Serge Lang

# Familles algébriques de jacobiennes

*Séminaire N. Bourbaki*, 1958, exp. nº 155, p. 255-263
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__255_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1957)

# FAMILLES ALGÉBRIQUES DE JACOBIENNES

par Serge LANG

(d'après J. IGUSA [3], [4], [5])

## 1. Systèmes fibrés de Jacobiennes.

Soient $V$ une variété algébrique et $f : V \rightarrow W$ une application rationnelle de $V$, génériquement surjective. Alors pour tout point générique $y$ de $W$, $f^{-1}(y)$ est un cycle générique dans une famille algébrique sur $V$, appelé <u>système fibré</u> (devrait-on dire folié?). Si $f$ est régulière, i.e. si le corps de fonctions de $V$ est une extension régulière de celui de $W$, alors $f^{-1}(y)$ est une variété $U_y$. On peut étudier $V$ au moyen de la tour à deux étages, consistant de $W$ et de $U_y$. En particulier, on peut aussi associer à $U_y$ sa variété d'Albanese $A_y$, et on obtient ainsi un système algébrique de variétés abéliennes.

Pour un point spécial $y$ de $W$, le cycle $f^{-1}(y)$ peut se dégénérer de diverses façons. L'un des buts d'IGUSA est de donner des théorèmes locaux et globaux sur ces fibres dégénérées, dans certains cas particuliers, à savoir, si $V$ est une surface non-singulière, et si $U_y$ est une courbe irréductible avec seulement un point double comme point singulier. En principe, la connaissance complète des $U_y$ pour tous les $y$ doit donner une analyse complète des groupes d'homologie de la surface. IGUSA n'a pas encore été jusqu'au bout de cette idée, et ses deux papiers, [3], [4], représentent seulement le début de ses investigations.

En vue des applications globales, il démontre l'existence d'un bon système fibré sur la surface non-singulière, à savoir un système de courbes $C_y = U_y$, telles que :

1. Toutes les $C_y$ sont irréductibles.
2. Toutes les $C_y$ sont non-singulières sauf un nombre fini.
3. Si une singularité apparaît, elle est un point double ordinaire.
4. Si $P$ est un point de base du système, i.e. un point commun à tous les $C_y$, alors deux membres du système se coupent transversalement en $P$ (et en particulier, $P$ est simple sur chaque $C_y$).

De plus, on peut construire le système sur un corps de définition donné de la surface, s'il est infini. On ne sait pas si on le peut sur un corps fini, ce cas étant d'ailleurs l'un des plus intéressants pour les applications. Donc jusqu'à présent, il faudrait étendre le corps de base un petit peu si on veut appliquer la théorie au calcul de nombre de points.

On est amené ainsi à considérer le comportement d'une réduction dégénérée dans le cas le plus simple, où $C_y$ possède un point double ordinaire. Ceci veut dire en particulier l'étude des points d'ordre fini. Pour cela, on travaille d'abord localement, la spécialisation étant supposée faite relativement à un corps de séries de puissances (et en principe à n'importe quel corps complet). Si on adjoint les points d'ordre fini au corps de base, on peut former le module de représentations $\ell$-adiques, et l'on obtient ainsi une représentation du groupe (topologique à la Krull) de Galois de cette extension. Ce groupe correspond dans le cas classique à la complétion $\ell$-adique du groupe local de monodromie du système fibré. Par ce moyen, IGUSA espère arriver à algébriser la théorie topologique et transcendante qui ne l'a pas été encore jusqu'ici. Par exemple, il dit que cela reproduit la théorie des fonctions normales de Poincaré (cf. LEFSCHETZ [9], Ch. 6, 7), mais cela dépasse le rédacteur.

## 2. Variétés de Picard.

Commençons par rappeler la définition d'une variété de Picard et d'Albanese. Soit $V$ une variété définie sur un corps $k$. Un couple $(A, \varphi)$, formé d'une variété abélienne et d'une application rationnelle $\varphi: V \to A$, est dit variété d'Albanese s'il satisfait à la propriété d'application universelle pour les applications de $V$ dans les variétés abéliennes, et si de plus $\varphi(V)$ engendre $A$.

