GUSTAVE CHOQUET

Les travaux de Nash et Kuiper sur le plongement isométrique des C^1-variétés riemanniennes dans l'espace euclidien

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 147, p. 139-149
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__139_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1957)

LES TRAVAUX DE NASH ET KUIPER SUR LE PLONGEMENT ISOMÉTRIQUE DES C^1-VARIÉTÉS RIEMANNIENNES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN,

par Gustave CHOQUET.

1. Introduction.

Il s'agira ici du plongement isométrique, dans un espace euclidien R^N, de variétés différentiables munies d'une métrique riemannienne. Lorsqu'il s'agit d'une variété X_n à n dimensions, k fois différentiable, munie d'une métrique elle-même régulière d'ordre k, et qu'on impose au plongement d'être k fois différentiable, on sait que si $k \geq 3$, l'espace R^N doit avoir une dimension très élevée (les meilleures bornes connues sont actuellement $N = \frac{n}{2}(3n+11)$ pour une variété compacte, $\frac{n}{2}(n+1)(3n+11)$ pour une variété non compacte, d'après NASH [3]).

Par contre nous verrons que les plongements C^1 sont possibles dans des espaces de dimension inespérément faible. Il est immédiat que l'on doit avoir $N \geq n+1$ s'il s'agit d'une variété qui ne soit pas localement euclidienne ; il est étonnant que $N = n+1$ suffise, du moins localement.

Les méthodes et les résultats sont essentiellement dus à John NASH (1954) ; toutefois la méthode de Nash exigeait $N \geq n+2$. En 1955, le jeune hollandais Nicolas KUIPER, reprenant une suggestion de NASH, établit qu'il suffisait de $N \geq n+1$, donnant ainsi un résultat définitif.

Nous verrons que pour des applications isométriques C^0, on pourrait même se contenter de $N \geq n$.

2. Définitions.

Nous supposons connue la définition d'une variété C^1-différentiable à n dimensions ; une telle variété X_n est dite une C^1-variété riemannienne si elle est munie d'une métrique C^0 de Riemann par la donnée d'une forme quadratique $g_{ij}(x)\, dx_i dx_j$ dont les $g_{ij}(x)$ sont des fonctions continues (sans plus) des coordonnées locales (x_i). Une telle variété pourra être compacte ou non (dans ce dernier cas, elle est forcément dénombrable à l'infini puisque connexe, métrisable et localement compacte). Nous supposerons ces variétés sans bords, le cas des variétés avec bords pouvant se ramener, par exemple, au cas des variétés non compactes sans bord.

Une C^1-immersion de X_n dans R^N est une application f de X_n qui est C^1 et à différentielles non dégénérées. La métrique de $f(X_n)$ est donnée par la forme quadratique sur X_n : $h_{ij}\, dx_i dx_j$, où $h_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

On dit que f est <u>isométrique</u> si $h_{ij} = g_{ij}$; on dit que f est <u>courte</u> si $(g_{ij} - h_{ij})\, dx_i dx_j$ est une forme définie positive, autrement dit si :

$$(g_{ij} - h_{ij})\, dx_i dx_j \geqslant \ell(x)(g_{ij} dx_i dx_j) \qquad \text{où} \qquad \ell > 0 .$$

Une immersion f est dite un <u>plongement</u> si l'application f de X_n sur $f(X_n)$ est une homéomorphie.

3. Enoncé des principaux théorèmes.

THÉORÈME 1.- <u>Soit</u> X_n <u>une</u> C^1<u>-variété riemannienne compacte ; soit</u> f <u>un</u> C^1<u>-plongement</u> court <u>de</u> X_n <u>dans</u> R^N $(N \geqslant n+1)$. <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un</u> C^1<u>-plongement isométrique</u> g <u>de</u> X_n <u>dans</u> R^N <u>tel que</u> $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ <u>pour tout</u> $x \in X_n$.

On pourrait même imposer une condition supplémentaire à g , portant sur les éléments de contact de $f(X_n)$ et $g(X_n)$ aux points homologues (voir fin de la démonstration).

