(T)$ sont injectifs et de conoyau fini.

Si N est un groupe unipotent défini sur $\mathbb{Q}$, l'espace homogène $N_{\mathbb{R}}/N_{\mathbb{Z}}$ est compact ; si N n'a pas d'élément unipotent rationnel autre que 1, alors $N = \{1\}$.

Si T est un tore défini sur $\mathbb{Q}$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- $T_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{Z}}$ est de volume fini,
- $T_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{Z}}$ est compact,
- $X_{\mathbb{Q}}(T) = \{1\}$.

Il résulte "élémentairement" des remarques précédentes qu'il suffit de démontrer les théorèmes 2 et 3 pour des groupes semi-simples, soit :

THÉORÈME 2 bis. - *Tout groupe algébrique linéaire semi-simple connexe défini sur* $\underset{\sim}{Q}$ *possède un ouvert fondamental de volume fini.*

THÉORÈME 3 bis ("conjecture de Godement"). - *Soit* G *un groupe algébrique linéaire semi-simple connexe défini sur* $\underset{\sim}{Q}$. *Pour que l'espace homogène* $G_{\underset{\sim}{R}}/G_{\underset{\sim}{Z}}$ *soit compact, il faut et il suffit que* G *n'ait pas d'élément unipotent rationnel autre que l'unité.*

Nous aurons besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - *Soit* G *un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur* $\underset{\sim}{Q}$. *Si* H *est un sous-groupe fermé de* G , *les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *Le groupe* H *est réductif et défini sur* $\underset{\sim}{Q}$;

(ii) *Il existe une représentation rationnelle sur* $\underset{\sim}{Q}$ *de* G *dans un espace vectoriel* V *et un point* $v \in V_{\underset{\sim}{Q}}$ *tels que l'orbite* $v.G$ *soit fermée et que le groupe d'isotropie de* v *soit* $\overline{H}$.

Celle-ci résulte des deux lemmes suivants :

LEMME 1 (caractéristique 0). - *Soient* G *un groupe algébrique linéaire réductif connexe et* H *un sous-groupe fermé de* G . *Le groupe* H *est réductif si et seulement si la variété* G/H *est affine.*

La démonstration de [3] est transcendante (cohomologie singulière) et démontre plus généralement que (avec $\underset{\sim}{C}$ comme corps de base), si G/H est une variété de Stein, alors H est réductif. Voir aussi la note ci-dessous.

LEMME 2 (caractéristique quelconque). - *Soient* G *un groupe algébrique affine connexe et* H *un sous-groupe fermé, tous deux définis sur* k . *Supposons* $H \backslash G$ *affine. Il existe une représentation rationnelle sur* k *de* G *dans un espace vectoriel* V *et un point* $v \in V_k$ *dont le groupe d'isotropie est* H *et dont l'orbite sous* G *est fermée.*

Soit A (resp. B) l'algèbre affine sur k de G (resp. $H \backslash G$). Alors $B \otimes \overline{k}$ est l'algèbre des invariants de $A \otimes \overline{k}$ dans la représentation régulière droite de G . Soient $b_1, \dots, b_s$ des générateurs de B , et P_i un sous-espace vectoriel de dimension finie de A contenant b_i tel que $P_i \otimes \overline{k}$ soit stable par G . Alors $V = \sum_i P_i \otimes \overline{k}$ et $v = (b_i)$ satisfont aux conditions exigées.

Note sur la proposition 1. – Sous la forme écrite ci-dessus, cette proposition est nécessaire dans la démonstration du théorème 1. Si on ne cherche à démontrer que les cas particuliers de ce théorème, nécessaires au corollaire sur les isogénies et à la démonstration des théorèmes 2 et 3, on s'aperçoit que l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est en fait la seule utilisée. A ce moment-là, le lemme 1 peut être remplacé par le résultat suivant :
En caractéristique 0 , si le groupe H semi-simple opère "bien" sur la variété affine G (par exemple comme sous-groupe fermé du groupe affine G) alors la variété quotient G/H est affine.