Compte tenu de canulars dûs au manque de points rationnels de $V$ dans $k$, si l'on veut $A$ et $\varphi$ définies sur $k$, il faut considérer les espaces principaux homogènes. On montre alors qu'il existe une $k$-variété d'Albanese, qui reste une $k'$-variété d'Albanese si $k'$ est séparable sur $k$ et en tous cas ne peut changer que par une isogénie purement inséparable.

Supposons $V$ complète, non-singulière. Une <u>variété de Picard de $V$ définie sur</u> $k$ est un couple $(B, D)$ formé d'une variété abélienne $B$ et d'un diviseur sur $V \times B$ tels que :

(P 1). L'application $w \to Cl[{}^tD(w + z) - {}^tD(z)]$ soit un isomorphisme (abstrait) de $B$ sur le groupe de Picard $D_a(V)/D_\ell(V)$ de $V$.

(P 2). Si dans une classe du groupe de Picard il existe un diviseur rationnel sur un corps $K \supset k$ , alors son point qui lui correspond dans $B$ par l'isomorphisme de 1.) est rationnel sur $k$ .

On démontre alors l'unicité de $B$ à un isomorphisme birationnel près, et de $D$ à des composantes dégénérées près. Enfin, pour l'existence, si $f : V \rightarrow A$ est une application canonique de $V$ dans sa variété d'Albanese, définie sur $k$ , et si $(\hat{A}, D)$ est une variété de Picard de $A$ définie sur $k$ , alors $(\hat{A}, E)$ est une variété de Picard de $V$ si $E = D \circ f$ est le diviseur composé.

Pour tout ceci, voir [6] .

La définition qui précède donne la variété de Picard et d'Albanese à des isomorphismes birationnels près, mais pour traiter un grand nombre de questions, cela n'est pas suffisant. Il faut plus de structure. En particulier, si $V$ fait partie d'un système algébrique de variétés, et dépend intégralement des paramètres, il faudrait savoir que sa variété de Picard et d'Albanese font aussi partie d'un système algébrique, et dépendent également intégralement de ces mêmes paramètres. Par exemple, on peut faire les conjectures suivantes (à ma connaissance, pas encore démontrées) :

Si $V \rightarrow V'$ est une spécialisation, avec $V$ , $V'$ projectives, non-singulières, alors l'irrégularité de $V$ est la même que celle de $V'$ (c'est-à-dire la dimension de $Alb(V)$ ), et les variétés de Picard et d'Albanese de $V'$ s'obtiennent en spécialisant celles de $V$ . Tout ceci devrait d'ailleurs être exprimé en termes de cycles sur des produits.

La présence de la structure projective n'est pas un accident. On sait que pour avoir certains théorèmes satisfaisants, elle intervient déjà de façon essentielle, par exemple pour étudier le groupe des automorphismes de $V$ (transformations birationnelles biholomorphes).

La construction de Weil, et la dernière de Chow, sont birationnelles, c'est-à-dire qu'on a aucun espoir d'y retrouver le théorème de compatibilité. D'autre part, celle de Matsusaka qui ressemble à la construction de Chow donnée pour les courbes s'en rapproche déjà plus. Faisons donc quelques commentaires sur ce qu'on a dans ce cas.

Soit $F$ une famille maximale et totale de diviseurs, sur la variété projective $V$ , qu'on suppose sans singularités de codimension 1. Par <u>totale</u>, on veut dire que pour tout diviseur $X$ dans $D_a(V)$ , il existe deux diviseurs $X_1$ , $X_2$ dans $F$

tels que $X \sim X_1 - X_2$ . On obtient de cette façon une paramétrisation du groupe de Picard. La famille $F$ (identifiée à la variété des points de Chow de ses membres) est alors un système fibré sur sa variété d'Albanese $B$ , qui devient la variété de Picard de $V$ .