On aurait un énoncé analogue en remplaçant le mot "plongement" par "immersion".

Cet énoncé est encore valable pour les variétés à bord.

COROLLAIRE 1.- <u>Si une</u> C^1<u>-variété riemannienne compacte</u> X_n <u>a un</u> C^1<u>-plongement dans</u> R^N <u>où</u> $N \geqslant n+1$ (ce qui est toujours réalisé si $N = 2n$), <u>elle a aussi un</u> C^1<u>-plongement isométrique dans le même espace</u>.

EXEMPLES :

1. Tout tore T^n localement euclidien (produit cartésien de n cercles) admet un C^1-plongement isométrique dans R^{n+1} .

2. Dans R^3 , soit K un tore de révolution ordinaire ; il existe, arbitrairement voisines de K , des surfaces à plans tangents continus, isométriques à des tores T^2 localement euclidiens.

3. Dans R^3 , soit E un ellipsoïde contenant la sphère-unité $\rho = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une surface d'équation polaire $\rho = \rho(\theta, \varphi)$ (avec ρ'_θ et ρ'_φ continues et $1 \leq \rho \leqslant 1+\varepsilon$) qui soit C^1-isométrique à E . On peut même imposer à ρ'_θ et ρ'_φ d'être bornés indépendamment de ε .

4. Dans R^3 , soit Σ une surface d'équation $z = g(x , y)$ (où (x , y) appartient à un rectangle) avec f'_x et f'_y continues. Il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une surface Σ' d'équation $z = h(x, y)$ avec $\|g - h\| < \varepsilon$, et telle que Σ' soit isométrique à un carré plan ; on peut même imposer à Σ' de ne contenir aucun

segment de droite (pour cette dernière restriction, appliquer le théorème 1 plusieurs fois, puis passer à la limite convenablement).

Cette surface Σ' est à rapprocher du "mouchoir chiffonné" que LEBESGUE proposait comme exemple de surface développable non réglée ; elle montre que pour établir le théorème : "Toute surface développable est réglée", il ne suffit pas de supposer que la surface soit C^1 .

5. Pour toute C^1-variété riemannienne X_n , tout point de X_n a un voisinage qui admet un C^1-plongement isométrique dans R^{n+1} .

THÉORÈME 2 [1] (qui englobe le théorème 1).- Soit X_n une C^1-variété riemannienne localement compacte ; soit f un C^1-plongement court de X_n dans R^N $(N \geq n+1)$. Pour toute fonction numérique continue $\varepsilon(x) > 0$ définie dans X_n , il existe un C^1-plongement isométrique g de X_n dans R^n tel que $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x)$ pour tout $x \in X_n$.

Ici encore on pourrait remplacer le mot "plongement" par "immersion". Le théorème est valable aussi pour les variétés à bord.

Notons que si on choisit $\varepsilon(x)$ tel que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to$ frontière de X_n , le plongement g aura les mêmes points-limites que f ; par exemple $g(X_n)$ sera fermé si $f(X_n)$ l'est.

COROLLAIRE 2.- Si une C^1-variété riemannienne localement compacte X_n a un C^1-plongement dans R^N où $N \geq n$ (ce qui est réalisé pour $N = 2n$) , elle admet un C^1-plongement isométrique dans R^{N+1} .

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 2 et du lemme 1 .

LEMME 1.- Si une C^1-variété a un C^1-plongement dans R^N , elle admet un C^1-plongement court dans R^{N+1} .

EXEMPLE.- Le plan hyperbolique H^2 de la géométrie non-euclidienne admet un plongement court naturel dans R^2 . Il en résulte qu'il existe dans R^3 des surfaces isométriques à H^2 et de la forme $z = f(x, y)$ avec f'_x , f'_y continues ; on peut même imposer que f soit borné et $\to 0$ à l'∞ .

REMARQUE.- Les théorèmes 1 et 2 s'étendent immédiatement à des plongements dans une C^1-variété riemannienne quelconque à N dimensions (qui joue le rôle de R^N).

