JEAN-PIERRE SERRE

Critère de rationalité pour les surfaces algébriques

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 146, p. 125-138
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__125_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1957)

CRITÈRE DE RATIONALITÉ POUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES

par Jean-Pierre SERRE

(d'après un cours de K. KODAIRA (Princeton, Novembre 1956)).

1. *Définitions.*

Dans tout ce qui suit, V désignera une *surface algébrique*, *projective*, *non singulière*, définie sur un corps k algébriquement clos. Des résultats complets ne seront obtenus que lorsque k est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, mais nous indiquerons au fur et à mesure ce qui reste valable en caractéristique $p > 0$.

Par une *courbe* sur V, on entendra toujours une courbe irréductible. Un *diviseur* est un élément du groupe libre engendré par les courbes ; on dit qu'il est $\geqslant 0$ si tous ses coefficients sont $\geqslant 0$. Si f est une fonction rationnelle non identiquement nulle, on sait définir le diviseur des zéros $(f)_0$ et le diviseur des pôles $(f)_\infty$ de f ; on pose $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ et l'on dit que deux diviseurs D et D' sont *équivalents* s'il existe une fonction f telle que $D - D' = (f)$. On notera $|D|$ l'ensemble des diviseurs positifs équivalents à D, et $L(D)$ l'espace vectoriel des fonctions f telles que $(f) \geqslant - D$; c'est un espace de dimension finie dont l'espace projectif associé est $|D|$; on posera

$$\ell(D) = \dim L(D) .$$

On notera K le diviseur d'une différentielle de degré 2 de V ; la classe d'équivalence de K ne dépend pas de la différentielle choisie, c'est la *classe canonique* de V. Pour tout entier n, on posera :

(1) $$P_n = \ell(nK) .$$

Les P_n sont appelés les *plurigenres* de V.

PROPOSITION 1. - *Soient V et V' deux surfaces, et soit $f : V \rightarrow V'$ une application rationnelle telle que l'extension $k(V)/k(V')$ soit séparable de degré fini. On a alors $P_n(V') \leqslant P_n(V)$ pour tout $n \geqslant 0$.*

Soit S l'ensemble des points où f n'est pas régulière ; c'est un ensemble fini. Tout élément $\omega \in L(n\,K(V'))$ peut être considéré comme une "forme différentielle de degré 2 et de poids n", soit $\omega = \varphi(dx \wedge dy)^n$, régulière sur V'. L'image réciproque de ω par f, soit $f^*(\omega)$, est alors bien définie ; c'est une différentielle sur V, régulière sur $V - S$, donc sur V tout entière (l'ensemble des pôles d'une différentielle étant une réunion de courbes). De plus, la condition de séparabilité assure que $f^*(\omega) \neq 0$, si $\varphi \neq 0$, d'où la proposition.

COROLLAIRE. - <u>Pour</u> $n \geqslant 0$, <u>les</u> P_n <u>sont des invariants birationnels de la surface</u> V.

(Par contre, il n'en est pas de même des P_n, $n < 0$, comme le montrent des exemples simples).

Un autre invariant important de V est <u>son genre arithmétique</u> p_a (cf. [8], pour sa définition). Rappelons que l'on a :

$$p_a = - h^{0,1} + h^{0,2}\text{ , avec } h^{p,q} = \dim H^q(V\,,\,\Omega^p) \tag{2}$$

Ω^p désignant comme d'habitude le faisceau des formes différentielles de degré p (cf. [9]).

PROPOSITION 2. - <u>Le genre arithmétique</u> p_a <u>est un invariabt birationnel de la surface</u> V.

Lorsque $k = \mathbb{C}$, c'est très simple à vérifier : on a alors la formule de symétrie $h^{p,q} = h^{q,p}$ qui permet d'écrire $p_a = h^{2,0} - h^{1,0}$, i.e.

$$p_a = p_g - q \quad\text{avec}\quad p_g = P_1 = h^{2,0}\ ,\quad q = h^{1,0}\ , \tag{3}$$

et le raisonnement de la proposition 1 montre que q, comme p_g, est invariant birationnel.

En caractéristique $p > 0$, l'invariance de p_a résulte de [6], complété par [1].