Malheureusement, ni dans la construction de Chow pour les courbes, ni dans celle de Matsusaka, on n'introduit explicitement un diviseur sur $V \times F$ et par quotient sur $V \times B$ . Si on introduit un tel diviseur $D$ , on voit alors que la correspondance

$$h'_D : (w_1, w_2) \to Cl[{}^tD(w_1) - {}^tD(w_2)]$$

avec $w_1, w_2 \in F$ induit précisement l'isomorphisme birationnel $\lambda'_D : B \to \mathrm{Pic}(V)$ . (Pour les notations, nous suivons [6], dont BOURBAKI possède quelques exemplaires).

En outre, d'après la théorie des correspondances, l'application directe

$$\lambda_D : \mathrm{Alb}(V) \to \mathrm{Pic}(F)$$

est également un isomorphisme birationnel.

Supposons maintenant qu'on cherche à étendre ces résultats aux Jacobiennes généralisées de courbes, et éventuellement aux variétés de Picard et Albanese généralisées. Tout d'abord, TATE propose la définition suivante des groupes de Picard généralisés. On prend un ensemble fini de points simples sur la variété $V$ . Dans chaque classe d'équivalence linéaire, on peut trouver un diviseur qui ne contienne aucun de ces points. On considère les fonctions définies en ces points, et y prenant la valeur 1 (éventuellement avec un ordre de grandeur donné au moyen d'un conducteur dans leurs anneaux locaux), et on prend le groupe facteur des diviseurs algébriquement équivalents à 0 ne passant par aucun de ces points, modulo le groupe des diviseurs de ces fonctions. Il conviendrait alors de montrer que ces groupes de Picard généralisés admettent une structure de variétés de Picard généralisées, à savoir qu'il existe une variété de groupe commutatif $G$ et un diviseur sur le produit $V \times G$ tels que les conditions (P 1) , (P 2) ci-dessus soient satisfaites, mais bien entendu $Cl$ signifiera maintenant les classes au sens restreint.

Il faut autant que possible travailler avec des variétés non complètes, car on voudrait maintenant appliquer la théorie des correspondances à $D$ sur $V \times G$ . Si $\mathfrak{a}$ est un cycle de degré 0 sur $V$ , étranger à un diviseur convenable, on peut prendre $D(\mathfrak{a})$ sur $G$ , et prendre son point sur la variété de Picard généralisée de $G$ . On trouvera alors l'application canonique de $V$ dans une variété d'Albanese généralisée.

Enfin, remarquons que l'on peut travailler avec les familles de Chow, et que pour une variété de Picard généralisée, on devrait pouvoir trouver aussi une famille de Chow totale relativement au nouveau groupe de Picard. Pour les courbes, c'est bien ce que fait IGUSA. On prend $d > 2g - 2$ où $g$ est le genre arithmétique, et on considère n'importe quelle famille de cycles positifs de degré $d$. Elle est totale pour la relation d'équivalence avec laquelle on a commencé.

De nouveau, l'avantage de ces familles totales est qu'elles se construisent canoniquement à partir de $V$, les constructions n'introduisant pas de dénominateurs.

## 3. Spécialisations de Jacobiennes.

Enonçons maintenant quelques résultats précis sur la spécialisation de Jacobiennes.

THÉORÈME 1. - Soient $C$ une courbe projective non-singulière, et $\varphi : C \to J$ une application canonique de $C$ dans sa Jacobienne, construite à la manière de Chow pour une famille totale donnée (dans ce cas, déterminée par un entier $d$). Soit $C \to C'$ une spécialisation de $C$, telle que $C'$ soit également non-singulière. Alors $(\varphi, J)$ a une spécialisation uniquement déterminée $(\varphi', J')$ prolongeant $C \to C'$, qui est la Jacobienne de $C'$.

Bien entendu, la spécialisation $\varphi'$ de $\varphi$ se définit comme étant celle de son graphe.