Plongement d'une variété X_n dans R^n .- Nous avons annoncé qu'en un certain sens on pouvait plonger isométriquement un X_n dans R^n ; voici l'énoncé précis :

---

[1] NASH et KUIPER énoncent un théorème analogue seulement dans le cas où f est C^∞ ; or le théorème bien connu de WHITNEY permet de ramener immédiatement le cas où f est C^1 au cas où f est C^∞ .

Nous dirons qu'une application continue f d'une C^1-variété riemannienne X dans une autre Y est <u>isométrique</u> si, pour toute courbe paramétrée rectifiable γ de X, la courbe paramétrée $f(\gamma)$ a même longueur que γ.

THÉORÈME 3.- <u>Soit X_n une C^1-variété riemannienne compacte, soit f une C^1-immersion</u> courte <u>de X_n dans R^n. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue isométrique g de X_n dans R^n telle que $\|f(x) - g(x)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in X_n$.</u>

On a un énoncé analogue pour les variétés non compactes et les immersions dans des variétés à n-dimensions autres que R^n.

L'application isométrique g dont le théorème affirme l'existence ne peut évidemment être localement biunivoque que si X_n est localement euclidienne ; elle n'est pas non plus différentiable en général (elle est lipschitzienne, évidemment).

EXEMPLE.- Toute sphère de R^3 peut être appliquée isométriquement dans un plan.

4. Idées directrices.

On part d'une immersion <u>courte</u> f de la variété X_n dans R^N et on essaie d'étirer la variété $f(X_n)$ pour augmenter son ds^2 ; on fait cet étirement localement, par petits morceaux homéomorphes à des pavés euclidiens ; d'autre part dans chacun de ces petits morceaux, l'étirement est une superposition finie d'étirements plus simples dont chacun n'augmente le ds^2 que dans une seule direction : ces étirements seront dit élémentaires.

Les méthodes de Nash et Kuiper diffèrent par le choix des étirements élémentaires : celui de Nash se fait en spirale, celui de Kuiper en sinusoïde. Par exemple, l'étirement de Nash remplace une droite par une hélice ayant cette droite comme axe ; il exige donc que l'espace R^N ait au moins deux dimensions de plus que la variété à dilater ; l'étirement de Kuiper remplace une droite par une courbe plane de genre sinusoïdal ayant cette droite comme axe ; c'est pourquoi il suffit que $N \geqslant n+1$; mais cette amélioration est compensée par une complication plus grande de l'appareil analytique.

Nous utiliserons ici dans ses grandes lignes l'étirement de Kuiper, que nous appellerons <u>plissement</u> ; toutefois un choix convenable de ce plissement et des coordonnées locales sur X_n nous permettra de simplifier son exposé.

5. Etude du plissement dans un cas simple.

1. Soit $y = k \sin x$ l'équation d'une sinusoïde plane dans R^2 ; soit $r(k) = \pi^{-1}\int_0^{\pi}(1 + k^2\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ le rapport de la longueur d'une arche de la courbe

à sa corde ; r est une fonction analytique strictement croissante de k, qui varie de 1 à l'∞ pour $0 \leq k < \infty$.

Pour les sinusoïdes homothétiques $y = k\lambda \sin \frac{x}{\lambda}$, le résultat reste le même.

Soit alors $k(x)$ une fonction continue ≥ 0, nulle hors d'un compact de R, et à dérivée continue.

La courbe Γ d'équation $y = k(x)\lambda \sin \frac{x}{\lambda}$ est, lorsque λ est très petit, une sorte de sinusoïde dont l'amplitude est variable.

Soit $\ell(\lambda, a, b)$ = longueur de l'arc de Γ de base $[a, b]$. Un calcul simple montre que $\ell(\lambda, a, b)/(b-a)$ tend uniformément (quand $\lambda \longrightarrow 0$) vers $\int_a^b r(k(x))\,dx$. Donc le taux local d'étirement au point x quand on remplace la droite $y = 0$ par la courbe Γ est, pour λ petit, voisin de $r(k(x))$.