REMARQUE. - Il est facile d'étendre la proposition 1 aux variétés de dimension quelconque, en prenant pour "plurigenres" la dimension de l'espace des sections d'un fibré déduit du fibré tangent par une opération tensorielle <u>covariante</u> (d'où la condition $n \geqslant 0$). Il en est de même de la proposition 2, tout au moins lorsque $k = \mathbb{C}$; on ignore ce qu'il en est en caractéristique $p > 0$.

2. Enoncé du théorème.

C'est le suivant :

THÉORÈME 1. - Pour que V soit rationnelle (i.e., birationnellement équivalente au plan projectif), il faut et il suffit que l'on ait $p_a = P_2 = 0$.

(Ici on doit supposer que $k = \mathbf{C}$).

La condition est nécessaire. En effet, il est clair que $p_a = 0$ pour un plan projectif, donc aussi pour toute surface rationnelle d'après la proposition 2 ; d'autre part, le diviseur canonique d'un plan projectif est égal à $-3E$, où E désigne un hyperplan ; on a donc $P_n = 0$ pour tout $n > 0$, et le corollaire à la proposition 1 montre qu'il en est de même pour toute surface rationnelle.

Le reste de l'exposé sera consacré à la démonstration de la suffisance des conditions $p_a = P_2 = 0$. Cette démonstration est due, en principe, à CASTELNUOVO ; elle a été mise au point par K. KODAIRA dans son cours de Princeton ; nous suivons l'exposé de KODAIRA de très près.

Signalons un corollaire du théorème 1 :

THÉORÈME 2. - Toute surface unirationnelle est rationnelle.

(On dit qu'une surface V est unirationnelle s'il existe une surface rationnelle V' et une application rationnelle génériquement surjective $f : V' \to V$).

En effet, la proposition 1 montre que l'on a $P_n(V) \leq P_n(V') = 0$ pour tout $n > 0$, et l'on a de même $q(V) \leq q(V') = 0$; d'après (3), il en résulte bien que $p_a(V) = 0$, d'où le résultat.

Le théorème 2 est l'analogue à deux dimensions du théorème de Lüroth pour les courbes ; il peut, comme ce dernier, s'énoncer (mais non se démontrer) purement en termes de corps :

Si K/k est une extension transcendante pure de $k = \mathbf{C}$, de degré de transcendance 2, tout sous-corps L de K, contenant k, et tel que : $[L : K] < +\infty$, est aussi une extension transcendante pure de k.

Signalons enfin :

a. que le théorème 2 ne s'étend pas aux variétés de dimension ≥ 3 (ENRIQUES).

b. que, dans le théorème 1, on en peut pas remplacer la condition $P_2 = 0$ par $P_1 = 0$: il y a contre-exemples dus à ENRIQUES et GODEAUX. Par contre, il se pourrait que $P_1 = 0$ et $\pi_1(V) = 0$ suffisent.

c. que l'on n'a aucune idée sur les invariants qui peuvent caractériser les variétés rationnelles de dimension $\geqslant 3$.

3. Théorème de Riemann-Roch.

Comme ce théorème va jouer un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 1 , nous allons en rappeler brièvement l'énoncé.

Introduisons d'abord une notation : soient Δ et Δ' deux classes de diviseurs, et soient D et D' deux diviseurs les représentant. On peut toujours supposer que D et D' n'ont aucune composante en commun, auquel cas leur intersection (en tant que cycles) est bien définie ; c'est un cycle de degré 0 dont le degré sera noté $D.D'$. On constate facilement qu'il ne dépend que des classes Δ et Δ' , ce qui permet de le noter $\Delta.\Delta'$ (c'est le "nombre de points d'intersection" de Δ et de Δ'). Si maintenant D et D' sont des diviseurs quelconques, on notera $D.D'$ le nombre de points d'intersection de leurs classes. On notera que si C et C' sont des courbes distinctes, on a $C.C' \geqslant 0$, mais que l'on peut avoir $C^2 = C.C < 0$. Nous poserons :

$$\pi(D) = \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{2} K.D + 1 \quad , \tag{4}$$

on démontre que c'est un entier, le genre virtuel de D (cf. [8] et [9] , ainsi que [3]). Lorsque C est une courbe non singulière, $\pi(C)$ est le genre de C , au sens usuel ; lorsque C est une courbe à singularités, c'est son genre au sens de ROSENLICHT [7] , c'est-à-dire la dimension de $H^1(C , \mathcal{O}_C)$.