Signalons que dans le théorème 1, il y a unicité, et qu'un résultat analogue s'énonce pour les variétés abéliennes (voir [2]).

Le cas qui intéresse IGUSA particulièrement est celui où $C'$ est encore irréductible, et admet comme seule singularité un point double ordinaire.

THÉORÈME 2. - Supposons $C$ projective non-singulière. Soit $C \to C'$ une spécialisation telle que $C'$ n'ait qu'un point double ordinaire. Alors $J$ a une spécialisation uniquement déterminée $J'$ prolongeant $C \to C'$, et $J'$ est la Zariski-fermeture de la Jacobienne généralisée de $C'$.

Remarquons ici qu'IGUSA a démontré l'invariance du genre arithmétique par spécialisation. On peut donc espérer que l'énoncé ci-dessus reste valable sans hypothèses sur les singularités de $C'$.

Comme nous l'avons déjà dit, la possibilité de démontrer ces principes de compatibilité dépend de la construction explicite et projective de Chow. On voit donc que les méthodes projectives vont plus loin que les méthodes biholomorphes en ce moment. Il n'est cependant pas à exclure que l'on puisse éventuellement remplacer celles-ci par celles-là, dans les énoncés qui ne font pas intervenir de structure projective (c'est bien le cas du théorème 1). Tout ça est encore dans un état assez confus.

Nous allons préciser le résultat précédent, particulièrement pour les points d'ordre fini. IGUSA semble ne le faire que dans le cas global, $C$ étant générique dans un système fibré sur une surface, mais ça devrait marcher en général. Plus précisement, on suppose $C$ , $J$ , $\varphi$ définis sur un corps $k$ , muni d'une valuation discrète, dont la place applique $k$ sur le corps des restes $k'$ . Toutes les spécialisations qui suivent prolongent $k \to k'$ , $C \to C'$ et $J \to J'$ . On suppose également qu'on a choisi des origines convenables sur $J$ et $J'$ , et que $\varphi$ , $\varphi'$ sont normalisées.

a. Soit $J'_o$ le sous-ensemble ouvert de $J'$ formé des points simples de $J'$ . Alors $J'_o$ est précisement la Jacobienne généralisée de $C'$ .

b. Soit $T'_o$ le graphe de l'application $n\delta'$ , $n$ étant premier à la caractéristique, et $\delta'$ étant l'identité de $J'_o$ . Soit $T'_1$ la Zariski-fermeture de $T'_o$ dans $J' \times J'$. Alors la spécialisation $T'$ de $T$ est de type

$$T' = T'_1 + T^*$$

où $T^*$ est un cycle positif dans le produit de l'espace projectif où $J'$ est plongé avec lui-même, et la projection de chaque composante de $T^*$ sur le premier facteur est singulière sur $J'$ .

c. Soit $\eta$ le cycle $(n\delta)^{-1}(0)$ sur $J$ , c'est-à-dire le cycle rationnel sur $k$ formé des points d'ordre $n$ . Soit $\eta'_1$ le cycle rationnel sur $k'$ formé des points d'ordre $n$ sur $J'$ . Alors la spécialisation $\eta'$ de $\eta$ est de type

$$\eta' = \eta'_1 + \eta^*$$

et tous les points de $\eta^*$ sont multiples sur $J'$ .

Vu l'hypothèse que $C'$ n'a qu'un point singulier, qui est un point double ordinaire, on voit facilement que les points d'ordre $n$ sur $J'$ forment un groupe d'ordre $n^{2g-1}$ , alors que l'ordre du groupe semblable sur $J$ est d'ordre $n^{2g}$ . Remarquons que la spécialisation $\eta'$ est bien déterminée, mais que sans hypothèse restrictive sur la place $k \to k'$ , on ne peut pas déterminer quels sont ceux des points de $\eta$ qui s'en vont sur des points singuliers par spécialisation.

Pour aller plus loin, nous supposons donc que $k$ est complet sous la valuation, ou probablement plus simplement, que la place n'admet qu'une seule extension à la clôture algébrique de $k$, et que $k'$ est algébriquement clos.