2. On peut faire subir un plissement analogue au plan. Dans R^3, soit Σ la surface d'équation cartésienne $z = k(x, y)\lambda \sin(\frac{x}{\lambda})$, où k est une fonction continue ≥ 0, nulle hors d'un compact de R^2, et continuement différentiable. Pour tout $(x, y) \in R^2$, lorsque λ est petit, la surface Σ réalise autour de (x, y) un étirement appréciable du plan $z = 0$ dans une seule direction ; dans cette direction, le taux moyen d'étirement des longueurs est encore $r(k(x, y))$ [Σ ressemble à une tôle ondulée dont les ondulations ont partout la même période, mais des amplitudes variables].

3. Comme une C^1-variété se comporte localement comme une variété affine, on conçoit qu'on puisse lui appliquer le même procédé de plissement qu'à un plan.

Pour disposer d'un langage commode, nous allons modifier la présentation de l'exemple de la sinusoïde.

Posons

$$\ell(u, k) = \int_0^u (1 + k^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

Puis

$$\begin{cases} X = x + \varphi(x, k) \quad , \quad \text{où} \quad \ell(X, k) = r(k)x \\ Y = k \sin X = k \sin(x + \varphi(x, k)) \end{cases}$$

On vérifie que φ est une fonction analytique périodique de x, de période π.

L'application $x \rightarrow (X, Y)$ de la droite $y = 0$ sur la sinusoïde est telle que $dX^2 + dY^2 = (r(k))^2\,dx^2$, ce qui s'exprime encore par :

(1) $$(1 + \varphi'_x)^2(1 + k^2\cos^2 X) = r^2(k) \quad ;$$

elle réalise donc une dilatation uniforme de l'axe des x dans le rapport $r(k)$.

Il en est de même de l'application $x \to (X, Y)$ lorsque l'on pose :

$$(2) \qquad X = x + \lambda\,\varphi\left(\frac{x}{\lambda}, k\right) \qquad ; \qquad Y = \lambda\, k \sin\left(\frac{X}{\lambda}\right)$$

Si, dans les formules (2), on remplace formellement k par la fonction $k(x)$ introduite précédemment, on vérifie que pour cette nouvelle transformation, le rapport $(dX^2 + dY^2)/dx^2$ tend uniformément vers $r(k(x))^2$ lorsque $\lambda \to 0$; cette remarque va permettre d'étendre la notion de plissement élémentaire à toute immersion.

<u>Plissement élémentaire d'une C^∞-immersion de R^n dans R^N</u> $(N \geq n+1)$.

Soit f une C^∞-immersion d'un ouvert Ω de R^n dans R^N . La métrique de $f(\Omega)$ est définie par $ds^2 = g_{ij}dx_i dx_j$, où $g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}$. On veut remplacer f par une immersion voisine $\bar{f}$ telle que $(d\bar{s})^2 - ds^2 = h(x)\, dx_1^2 + \varepsilon(x)\, ds^2$, où h est une fonction donnée ≥ 0 de classe C^∞ , et où $|\varepsilon(x)| < \varepsilon$ donné.

Soit $k(x)$ une fonction numérique de classe C^∞ , nulle hors d'un compact, définie dans Ω .

Soit $\xi_1(x)$ le vecteur de longueur 1 de R^N défini par $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = h\, \xi_1(x)$, $(h > 0)$; et soit $\eta_1(x)$ un vecteur unitaire normal à $f(\Omega)$ au point $f(x)$, choisi de telle sorte que $\eta_1(x)$ soit C^∞ (ce qui est automatiquement réalisé si $N = n+1$, mais toujours réalisable dans le cas général).