THÉORÈME 3. (Inégalité de Riemann-Roch). - *Pour tout diviseur* D , *on a* :

$$\ell(D) \geqslant \frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{2} K.D + 1 + p_a - \ell(K - D) . \tag{5}$$

Pour la démonstration, voir [3] (dans le cas $k = \mathbb{C}$), ainsi que [8] et [9] (pour une caractéristique quelconque).

Notons un corollaire de (5), que l'on obtient en remarquant que

$$\ell(- D) = 0 \quad \text{si } D > 0 \ :$$

$$\ell(K + D) \geqslant \pi(D) + p_a \quad \text{si } D > 0 \ . \tag{6}$$

4. Démonstration du théorème 1 : réduction du problème.

Elle est basée sur le résultat suivant :

PROPOSITION 3. - S'il existe, sur une surface V, une courbe C telle que $\pi(C) = 0$ et $\ell(C) \geqslant 2$, la surface V est rationnelle.

D'après la théorie de Rosenlicht, on a $\pi(C) = g(C) + \delta$, où g est le genre de la courbe normalisée de C, et où δ est un entier dépendant des singularités de C. Si l'on a $\pi(C) = 0$, on en déduit donc $g(C) = \delta = 0$, ce qui montre que C est une courbe non singulière de genre zéro.

D'après la condition $\ell(C) \geqslant 2$, il existe dans $L(C)$ une fonction f non constante ; du fait que C est irréductible, on a alors

(7) $$C = (f)_{\infty}\text{, diviseur des pôles de } f .$$

On peut considérer f comme une application rationnelle de V dans la droite projective Λ. Si λ désigne un point générique de Λ, le diviseur $f^{-1}(\lambda) = C_{\lambda}$ est bien défini ; il coïncide d'ailleurs avec le diviseur noté au n° 1 $(f - \lambda)_0$. Du fait que C est spécialisation de C_{λ} pour $\lambda \rightarrow \infty$, le diviseur C_{λ} est une courbe, et, puisque $C_{\lambda} - C = (f - \lambda)$, on a $\pi(C_{\lambda}) = \pi(C) = 0$. Donc C_{λ} est une courbe de genre zéro, définie sur le corps $E = k(\lambda)$. Le corps $F = E(C)$ des fonctions sur C rationnelles sur E n'est autre que le corps des fonctions rationnelles sur V ; si l'on montre F/E est une extension transcendante pure, il en résultera bien que V est rationnelle. On est donc ramené à prouver le lemme suivant :

LEMME. - Soit k un corps algébriquement clos, soit E un corps de fonctions algébriques d'une variable sur k, et soit F un corps de fonctions algébriques d'une variable sur E, qui soit de genre zéro. Alors F est extension transcendante pure de E.

D'après la théorie générale des courbes de genre 0 (voir [2] par exemple), on a $F = E(x , y)$, où x et y vérifient une équation du second degré :

$$\varphi(x , y) = 0 ,$$

et tout revient à trouver un point rationnel sur cette conique, c'est-à-dire des éléments $x , y \in E$ vérifiant l'équation précédente. C'est effectivement possible, en vertu du théorème de Tsen, suivant lequel le corps E est quasi-algébriquement clos (cf. [5], pour plus de détails).

REMARQUES.

1° La proposition précédente est due à M. NOETHER (dans le cas classique).

2° Lorsque V est une surface vérifiant $p_a = P_2 = 0$, les conditions $\pi(C) = 0$, $\ell(C) \geqslant 2$ peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\pi(C) = 0 \,, \quad C^2 \geqslant 0 \,. \tag{8}$$

En effet, on remarque d'abord que $P_2 = 0$ entraîne $P_1 = 0$ (de façon générale, il est clair que $\ell(nD) = 0$ entraîne $\ell(D) = 0$). Ceci s'écrit $\ell(K) = 0$, d'où :

$$\ell(K - D) = 0 \qquad \text{pour tout } D \geqslant 0 \,. \tag{9}$$

La formule (5) peut alors s'écrire :

$$\ell(D) \geqslant \frac{1}{2} D^2 - \frac{1}{2} K.D + 1 = D^2 - \pi(D) + 2 \qquad \text{pour } D \geqslant 0 \,, \tag{10}$$

et si $\pi(D) = 0$, $D^2 \geqslant 0$, on en déduit bien $\ell(D) \geqslant 2$.