3. Décomposition d'Iwasawa et domaines de Siegel.

Soit G_1 le groupe $SL(n , \mathbb{C})$ considéré comme groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$. Soit K_1 (resp. A_1 , resp. N_1) le sous-groupe de $G_{1\mathbb{R}} = SL(n , \mathbb{R})$ formé des matrices orthogonales (resp. diagonales, resp. unipotentes supérieures). On a la décomposition d'Iwasawa "standard" :

$$G_{1\mathbb{R}} = K_1 . A_1 . N_1 \quad .$$

Si G est un sous-groupe algébrique semi-simple défini sur $\mathbb{R}$ de $GL(n , \mathbb{C})$, alors $G \subset G_1$, et MOSTOW (voir, par exemple, [6]) a montré qu'il existe $a \in G_{1\mathbb{R}}$ tel que $a.G_{\mathbb{R}}.a^{-1}$ soit stable par l'involution de Cartan $x \rightsquigarrow {}^t x^{-1}$ de $G_{1\mathbb{R}}$ autour de K_1 . Alors la restriction de cette involution à $a.G_{\mathbb{R}}.a^{-1}$ est une involution de Cartan de $a.G_{\mathbb{R}}.a^{-1}$, ce qui fait que $K_1 \cap a.G_{\mathbb{R}}.a^{-1}$ est un sous-groupe compact maximal de $a.G_{\mathbb{R}}.a^{-1}$.

On peut même raffiner un peu cette construction : on dira que le sous-groupe G de G_1 satisfait à la condition (a) si :

(a) $\left\{\right.$ en notant $K = K_1 \cap G_{\mathbb{R}}$; $A = A_1 \cap G_{\mathbb{R}}$; $N = N_1 \cap G_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{R}} = K.A.N$ est une décomposition d'Iwasawa de $G_{\mathbb{R}}$ et les restrictions à α des racines positives de α_1 sont positives (pour les ordres définis par N et N_1).

On a alors le

LEMME 3. – Soit G un sous-groupe algébrique semi-simple de G_1 . Il existe $a \in G_{1\mathbb{R}}$ tel que $a.G.a^{-1}$ satisfasse à la condition (a).

Démonstration (facile) dans [3].

Soit G un groupe algébrique semi-simple défini sur $\mathbb{R}$ et $G_{\mathbb{R}} = K.A.N$ une décomposition d'Iwasawa. Notons $\Sigma \subset \alpha^*$ l'ensemble des racines simples de $G_{\mathbb{R}}$ par rapport à A et $\log : A \to \alpha$ l'application inverse de l'application exponentielle.

<u>Définition</u>. – Un <u>domaine de Siegel</u> de G est un ensemble $\mathfrak{S} = K.A_t.\omega$, t réel positif, où ω est un sous-ensemble compact de N et où

$$A_t = \{a \in A\ ,\quad \alpha(\log a) \leqslant t\ ,\quad \alpha \in \Sigma\} \quad .$$

Les domaines de Siegel de G forment un ensemble filtrant croissant dont la limite est $G_{\mathbb{R}}$.

Dans la fin de ce paragraphe, nous étudierons certaines propriétés des domaines de Siegel de $G_1 = SL(n\ ,\ \mathbb{C})$ relativement à la décomposition "standard" introduite ci-dessus. Il est classique (réduction des formes quadratiques) qu'un domaine de Siegel suffisamment grand de G_1 satisfasse à $G_{1\mathbb{R}} = \mathfrak{S}_1.G_{1\mathbb{Z}}$. Un tel domaine de Siegel de G_1 sera appelé <u>standard</u>. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 2. – <u>L'intérieur d'un domaine de Siegel standard de</u> G_1 <u>est un ouvert fondamental de</u> G_1.

La condition (i) résulte de ce que l'intérieur d'un domaine de Siegel standard contient un domaine de Siegel standard. La condition (ii) est évidente. Quant à (iii), ce n'est autre que la traduction du classique théorème de Siegel, [7].