On pose alors :

$$\bar{f}(x) = f(x) + \lambda\,\varphi\left(\frac{x_1}{\lambda}, k(x)\right) h\, \xi_1 + \lambda\, k(x) \sin \Big[\overbrace{\frac{x_1}{\lambda} + \varphi\left(\frac{x_1}{\lambda}, k(x)\right)}^{A}\Big]\, h\, \eta_1 \quad .$$

Cette application $\bar{f}$ est C^∞ ; et si λ est assez petit, elle a tous les caractères éventuels de régularité de f (le fait d'être un plongement, le fait que $f(\Omega)$ soit fermé, etc.).

On vérifie que :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + O(\lambda) \qquad \text{pour } i \neq 1 \;.$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varphi'_x\left(\frac{x_1}{\lambda}, k(x)\right) h\, \xi_1 + k(x)(1 + \varphi'_x)(\cos A)\, h\, \eta_1 + O(\lambda) \quad .$$

Faisons maintenant l'hypothèse (par la suite, on s'arrangera toujours pour la vérifier par un choix convenable de coordonnées locales) que $\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ pour tout $i \neq 1$, c'est-à-dire que les courbes $x_i = C^{te}$ $(i \neq 1)$ sont orthogonales aux variétés $x_1 = C^{te}$.

On a alors :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + O(\lambda) \qquad \text{sauf si} \quad i = j = 1 .$$

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (1 + \varphi'_x)^2 \left[1 + k^2(x) \cos^2 A\right] + O(\lambda)$$

ou, d'après la relation (1) :

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 r^2(k(x)) + O(\lambda)$$

On a donc :

$$(\bar{g}_{ij} - g_{ij})\, dx_i dx_j = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (r^2 - 1)\, dx_1^2 + O(\lambda)\,(g_{ij}dx_i dx_j) \quad .$$

Or il est immédiat, puisque r est une fonction strictement croissante de k, qu'il existe une fonction $k(x)$ du type cherché, telle que :

$$h(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \left[r^2(k(x)) - 1\right]$$

Donc on réalise bien le plissement cherché, à εds^2 près, dès que λ est assez petit.

6. Les étapes de la construction.

Nous allons démontrer le théorème 2, dont se déduisent les autres. Soit X_n une C^1-variété riemannienne localement compacte ; soit f un C^1-plongement court de X_n dans R^N ; en utilisant les résultats de WHITNEY, on peut remplacer la structure C^1 de X_n par une structure C^∞ compatible ; puis remplacer le C^1-plongement f par un C^∞-plongement g tel que f et g, ainsi que leurs différentielles premières, soient arbitrairement voisins en un sens connu ; f étant un plongement court, g le sera alors aussi. Nous supposerons donc par la suite que f est C^∞.

Soient $d\sigma^2$ et ds^2 les formes quadratiques fondamentales de X_n et $f(X_n)$; par hypothèse $(d\sigma^2 - ds^2)$ est partout une forme quadratique définie positive.

On sait qu'il existe des partitions C^∞ de l'unité sur X_n, subordonnées à un recouvrement ouvert donné de X_n : $1 = \sum \varphi_n$; nous aurons à les utiliser ; il est immédiat, puisque X_n est de dimension finie que l'on peut toujours supposer que tout $x \in X_n$ appartient à au plus P supports $S\,\varphi_n$ (P entier ne dépendant que de n).

D'autre part, soit M le cône ouvert des matrices définies positives (g_{ij}) ; il existe un recouvrement localement fini de M par des simplexes ouverts contenus dans M ; associons à toute matrice (g_{ij}) qui soit un sommet d'un tel simplexe une décomposition de cette matrice en un nombre fini de matrices positives de rang 1.

Soit alors S un des simplexes du recouvrement ; tout point m de S a dans S des coordonnées barycentriques qui sont des fonctions analytiques de m ; les décompositions associées aux sommets de S permettent donc d'écrire pour tout $m \in S$: $m = g_{ij}(m)\, u_i u_j = \sum \alpha_k(m)\, (\sum_i a_{i,k}\, u_i)^2$ ($k \in K$ fini), les $a_{i,k}$ étant des constantes, et les α_k des fonctions analytiques de m .