5. Démonstration du théorème 1 : seconde réduction.

On dit qu'une courbe C est une courbe exceptionnelle de première espèce si l'on a :

$$\pi(C) = 0 \quad \text{et} \quad C^2 = -1 \,. \tag{11}$$

PROPOSITION 4. - Toute surface est birationnellement équivalente à une surface n'ayant aucune courbe exceptionnelle de première espèce.

On montre d'abord que, si C est une courbe exceptionnelle de première espèce, il existe une surface V' et un point $P \in V'$, tels que V soit isomorphe à la transformée quadratique $Q_P(V')$, la courbe C correspondant au point P ; c'est là un résultat classique, dont on trouvera une démonstration, par exemple, dans KODAIRA [4] , p. 44 (la démonstration de KODAIRA est rédigée en termes "analytiques", mais se transcrit tout de suite en caractéristique $p > 0$). Si V' a encore des courbes exceptionnelles de première espèce, on recommence. Cette suite d'opérations s'arrête ; en effet, dans le cas classique, on voit tout de suite que le second nombre de Betti décroit chaque fois d'une unité : en caractéristique $p > 0$, on peut montrer qu'il en est de même de $h^{1,1}$, ou bien encore, on peut invoquer le théorème de la base de Néron-Severi.

A partir de maintenant V désignera une surface vérifiant les conditions $p_a = P_2 = 0$, et ne possédant aucune courbe exceptionnelle de première espèce. On se propose de montrer qu'il existe sur V une courbe C vérifiant $\pi(C) = 0$ et $C^2 \geqslant 0$.

6. Démonstration du théorème 1 lorsque $K^2 = 0$.

La formule (10) donne alors $\ell(-K) \geqslant 1$. Soit donc $D \in |-K|$. On a $D \neq 0$, car sinon on aurait $P_2 = \ell(2K) = \ell(0) = 1$. Soit E une section hyperplane de V; on supposera que $\ell(E - D) > 0$, c'est toujours possible, quitte à remplacer E par un de ses multiples. Comme $E.K = - E.D < 0$, on a $(E + mK).E < 0$ pour m grand, d'où $\ell(E + mK) = 0$. Il est donc possible de choisir un $n \geqslant 1$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l}\ell(E + nK) \geqslant 1 \\ \ell(E + (n+1)K) = 0 .\end{array}\right. \tag{12}$$

Soit $D' \in |E + nK|$, et décomposons D' en $\sum a_s C_s$, les C_s étant des courbes, et les a_s des entiers > 0. On a :

$$K.D' = K.(E + nK) = K.E < 0 , \tag{13}$$

ce qui montre que l'un des $K.C_s$, soit $K.C_1$, est < 0. Posons $C = C_1$. On a $C \leqslant D'$, d'où :

$$\ell(K. + C) \leqslant \ell(K + D') = \ell(E + (n+1)K) = 0 , \tag{14}$$

d'où, d'après (6), $\pi(C) = 0$. Mais, d'après (4), $\pi(C) = 0$ implique :

$$K.C + C^2 = - 2 . \tag{15}$$

Comme $K.C < 0$, ceci entraîne $C^2 \geqslant - 1$. Mais on ne peut pas avoir $C^2 = - 1$ car C serait une courbe exceptionnelle de première espèce, on a donc $C^2 \geqslant 0$ ce qui achève la démonstration dans ce cas.

7. Démonstration du théorème 1 lorsque $K^2 < 0$.

On va d'abord montrer que, si E est une section hyperplane de V, on a $\ell(E + nK) = 0$ pour n assez grand. Soit n_o un entier tel que $n_o K^2 + K.E < 0$. Supposons qu'il y ait un entier $m \geqslant n_o$ tel que $\ell(E + mK) \geqslant 1$, et soit $D = \sum a_s C_s$ un élément de $|E + mK|$. On a $K.D < 0$, et il y a un indice s pour lequel $K.C_s < 0$. La formule (4) $2\pi(C_s) - 2 = C_s^2 + K.C_s$ montre que, si l'on avait $C_s^2 < 0$, on aurait $C_s^2 = K.C_s = - 1$ et $\pi(C_s) = 0$, ce qui est impossible. On a donc $C_s^2 \geqslant 0$. Si maintenant m' est assez grand, on a