Le lemme suivant joue un rôle important dans la démonstration du théorème 2. Nous renvoyons à [3] pour la démonstration.

LEMME de finitude. – <u>Soit</u> $f : G_1 \to GL(m\ ,\ \mathbb{C})$ <u>une représentation rationnelle sur</u> $\mathbb{Q}$. <u>Soit</u> $v \in \mathbb{R}^m$ <u>un point dont l'orbite sous</u> $f(G_{1\mathbb{R}})$ <u>est fermée</u> (pour la topologie ordinaire) <u>et dont le groupe d'isotropie dans</u> $G_{1\mathbb{R}}$ <u>est stable par</u> $x \rightsquigarrow {}^t x$. <u>Soit</u> $\mathfrak{S}_1$ <u>un domaine de Siegel de</u> G_1 (pour la décomposition standard). <u>Alors</u> $v.f(\mathfrak{S}_1) \cap \mathbb{Z}^m$ <u>est fini</u>.

4. <u>Le volume fini. Démonstration du théorème</u> 2.

PROPOSITION 3. - Soient G un sous-groupe semi-simple connexe de G_1 défini sur $\underset{\sim}{Q}$ et $a \in G_{1\underset{\sim}{R}}$ tel que $a.G_{\underset{\sim}{R}}.a^{-1}$ soit stable par $x \rightsquigarrow {}^t x$. Soit $\mathfrak{S}_1$ un domaine de Siegel standard de G_1. Il existe un nombre fini d'éléments $b_1, \dots, b_m \in G_{1\underset{\sim}{Z}}$ tels que l'intérieur U de $\overline{U} = (\bigcup_{i=1}^{m} a^{-1}.\mathfrak{S}_1.b_i) \cap G_{\underset{\sim}{R}}$ soit un ouvert fondamental de G.

Les groupes G et G_1 étant réductifs connexes définis sur $\underset{\sim}{Q}$, on peut appliquer la proposition 1. On peut même s'arranger pour trouver une représentation $f : G_1 \to GL(r, \underset{\sim}{C})$ rationnelle sur $\underset{\sim}{Q}$ telle que $f(G_{1\underset{\sim}{Z}}) \subset SL(r, \underset{\sim}{Z})$ et $v \in \underset{\sim}{Z}^m$ tels que l'orbite $v.f(G_1)$ soit fermée et que le groupe d'isotropie de v soit H. On peut alors voir que $v.f(G_{1\underset{\sim}{R}})$ est fermée pour la topologie ordinaire. Soit $v' = v.f(a^{-1})$. L'orbite $v'.f(G_{1\underset{\sim}{R}}) = v.f(G_{1\underset{\sim}{R}})$ est fermée et le groupe d'isotropie de v' dans $G_{1\underset{\sim}{R}}$ est $a.G_{\underset{\sim}{R}}.a^{-1}$ stable par $x \rightsquigarrow {}^t x$. On peut alors appliquer le lemme de finitude et en déduire que $v.f(G_{1\underset{\sim}{Z}}) \cap v.f(a^{-1}.\mathfrak{S}_1)$ qui est contenu dans $\underset{\sim}{Z}^m \cap v'.f(\mathfrak{S}_1)$ est fini. Il existe donc des $b_1, \dots, b_m \in G_{1\underset{\sim}{Z}}$ tels que

$$v.f(G_{1\underset{\sim}{Z}}) \cap v.f(a^{-1}.\mathfrak{S}_1) = \{v.f(b_1^{-1}), \dots, v.f(b_m^{-1})\} \quad .$$

Soit alors

$$H = a.G_{\underset{\sim}{R}} = \{x \in G_{1\underset{\sim}{R}}^{\cdot}, \quad v.f(a^{-1}).f(x) = v\} \quad .$$