Rapprochons ce résultat et l'existence des partitions de l'unité; on obtient aisément le résultat suivant:

Soit (ω_α) un recouvrement ouvert localement fini de X_n , tel que tout ω_α soit borné et muni de coordonnées locales (u_i). Pour toute forme quadratique $d\tau^2$ sur X_n , il existe une partition de ce $d\tau^2$ en une somme $\sum_\ell \beta_\ell(x)\, (\sum_i a_{i,\ell} du_i)^2$, où les $a_{i,\ell}$ sont des constantes, et les β_ℓ des fonctions numériques $C^\infty \geqslant 0$ dont chacune a son support contenu dans un ω_α .

On peut toujours supposer, compte tenu de ce que X_n et M sont de dimension finie, qu'on a choisi les ω_α, les simplexes de M, et les décompositions de leurs sommets en formes de rang 1, de telle sorte que tout $x \in X_n$ appartienne au support d'au plus P fonctions β_ℓ (P entier fonction de n et N).

<u>1er stade</u>.- La métrique de X_n est donnée par d ^{2} dont les coefficients sont des fonctions continues sans plus; il est de même de $d\tau^2 = d\sigma^2 - ds^2$. Il existe evidemment une forme $d\bar{\tau}^2$ à coefficients C^∞ telle que $(d\tau^2 - d\bar{\tau}^2)$ soit encore définie positive, avec $d\tau^2 - d\bar{\tau}^2 \leqslant \frac{d\sigma^2}{20}$

Nous allons essayer de construire f^1 telle que sa première forme fondamentale vaille approximativement $(ds^2 + d\bar{\tau}^2)$, à $\varepsilon d\sigma^2$ près (ε donné).

On peut écrire: $d\bar{\tau}^2 = \sum_\ell \beta_\ell(x)\, (\sum_i a_{i\ell}\, du_i)^2$.

Les indices ℓ formant un ensemble dénombrables, on supposera que ce sont les entiers 1, 2 ... .

Le 1er stade va se décomposer en plissements élémentaires <u>successifs</u>:

<u>1er plissement élémentaire</u> - On applique le plissement élémentaire décrit plus haut à l'application f et à la forme $\beta_1(x)\, (\sum a_{i,1}\, du_i)^2$.

Un changement de coordonnées locales ramène d'abord à la forme $\beta_1\, dx_1^2$. Puis, pour respecter l'hypothèse que nous avions utilisée:

on fait temporairement un second changement de coordonnées locales : pour cela, on détermine les courbes trajectoires orthogonales dans R^N des surfaces images des plans $x_1 = C^{te}$; et on prend les nouvelles coordonnées locales (x'_i) sur X_n, telles $x'_1 = x_1$ et telles que les images des droites $x'_i = C^{te}$ $(i \neq 1)$ soient ces trajectoires orthogonales ; ce choix est possible d'une infinité de façons si $n > 2$, et d'une seule facon si $n = 2$.

On peut désormais choisir le paramètre λ qui fixe la finesse du plissement, assez petit pour que la nouvelle C^{∞}-application f_1 définisse un ds_1^2 tel que (avec les notations initiales) :

$$\left| ds_1^2 - ds^2 - \beta_1^2 \left(\sum_i a_{i,1}\, du_i \right)^2 \right| < \frac{\varepsilon}{p}\, d\sigma^2$$

<u>p-ième plissement élémentaire</u>.- f_{p-1} étant défini, f_p est un plissement de f_{p-1} associé à la forme $\beta_p\left(\sum_i a_{i,p} du_i \right)^2$, tel que son ds_p^2 vérifie :

$$\left| ds_p^2 - ds_{p-1}^2 - \beta_p^2 \left(\sum_i a_{i,p}\, du_i \right)^2 \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{p}\, d\sigma^2$$

Pour faire ce plissement, on doit évidemment, grâce à un changement temporaire de coordonnées locales, se ramener au cas où l'hypothèse d'orthogonalité nécessaire est satisfaite.