Les points de $\mathfrak{n}_1'$ sont alors rationnels sur $k'$, et l'on montre facilement que les points de $\mathfrak{n}$ qui s'envoient sur ceux de $\mathfrak{n}'$ sont rationnels sur $k$. On a donc déterminé un sous-groupe d'ordre $n^{2g-1}$ des points d'ordre $n$ sur $J$, qu'on appelle le groupe des points invariants (à savoir par le groupe de Galois de la clôture séparable de $k$ sur $k$). Désignons ce groupe par $I(n)$. Il contient le sous-groupe $I^*(n)$ d'ordre $n$ des points qui se projettent sur $0$ sur la Jacobienne de $C'$. En effet, on sait que $J'$ est une extension de la vraie Jacobienne de $C'$ par le groupe multiplicatif, ce dernier possédant exactement $n$ points d'ordre $n$. On a alors le théorème fondamental suivant.

THÉORÈME 3. – Soient $x$, $y$ deux points d'ordre $n$ sur $J$, conjugués par rapport à $k$. Alors il existe un point $a$ de $I^*(n)$ tel que $x = y + a$.

Autrement dit, le groupe de Galois de $k(x)$ sur $k$ est homomorphe au groupe $I^*(n)$. Je n'ai pas été capable de comprendre la démonstration, qui occupe trois pages, sans paragraphe.

4. Dualité.

Soient $V$, $W$ deux variétés complètes non-singulières. Soient $\alpha : V \to A$ et $\beta : W \to B$ leurs applications canoniques dans leur variété d'Albanese. Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux cycles de dimension 0 et degré 0 sur $V$, $W$ respectivement, tels que $S(\alpha(\mathfrak{a})) = 0$ et $S(\beta(\mathfrak{b})) = 0$. Soit $D$ un diviseur sur $V \times W$ ne contenant aucun des points de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Alors $D(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = {}^tD(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$.

Ce dernier symbole se définit comme suit. On sait que $D(\mathfrak{a})$ est le diviseur d'une fonction $f$ sur $W$, et $f$ est définie en tout point de $\mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{b} = \sum n_i(b_i)$, on pose $D(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{b}) = \prod f(b_i)^{n_i}$.

Pour la démonstration, voir [6]. On la fait d'abord pour les variétés abéliennes, et ensuite pour $V \times W$, par pull-back.

En particulier, dans le cas qui nous intéresse, on peut prendre la diagonale sur $C \times C$, et le noyau d'Albanese est formé précisement des diviseurs de fonctions.

On peut alors définir une dualité entre les points d'ordre $n$ sur $\mathrm{Alb}(V)$ et $\mathrm{Alb}(W)$. Considérons seulement le cas des courbes.

Supposons que $n\mathfrak{a} \sim 0$, $n\mathfrak{b} \sim 0$, et posons $(f) = n\mathfrak{a}$ et $(h) = n\mathfrak{b}$. Supposons que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ne possèdent aucun point en commun. Alors $e_n(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h(\mathfrak{a})/f(\mathfrak{b})$ est une racine $n$-ième de l'unité, qui ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Si $a$, $b$ sont les points associés à $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ dans $J$, on peut donc l'écrire $e_n(a\ , \ b)$.

THÉORÈME 4. - Soient $I(n)$ et $I^*(n)$ les groupes de points définis au numéro précédent. Si $a \in I_n(n)$ et $b \in I_n^*(n)$ on a : $e_n(a\ , \ b) = 0$.