Soit $h \in H$; par la théorie de la réduction, on peut écrire $h = s.b$, $s \in \mathfrak{S}_1$, $b \in G_{1\underset{\sim}{Z}}$. Mais

$$v.f(a^{-1}).f(s) = v.f(b^{-1}) \quad ,$$

ce qui par le résultat précédent, montre que

$$v.f(b^{-1}) = f(b_i^{-1}) \quad ,$$

pour un certain i. On a alors

$$b_i^{-1}.b \in G \cap G_{1\underset{\sim}{Z}} = G_{\underset{\sim}{Z}} \quad ,$$

c'est-à-dire $b \in b_i.G_{\underset{\sim}{Z}}$, d'où

$$h = s.b \in \mathfrak{S}_1.b_i.G_{\underset{\sim}{Z}} \quad .$$

Si on note

$$\overline{U} = (\cup a^{-1}.\mathfrak{S}_1.b_i) \cap G_{\underset{\sim}{R}} \quad ,$$

on vient de démontrer que $H \subset a.\overline{U}.G_{\underset{\sim}{Z}}$, c'est-à-dire $G_{\underset{\sim}{R}} \subset \overline{U}.G_{\underset{\sim}{Z}}$.

Appliquant ce résultat à un domaine de Siegel standard contenu dans l'intérieur de $\mathfrak{S}_1$, on voit que $G_{\underset{\sim}{R}} = U.G_{\underset{\sim}{Z}}$, soit (i). D'autre part, $a.G_{\underset{\sim}{R}}.a^{-1} \cap K_1$ est un sous-groupe compact maximal de H, donc $K = a.^{-1}.(a.G_{\underset{\sim}{R}}.a^{-1} \cap K_1).a$ un sous-groupe compact maximal de $G_{\underset{\sim}{R}}$ qui vérifie (ii).

Démontrons (iii). Soient $x, y \in G_{\underset{\sim}{Q}}$ et $u \in U^{-1}.U \cap x.G_{\underset{\sim}{Z}}.y$. Il existe i et j tels que $u \in (a^{-1}.\mathfrak{S}_1.b_i)^{-1}.(a^{-1}.\mathfrak{S}_1.b_j)$, ce qui entraîne

$$b_i.u.b_j^{-1} \in \mathfrak{S}_1^{-1}.\mathfrak{S}_1 \cap b_i.x.G_{\underset{\sim}{Z}}.y.b_j^{-1}$$

qui est fini par le théorème de Siegel.

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> G <u>un sous-groupe semi-simple connexe de</u> G_1 <u>défini sur</u> $\underset{\sim}{Q}$ <u>satisfaisant à la condition (a) du § 3. Soient</u> $\mathfrak{S}_1$ <u>un domaine de Siegel de</u> G_1 <u>et</u> $x \in G_{1\underset{\sim}{R}}$. <u>Il existe un domaine de Seigel</u> $\mathfrak{S}$ <u>de</u> G <u>et un nombre fini d'éléments</u> $x_1, \ldots, x_q$ <u>de</u> $G_{\underset{\sim}{R}}$ <u>tels que</u>

$$\mathfrak{S}_1.x \cap G_{\underset{\sim}{R}} \subset \bigcup_{i=1}^{q} \mathfrak{S}.x_i \quad .$$

Reprenons les notations du § 3 et soit M_1^* le normalisateur de A_1 dans K_1. D'après le théorème de Bruhat, on peut écrire $x = a.u.m.v$; $a \in A_1$; $u, v \in N_1$; $m \in M_1^*$. Comme il existe un domaine de Siegel de G_1 contenant $\mathfrak{S}_1.a.u$, on peut se contenter de démontrer le théorème lorsque $x = m.v$. Remarquons de plus que si $n \in N$, alors

$$\mathfrak{S}_1.x.n \cap G_{\underset{\sim}{R}} = (\mathfrak{S}_1.x \cap G_{\underset{\sim}{R}}).n \quad .$$