$$(16) \qquad (E + m'K).C_s = (m' - m)K.C_s + \sum a_t\, C_t.C_s < 0 .$$

Je dis que, pour une telle valeur de m', on a nécessairement $\ell(E + m'K) = 0$. En effet, sinon, il existerait $D' \in |E + m'K|$, et l'on aurait d'après (16), $D'.C_s < 0$, alors qu'au contraire il est évident que $D'.C_s \geqslant 0$ (car toute composante C' de D' est soit égale à C_s, et l'on sait que $C_s.C' = C_s^2 \geqslant 0$, soit distincte de C_s, et l'on a $C_s.C' \geqslant 0$). Ceci démontre notre assertion.

On peut de plus choisir E tel que $\ell(E + K) \geqslant 2$. Ceci étant, il existe un entier n tel que :

$$(17) \qquad \begin{cases} \ell(E + nK) \geqslant 2 \\ \ell(E + (n + 1)K) \leqslant 1 . \end{cases}$$

La première inégalité montre que $|E + nK|$ contient un "pinceau" D_λ. Si D désigne un élément générique de ce pinceau, le théorème de Bertini (en caractéristique zéro) affirme que l'on a :

$$(18) \qquad D = A + \sum C_j , \quad A \geqslant 0 \text{ étranger aux } C_j ,$$

où les C_j sont des courbes distinctes telles que $C_j^2 \geqslant 0$ (elles constituent la "partie mobile" du pinceau). On peut avoir $A = 0$, mais il y a au moins une courbe C_j.

Nous allons montrer que l'une des courbes C_j vérifie la condition $\pi(C_j) = 0$, ce qui achèvera la démonstration.

On a en tout cas :

$$(19) \qquad \pi(C_j) \leq \ell(K + C_j) \leq \ell(K + D) \leq 1 .$$

Raisonnons donc par l'absurde, et supposons que tous les $\pi(C_j)$ soient égaux à 1. D'après (19), ceci entraînerait $\ell(K + C_j) = 1$, et il existerait un $D_j \in |K + C_j|$. Si l'on avait $D_j = 0$, on en tirerait $K \sim - C_j$ d'où $K^2 = C_j^2 \geqslant 0$ contrairement à l'hypothèse. On a donc $D_j \geqslant 0$. Ecrivons :

$$(20) \qquad D_j = \sum n_{j,s}\, X_{j,s} , \quad \text{avec } n_{j,s} > 0 .$$

Comme $\pi(C_j) = 1$, on a, d'après (4), $K.C_j = - C_j^2 \leqslant 0$, et, comme $D_j \sim K + C_j$, $D_j.C_j = 0$, d'où en utilisant (20) et le fait que $C_j^2 \geqslant 0$, la formule :

(21) $$X_{j,s}.C_j = 0 .$$

On a alors :

$$0 > K^2 \geqslant (K + C_j).K = \sum n_{j,s} X_{j,s}.K ,$$

ce qui montre que l'un des $X_{j,s}.K$ est < 0 . Mais on a :

$$X_{j,s}.K = X_{j,s}.(K + C_j) = n_{j,s} X_{j,s}^2 + \sum_{t \neq s} n_{j,t} X_{j,s}.X_{j,t} ,$$

d'où :

(22) $$0 > X_{j,s}.K \geqslant n_{j,s} X_{j,s}^2 .$$

En combinant (22) avec la formule (4), on voit que l'on doit avoir

$$X_{j,s}.K = -1 , \quad X_{j,s}^2 = -1 , \quad \pi(X_{j,s}) = 0 ,$$

ce qui est impossible et achève la démonstration.

REMARQUE. - En caractéristique $p > 0$, le théorème de Bertini ne s'applique plus de la même façon. On peut seulement dire que l'on a

(18') $$D = A + p^{\nu} \sum C_j , \quad \nu \text{ entier} \geqslant 0 ,$$

les C_j jouissant des mêmes propriétés que ci-dessus. Cela ne change d'ailleurs rien à la démonstration précédente.