DÉMONSTRATION. - Il faut d'abord représenter $a$, $b$ par des cycles $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ convenables, et tels que par spécialisation, aucun des points de $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ne s'envoient sur le point singulier de $C'$. Si $n\,\mathfrak{a} = (f)$ et $n\mathfrak{b} = (h)$, alors $n\mathfrak{a}' = (f')$ et $n\mathfrak{b}' = (h')$. Mais par hypothèse, $b'$ est dans $I^*(n)$, et par conséquent sa projection sur la vraie Jacobienne est égale à $0$. Ceci veut dire que $\mathfrak{b}'$ est le diviseur d'une fonction $\varphi'$ sur $C'$ (ou sur la normalisée de $C'$). Notre racine de l'unité est invariante par spécialisation, et donc

$$e_n(a\ , \ b) = h'(\mathfrak{a}')/f'(\mathfrak{b}') = \varphi'((f'))/f'((\varphi')) = 1 .$$

On voit donc que $I(n)$ et $I^*(n)$ sont orthogonaux. On sait d'ailleurs que $e_n(a\ , \ b)$ est une forme bilinéaire, anti-symétrique, non-dégénérée sur les points d'ordre $n$ de $J$.

## 5. Passage à la limite.

Soit $T_\ell(J)$ le groupe de Tate associé à $J$, c'est-à-dire le groupe des vecteurs

$$(a_1\ , \ a_2\ , \ \dots\ )$$

dont les composantes sont des points de $J$ tels que $\ell a_1 = 0$, $\ell a_i = a_{i-1}$. C'est un module libre sur les entiers $\ell$-adiques $Z_\ell$, de rang $2g$. Soit $K$ l'extension de $k$ obtenue en adjoignant tous les points d'ordre une puissance de $\ell^\nu$ à $k$, et soit $G$ son groupe de Galois. On peut alors représenter $G$ dans $T_\ell(J)$.

THÉORÈME 5. - Il existe une base de $T_\ell(J)$ sur $Z_\ell$ telle que tout élément $\sigma$ de $G$ soit représenté par une matrice de type

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c(\sigma) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & [\mathrm{id}] \end{pmatrix}$$

id. désignant l'identité, de degré $2g-2$ .

DÉMONSTRATION. - C'est évident à partir de la dualité du théorème 4 et du théorème 3.

On obtient ainsi un isomorphisme (algébrique et topologique) de $G$ dans $Z_\ell$.

Dans le cas où $C$ est un membre générique d'un système fibré sur une surface non-singulière, IGUSA dit que cet isomorphisme est surjectif en caractéristique 0 , et promet la démonstration dans un futur papier. Si la caractéristique n'est pas 0 , on obtient un invariant local, à savoir la plus petite puissance de $\ell$ qui apparaisse comme image. Je ne vois pas très bien à quoi ces invariants lui serviront, ni ce qu'IGUSA a dans la tête, mais ça ne fait pas de doute qu'ils doivent jouer un rôle important dans l'étude du groupe de monodromie local.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOW (Wei-Lang). - The jacobian variety of an algebraic curve, Amer. J. Math., t. 76, 1954, p. 453-476.

[2] CHOW (W. L.) and LANG (S.). - On the birational equivalence of curves under specialization, Amer. J. Math., t. 79, 1957, p. 649-652.

[3] IGUSA (Jun-Ichi). - Fibre systems of jacobian varieties, I., Amer. J. Math., t. 78, 1956, p. 171-199.

[4] IGUSA (Jun-Ichi). - Fibre systems of jacobian varieties, II : Local monodromy groups of fibre systems, Amer. J. Math., t. 78, 1956, p. 745-760.

[5] IGUSA (Jun-Ichi). - Monodromy groups connected with algebraic surfaces (à paraître).

[6] LANG (Serge). - Abelian varieties. - New York, Interscience, à paraître en 1958.

[7] MATSUSAKA (Teruhisa). - On the algebraic construction of the Picard variety, Jap. J. Math., t. 21, 1951, p. 217-235 et t. 22, 1952, p. 51-62.

[8] ROSENLICHT (Maxwell). - Generalized jacobian varieties, Annals of Math., Series 2, t. 59, 1954, p. 505-530.

[9] ZARISKI (Oscar). - Algebraic surfaces. - New York, Chelsea, 1948 (Ergebnisse der Mathematik... Dritter Band, n° 5).