La proposition résultera alors du

LEMME 4. - Soit M^* (resp. M) le normalisateur (resp. le centralisateur) de A dans K. Soient $x_i \in M^*$ des représentants du groupe de Weyl M^*/M de $G_{\underset{\sim}{R}}$. Il existe un sous-ensemble $N' \subset N_1$ tel que $N_1 = N'.N$ et que, si $x \in M_1^*.N'^{-}$ et si $\mathfrak{S}_1$ est un domaine de Siegel de G_1, il existe un domaine de Siegel $\mathfrak{S}$ de G tel que

$$\mathfrak{S}_1.x \cap G_{\underset{\sim}{R}} \subset \bigcup \mathfrak{S}.x_i \quad .$$

Ce lemme résulte des deux faits suivants :

1° Les domaines de la forme $K.a_o.A^{-}.\omega$ où $a_o \in A$, ω est un sous-ensemble compact de N et A^{-} l'exponentielle de la chambre de Weyl négative, forment un ensemble cofinal à l'ensemble des domaines de Siegel.

2° Le groupe de Weyl est transitif sur les chambres de Weyl.

Pour la démonstration, voir [3].

Démonstration du théorème 2 bis. - Soit G un sous-groupe semi-simple connexe de G_1 défini sur $\underset{\sim}{Q}$ et $a \in G_{1\underset{\sim}{R}}$ tel que $a.G.a^{-1}$ satisfasse à (a) [lemme 3]. L'existence d'un ouvert fondamental a été démontrée dans la proposition 3. Il ne reste plus qu'à prouver que celui-ci est de volume fini ; on doit donc voir que $a^{-1}.\mathfrak{S}_1.b_i \cap G_{\underset{\sim}{R}}$ est de volume fini dans $G_{\underset{\sim}{R}}$. Il suffit de voir que

$\mathfrak{S}_1.b_i.a^{-1} \cap a.G_{\underset{\sim}{R}}.a^{-1}$ est de volume fini dans $a.G_{\underset{\sim}{R}}.a^{-1}$, ce qui, vue la proposition 4, découlera du lemme suivant.

LEMME 5. - Soit G un groupe semi-simple défini sur R. Tout domaine de Siegel de G est de mesure finie dans $G_{\underset{\sim}{R}}$.

Si dg, dk, da, dn désignent les mesures de Haar de $G_{\underset{\sim}{R}}$, K, A, N et si s est la somme des racines positives de $G_{\underset{\sim}{R}}$ par rapport à A, on sait ([4], lemme 35), que

$$dg = \exp s(\log a)\, dk.da.dn \quad .$$

Il suffit donc de montrer que $\int_{A_t} \exp s(\log a)\, da$ est finie ; or ceci résulte de ce que les $\alpha(\log a)$, $\alpha \in \Sigma$ forment un système de coordonnées dans A , et que

$$s = \Sigma\, m_\alpha . \alpha \ , \quad m_\alpha > 0 \quad .$$

5. Conjecture de Godement. Démonstration du théorème 3.

LEMME 6. - *Soit* G *un groupe algébrique semi-simple défini sur* k ($k = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$). *Si* $x \in G_k$ (*resp.* $y \in g_k$), *la classe de conjugués de* x *dans* G_k (*resp.* $\mathrm{Ad}\, G(y)$) *est fermée* (pour la topologie ordinaire) *si et seulement si* x (*resp.* y) *est semi-simple.*

La démonstration de ce lemme, que l'on trouvera dans [3], utilise le théorème de Jacobson-Morosow.

On démontre aisément, d'autre part, le résultat suivant de topologie générale :

LEMME 7. - *Soit* G *un groupe localement compact opérant continuement à droite dans un espace topologique localement compact* M . *Soit* $m \in M$. *Si* H *est un sous-groupe fermé de* G *tel que* $m.H$ *soit fermé et* $H \backslash G$ *compact, alors* $m.G$ *est fermé.*

Soit alors G un groupe algébrique linéaire semi-simple défini sur $\mathbb{R}$. Soit H un sous-groupe *discret* de $G_{\mathbb{R}}$ tel que $H \backslash G_{\mathbb{R}}$ soit compact. Faisons opérer G sur lui-même par automorphismes intérieurs. Comme H est discret, toute classe de conjugués dans H est fermée ; les deux lemmes précédents montrent alors que tout élément de H est semi-simple, ce qui entraîne la nécessité de la condition de Godement.