A cause du choix des β_n, tout compact de X_n n'est intéressé que par un nombre fini de ces plissements ; la limite f^1 des f_p est donc atteinte sur tout compact à partir d'un certain p_0 ; elle possède donc les propriétés cherchées.

Notons que, pour chaque plissement élémentaire, le paramètre de plissement λ peut être choisi assez petit pour que, finalement, $|f^1(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon(x)}{2}$, où $\varepsilon(x)$ est la fonction continue > 0 arbitraire donnée sur X_n dans l'énoncé du théorème 2.

<u>n-ième stade</u>.- Après le 1er stade, si l'on a pris $\varepsilon = \frac{1}{20}$, on a maintenant :

$$0 < d\sigma^2 - (\text{le } ds^2 \text{ de } f^1) \leqslant \frac{d\sigma^2}{10} .$$

Or, f^1 possède les mêmes propriétés que f ; on peut donc définir à partir de f^1 une application f^2, etc., et plus généralement une application f^n telle que $0 < d\sigma^2 - (\text{le } ds^2 \text{ de } f^n) \leqslant \frac{d\sigma^2}{10^n}$. On peut en outre, quand f^{n-1} est connu, choisir f^n telle que :

$$\| f^n(x) - f^{n-1}(x) \| \leqslant \frac{\varepsilon(x)}{2^n} .$$

Donc les applications f^n convergent uniformément (prendre $\varepsilon(x)$ borné). Soit g leur limite ; on peut montrer que, si dans chacun des plissements élémentaires de chacun des stades, le paramètre λ a été pris assez petit, g est C^1, g est un plongement si f l'est, etc. . Démontrons la moins évidente de ces affirmations, à savoir que g est C^1 .

Des formules qui donnent $(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i})$ après un plissement, on déduit que :

$$(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}) = O(\lambda) \qquad \text{pour } i \neq 1$$

$$(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}) = O(\lambda) + O[\varphi'_x(\frac{x_1}{\lambda}, k(x))] + O(k(x))$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Pour $i \neq 1$ on a, pour λ assez petit $\|\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\| < \varepsilon$.
D'autre part, un calcul élémentaire montre que $\varphi'_x(\frac{x_1}{\lambda}, k) = O(k^2)$; on a donc :

$$\|\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\| = O(\lambda) + O(k(x)) \quad .$$

Or les conditions $|d\sigma^2 - \text{le } ds^2 \text{ de } f^n| < \frac{d\sigma^2}{10^n}$ entraînent pour les $k_n(x)$ correspondantes une majoration de la forme $k_n^2(x) = O(10^{-n})$.

On peut donc obtenir aisément la convergence uniforme des $\frac{\partial f^n}{\partial x_i}$; donc g est continuement différentiable ; la différentielle première de g est non dégénérée parce que la forme fondamentale associée à g est $d\sigma^2$ qui est de rang n .

Passage d'un C^1-plongement de X_n dans R^n à un C^1-plongement isométrique dans R^N ou R^{N+1} .

Nous voulons démontrer les corollaires des théorèmes 1 et 2 .

Le corollaire 1 est immédiat ; car si X_n est compacte et si f est une C^1-application de X_n de R^N , le quotient (ds^2 de $f(X_n))/(ds^2$ de X_n) est borné ; donc pour un $\theta > 0$ assez petit, θf est un plongement court dans R^N et le théorème 1 s'applique, d'où le corollaire.

Pour démontrer le corollaire 2 , il suffit de démontrer le lemme 1 correspondant ; ce sera une conséquence du prélemme général suivant :

LEMME 2.- Soit F un ensemble fermé de R^N ; soit φ une fonction numérique > 0 définie et continue dans $\complement F$.

Il existe une fonction numérique $\delta(x) > 0$ définie et analytique dans $\complement F$ et telle que l'homéomorphie $x \rightarrow \overline{x} = (\delta(x)\, x\, ,\ \delta(x))$ de $\complement F$ dans $R^N \times R$ soit telle que $\|d\overline{x}\| \leq \|dx\|/2\, \varphi(x)$ pour tout x .