8. Démonstration de théorème 1 lorsque $K^2 > 0$.

La formule (10) donne $\ell(-K) \geqslant 2$. On peut alors, comme précédemment, trouver dans $|-K|$ un diviseur D s'écrivant :

(23) $$D = A + \sum C_j , \quad A \geqslant 0 , \quad C_j^2 \geqslant 0 ,$$

le nombre des C_j étant $\geqslant 1$. En caractéristique $p > 0$, il faut affecter les C_j d'un coefficient p^{ν} .

Supposons d'abord que D ne soit pas une courbe, c'est-à-dire que $D - C_1 > 0$. On a alors :

$$\ell(K + C_1) = \ell(C_1 - D) = 0 ,$$

d'où $\pi(C_1) = 0$, d'après (6), et la démonstration est terminée dans ce cas.

Nous supposerons donc, à partir de maintenant que D est une courbe. On a alors

$$\ell(K + D) = \ell(0) = 1 \text{ , et } \pi(D) = 1 + \frac{1}{2} D.(K + D) = 1 .$$

Soit encore E une section hyperplane de V , telle que $\ell(E - D) \geqslant 1$. Comme $(E + nK).E = E.E - n D.E$ est < 0 pour n grand, on en conclut qu'il existe un entier n tel que :

$$(24) \qquad \begin{cases} \ell(E + nK) \geqslant 1 \\ \ell(E + (n + 1)K) = 0 . \end{cases}$$

Choisissons donc un $D' \in |E + nK|$. Nous distinguerons deux cas :

(i) La section hyperplane E peut être choisie de telle sorte que $D' > 0$.

Soit alors $D' = \sum a_s C_s$ la décomposition de D' . Comme $K \sim - D$, et que $D^2 \geqslant 0$, on a $K.D' \leqslant 0$ et $K.C_1 \leqslant 0$ pour au moins l'un des C_s , soit C_1 . On a, comme précédemment,

$$\ell(K + C_1) \leqslant \ell(K + D') = \ell(E + (n + 1)K) = 0 ,$$

d'où, d'après (6), $\pi(C_1) = 0$, d'où $C_1^2 + K.C_1 = - 2$, et comme $K.C_1 \leqslant 0$, on en déduit que, ou bien $C_1^2 \geqslant 0$ (et on a obtenu la courbe C cherchée), ou bien $C_1^2 = - 2$ et $K.C_1 = 0$.

Plaçons-nous donc dans ce second cas. La formule (5) donne :

$$\ell(D - C_1) \geqslant K^2 - \ell(2K + C_1) ,$$

et, comme $\ell(2K + C_1) \leqslant \ell(K + C_1) = 0$, on en déduit :

$$\ell(D - C_1) \geqslant 1 .$$

Soit donc $\Gamma \in |D - C_1|$. On a $\Gamma \neq 0$, car sinon on aurait $C_1 \sim D \sim - K$ d'où $- 2 = C_1^2 = K^2$, ce qui est absurde.

Ecrivons alors :

$$\Gamma = \sum n_j \Gamma_j , \qquad n_j > 0 .$$

On a :

$$\ell(K + \Gamma_j) \leq \ell(K + \Gamma) = \ell(- C_1) = 0 ,$$

d'où, d'après (6), $\pi(\Gamma_j) = 0$, pour tout j .

D'autre part, on a $\Gamma . K = - C_1 . K - K^2 < 0$, d'où $\Gamma_1 . K < 0$ pour l'un des Γ_j , et l'on termine, comme d'habitude, en remarquant que la formule $- 2 = \Gamma_1^2 + \Gamma_1 . K$ entraîne $\Gamma_1^2 \geqslant - 1$, d'où $\Gamma_1^2 \geqslant 0$, ce qui achève la démonstration dans le cas (i).

(ii) <u>Quel que soit le choix de</u> E , <u>on a</u> $D' = 0$.

Cela signifie que, pour toute section hyperplane E telle que $\ell(E - D) \geqslant 1$, il existe un n tel que $E \sim - nK$. Or, on voit facilement que <u>tout diviseur</u> est linéairement équivalent à la différence de deux diviseurs E et E' du type précédent (correspondant à des plongements projectifs différents, bien entendu !) ; c'est là une conséquence des théorèmes de Bertini, ou encore des "théorèmes A et B". Il s'ensuit que tout diviseur est équivalent à un multiple de K . La surface V a donc les propriétés suivantes :

(25) <u>On a</u> $p_a = P_2 = 0$. <u>Le groupe des classes de diviseurs de</u> V <u>est isomorphe à</u> $\mathbb{Z}$, <u>et la classe canonique en est un générateur</u>. <u>De plus il y a une courbe</u> D <u>équivalente à</u> $- K$.

