PAUL JAFFARD

Travaux de Krull sur les anneaux de Jacobson

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 127, p. 295-303
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__295_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1956)

TRAVAUX DE KRULL SUR LES ANNEAUX DE JACOBSON

par Paul JAFFARD

Tous les anneaux intervenant ici seront supposés commutatifs et munis d'un élément unité.

Anneaux de Jacobson.

Soient un anneau A et un idéal $\mathfrak{a}$ de A. On appelle radical de $\mathfrak{a}$ et on note $\operatorname{Rad} \mathfrak{a}$ l'ensemble de tous les éléments x de A dont une puissance $x^{n(x)}$ est contenue dans $\mathfrak{a}$. C'est aussi l'intersection de tous les surideaux premiers de $\mathfrak{a}$. On appelle radical de Jacobson de $\mathfrak{a}$ et on note $\operatorname{Raj} \mathfrak{a}$ l'intersection de tous les surideaux maximaux de $\mathfrak{a}$. On a toujours :

$$\operatorname{Raj} \mathfrak{a} \supset \operatorname{Rad} \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}$$

Si pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A on a l'égalité $\operatorname{Raj} \mathfrak{a} = \operatorname{Rad} \mathfrak{a}$, A est dit anneau de Jacobson.

On voit encore que pour que l'anneau A soit de Jacobson, il faut et il suffit que tout idéal premier de A soit égal à l'intersection de tous ses surideaux maximaux.

Théorème des zéros d'Hilbert.

Soient un anneau B, un sous-anneau A de B et une spécialisation g de B dans un corps K qui induise une spécialisation f de A sur un sous-corps k de B.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dash] & K \arrow[d, dash] \\ A \arrow[r, "f"] & K \end{tikzcd}$$

Si tout élément de $g(B)$ est algébrique sur k on dit que g est une extension algébrique de f. Lorsqu'il en est ainsi, $g(B)$ est un corps [1].

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, dash] & & K \arrow[dl, dash] \\ & k & \end{tikzcd}$$

On considère maintenant le cas particulier où f est l'application identique de k sur lui-même et g une spécialisation de B sur le corps K :

a étant un élément de B, la spécialisation g est dite un zéro de a si $g(a) = 0$. Elle est dite de même un zéro de l'idéal $\mathfrak{a}$ de B si $g(\mathfrak{a}) = 0$. Un tel zéro est dit algébrique si g est algébrique.

Les zéros d'un idéal $\mathfrak{a}$ de B correspondent biunivoquement aux surideaux premiers de $\mathfrak{a}$. Dans cette correspondance, à un zéro algébrique correspond un idéal maximal de

B , mais un idéal maximal ne définit pas nécessairement un zéro algébrique.

Il résulte immédiatement de la comparaison des deux définitions du radical de $\mathfrak{a}$ que nous avons données plus haut le :

THÉORÈME 1 (Théorème des zéros). - Si chaque zéro de l'idéal $\mathfrak{a}$ est aussi un zéro de l'élément a (de B), il existe un entier $n > 0$ tel que $a^n \in \mathfrak{a}$.

On dit que l'extension B de k vérifie le théorème des zéros d'Hilbert si, dans le théorème précédent, on peut remplacer le mot "zéro" par "zéro algébrique". On montre alors sans peine le :

THÉORÈME 2. - Pour que l'extension B de k vérifie le théorème des zéros d'Hilbert, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :

1° B est un anneau de Jacobson.

2° Tout corps K , image de B par une spécialisation, est une extension algébrique de k .

On veut étendre la notion de théorème des zéros d'Hilbert au cas d'un suranneau A d'un anneau B . Le théorème précédent conduit à dire que le théorème des zéros d'Hilbert généralisé (par abréviation V.H.N. : verallgemeinerte Hilbertsche Nullstellensatz) est valable pour l'extension B de A si :

1° B est un anneau de Jacobson.

2° Toute spécialisation de B sur un corps est extension algébrique d'une spécialisation de A sur un corps.

On a alors le théorème général suivant :

THÉORÈME 3. - Une condition suffisante pour que le V.H.N. soit valable pour l'extension B de A est que A soit de Jacobson et qu'il existe une sous-extension de type fini A^* de A telle que B soit un anneau entier sur A^*

On commence par le démontrer dans le cas $B = A^*$, c'est-à-dire dans le cas où B est de la forme $A(a_1 , \dots , a_n)$. Mais on voit, par passage au quotient, qu'il suffit de le montrer lorsque B est l'anneau de polynômes $A[x_1 , \dots , x_n]$, puis, par récurrence, lorsque $B = A[x]$. Nous n'entrerons pas dans les détails techniques de la dernière partie de cette démonstration. (KRULL montre une réciproque de cette propriété : si dans chaque spécialisation de $A[x]$ sur un corps l'image de A est un corps, A est un anneau de Jacobson).