Soit réciproquement G un groupe algébrique linéaire semi-simple connexe tel que tous les éléments de $G_{\mathbb{Q}}$ (ou de $g_{\mathbb{Q}}$) soient semi-simples. Nous voulons montrer que $G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}$ est compact. Dans la représentation adjointe de G , tous les points de $g_{\mathbb{Q}}$ ont des orbites fermées d'après le lemme 6. On peut, d'autre part, et toujours à l'aide du théorème de Jacobson-Morosow, démontrer que tout sous-groupe de G est réductif et satisfait aux conditions du théorème 3. Procédant par récurrence sur la dimension de G , il suffit de prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 5. - *Soit* G *un groupe linéaire algébrique semi-simple connexe défini sur* $\mathbb{Q}$. *Supposons que* $H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}}$ *soit compact pour tout sous-groupe algébrique* propre H de G. Supposons également qu'il existe une représentation linéaire rationnelle sur $\mathbb{Q}$ et de noyau fini $f : G \to GL(V)$ telle que tous les points de $V_{\mathbb{Q}}$ aient des orbites fermées. Alors $G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}$ est compact.

Comme f est complètement réductible, on peut en retirer la partie triviale et supposer que le groupe d'isotropie d'un point quelconque est distinct de G. La démonstration consiste alors à construire, à l'aide des hypothèses sur G uniquement, un compact $L \subset V$ (par le lemme de Minkowski) et un nombre fini de $v_i \in V_{\mathbb{Q}}$ (par le théorème des invariants) tels que si $g \in G_{\mathbb{R}}$, il existe i et $b \in G_{\mathbb{Z}}$ tels que $v_i . f(b.g) \in L$.

Si on note alors

$$X_i = \{g \in G_{\mathbb{R}} , \quad v_i . f(g) \in L\} \qquad ,$$

on a

$$G_{\mathbb{R}} = \bigcup_i G_{\mathbb{Z}} . X_i \qquad .$$

Si G_i est le groupe d'isotropie de v_i, G_i est défini sur $\mathbb{Q}$ et distinct de G ; il existe donc un compact $B_i \subset G_{\mathbb{R}}$ tel que $G_{i\mathbb{R}} = G_{i\mathbb{Z}} . B_i$. D'après un théorème de topologie des groupes (voir par exemple [5], p. 65), il existe d'autre part un compact $B'_i \subset G_{\mathbb{R}}$ tel que $X_i = G_{i\mathbb{R}} . B'_i$. On a alors

$$G_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{Z}} . (\bigcup_i B_i . B'_i) \qquad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.). - Some properties of adele groups attached to algebraic groups, Bull. Amer. math. Soc., t. 67, 1961, p. 583-585.

[2] BOREL (A.) and HARISH-CHANDRA. - Arithmetics subgroups of algebraic groups, Bull. Amer. math. Soc., t. 67, 1961, p. 579-583.

[3]. BOREL (A.) et HARISH-CHANDRA (à paraître).

[4] HARISH-CHANDRA. - Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 75, 1953, p. 185-243.

[5] MONTGOMERY (D.) and ZIPPIN (L.). - Topological transformation groups. - New York, London, Interscience Publishers, 1955 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 1).

[6] MOSTOW (G. D.). - Self-adjoint groups, Annals of Math., Series 2, t. 62, 1955, p. 44-55.

[7] SIEGEL (Carl Ludwig). - Einheiten quadratischer Formen, Abh. math. Sem. Univ. Hamb., t. 13, 1939, p. 209-239.

[8] WEIL (André). - Adeles and algebraic groups. Notes by M. Demazure and T. Ono. - Princeton, Institute for advanced Study, 1961.