Montrons que, lorsque $k = \mathbb{C}$, une telle surface n'existe pas.

Puisque $h^{0,2} = h^{2,0} = 0$, le groupe des classes de diviseurs de V s'identifie à $H^2(V , \mathbb{Z})$. Comme K en est un générateur, la dualité de Poincaré montre que

(26) $$K^2 = \pm 1 .$$

D'autre part, comme $H^2(V , \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, le second nombre de Betti de V est 1 , la caractéristique d'Euler-Poincaré χ de V (au sens usuel) est égale à 3 . En appliquant la formule de Noether-Zeuther-Segre :

(27) $$12(1 + p_a) = K^2 + \chi$$

on obtient :

(28) $$K^2 = 9$$

d'où contradiction avec (26).

VARIANTE. - On peut tirer une contradiction de (28) par voie purement algébrique (KODAIRA) :

On choisit un point simple sur D, soit P, et on introduit la surface $V' = Q_P(V)$, transformée quadratique de V par rapport à P. Toute courbe C sur V définit une courbe C' sur V', et le point P correspond à une courbe S vérifiant (11). Le diviseur canonique de V' est égal à $K' = -D'$, et l'on a $K'^2 = 8$. La formule (5) donne :

$$\ell(D' - 2S) \geqslant 4 - \ell(K' - D' + 2S) .$$

Mais

$$\ell(K' - D' + 2S) = \ell(-2D' + 2S) < \ell(2S) = 1$$

d'où :

$$\ell(D' - 2S) \geqslant 4 .$$

Choisissons alors un diviseur $C \in |D' - 2S|$. On peut évidemment écrire :

$C = aS + \sum n_i C'_i$, les C_i étant des courbes de V. Du fait que S et D' forment des bases du groupe des classes de diviseurs de V', on en déduit que $\sum n_i C_i \sim D$, ce qui montre que l'on a en fait :

$$C = aS + C'_o , \quad \text{avec} \quad C_o \sim D .$$

En calculant $C.S$, on trouve :

$$C.S = \begin{cases} (aS + C'_o).S = -a + i & (\text{avec } i = C'_o.S) \\ D'.S - 2S.S = 3 , \end{cases}$$

d'où $i = a + 3$.

D'autre part, on a

$$\ell(K' + C'_o) = \ell(-D' + C - aS) = \ell(-(a + 2)S) = 0 \quad \text{d'où, d'après (6)} ,$$

$\pi(C'_o) = 0$, et, en utisant (4), on obtient :

$$-2 = C'_o(K' + C'_o) = -(a + 2)C'_o.S = -(a + 2)(a + 3) ,$$

ce qui est impossible puisque $a \geqslant 0$, et achève la démonstration.

REMARQUE. - Pour étendre cette dernière démonstration au cas de la caractéristique $p > 0$, il suffirait de prouver que (25) entraîne (28), ou même seulement $K^2 \geqslant 6$. Remarquons qu'en tout cas les démonstrations de KODAIRA établissent le résultat suivant :

Toute surface V privée de courbes exceptionnelles de première espèce et telle que $p_a = P_2 = 0$ ou bien est rationnelle ou bien vérifie (25).

ADDITIF

Les difficultés de caractéristique $p > 0$ ont été résolues par ZARISKI à propos du problème des "modèles minima" ([10] , [11]). Le théorème 1 (critère de Castelnuovo) est valable sans changement. Le théorème 2 (toute surface unirationnelle est rationnelle) est valable à condition de définir l'unirationnalité par l'existence d'une application génériquement surjective et séparable $f : V \to V'$ avec V rationnelle.

Comme KODAIRA, ZARISKI se ramène à démontrer qu'il n'existe aucune surface vérifiant les propriétés (25). La démonstration dépend de la valeur de l'entier $K^2 \geqslant 1$; pour $K^2 \geqslant 2$, elle se trouve dans [11] , n° 8 , 9 , 10 , pour $K^2 = 1$, dans [12].

[Septembre 1958]