Le théorème étant démontré dans le cas où B est une extension de type fini de A , pour achever la démonstration, il suffit de la faire dans le cas où B est entier sur A (c'est-à-dire dans le cas $A = A^*$) . S'il en est ainsi et si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de B , les théorèmes classiques de Krull [2] sur la correspondance entre les idéaux de B et ceux de A montrent que $\mathfrak{M} \cap A = \mathfrak{M}_A$ est maximal dans A . D'autre part $B/\mathfrak{M}$, étant entier sur $A/\mathfrak{M}_A$, est algébrique sur $A/\mathfrak{M}_A$. D'où la partie 2° du V.H.N.

Montrons maintenant que si A est de Jacobson, il en est de même de B : soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B et un élément $x \in B$, $x \notin \mathfrak{p}$. On considère l'extension intermédiaire $T = A(x)$. T, étant une extension de type fini de A , est de Jacobson comme on l'a montré plus haut. Par suite, si $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{p} \cap T$, la relation $x \notin \mathfrak{p}_T$ implique l'existence d'un idéal maximal $\mathfrak{M}_T$ de T tel que $x \notin \mathfrak{M}_T$ et $\mathfrak{p}_T \subset \mathfrak{M}_T$. Comme B est entier sur $T(x)$, il existe un idéal premier $\mathfrak{M}$ de B tel que $\mathfrak{M} \cap T = \mathfrak{M}_T$ et $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{M}$. L'anneau d'intégrité $B/\mathfrak{M}$, étant une extension algébrique de $T/\mathfrak{M}_T$, est un corps, donc $\mathfrak{M}$ est maximal dans B et il existe un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de B tel que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{M}$ et $x \notin \mathfrak{M}$. Donc B est de Jacobson.

REMARQUE. - Un corps étant trivialement un anneau de Jacobson, le théorème précédent donne comme cas particulier le théorème des zéros d'Hilbert énoncé sous sa forme habituelle.

Anneaux noethériens.

Etant donnés un anneau A et un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , on appelle dimension (ou parfois dimension maximale) de $\mathfrak{p}$ la borne supérieure (finie ou infinie) des longueurs des chaînes sans répétition d'idéaux premiers dont le premier terme est $\mathfrak{p}$ et le dernier un idéal maximal de A :

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_m = \mathfrak{M}$$

Si parmi de telles chaînes, il en existe qui sont saturées, on appelle dimension minimale de $\mathfrak{p}$ la borne inférieure de ces chaînes saturées. On appelle dimension d'un anneau d'intégrité la dimension de l'idéal (0) . Si A est un anneau noethérien, il vérifie les propriétés suivantes :

THÉORÈME 4 (de l'idéal principal). - Si A est un anneau d'intégrité noethérien, tout suridéal premier minimal $\mathfrak{p}$ d'un idéal principal $(a) \neq (0)$ est minimal.

THÉORÈME 5 (de la longueur). - Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau noethérien A contenu dans l'idéal premier $\mathfrak{q}$, il existe des chaînes saturées d'idéaux premiers dont le premier terme est $\mathfrak{p}$ et le dernier $\mathfrak{q}$. Les longueurs de ces chaînes sont bornées supérieurement.

(On appelle cette borne la $\mathfrak{q}$-dimension de $\mathfrak{p}$, c'est encore la dimension de l'anneau local $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}}$).

Il résulte de ce théorème que dans un anneau noethérien tout idéal premier a une dimension minimale finie.

THÉORÈME 6. - Si A est un anneau noethérien, tout sous-idéal premier $\mathfrak{p}$ d'un idéal premier $\mathfrak{q}$ est intersection des sous-idéaux premiers immédiats de $\mathfrak{q}$.

Ce dernier théorème, moins classique que les deux précédents, se montre par récurrence sur la $\mathfrak{q}$-dimension de $\mathfrak{p}$, une fois que l'on a constaté sa validité évidente lorsque cette $\mathfrak{q}$-dimension est égale à 1. Pour cela on se sert du :

LEMME. - Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non minimal de l'anneau d'intégrité noethérien A, (0) est l'intersection des idéaux premiers minimaux contenus dans $\mathfrak{p}$.

Ce lemme se démontre immédiatement à partir du théorème de l'idéal principal et du fait bien connu que dans un anneau noethérien chaque idéal n'a qu'un nombre fini de suridéaux premiers minimaux (ce qui se déduit de la décomposition primaire).

A partir de ces trois propriétés, on obtient quelques caractérisations des anneaux de Jacobson noethériens :

I. - a. Pour qu'un anneau noethérien A soit de Jacobson, il faut et il suffit que tout idéal premier de dimension minimale 1 soit intersection des idéaux maximaux qui le contiennent (la condition est évidemment nécessaire. Le théorème 6 montre qu'elle est suffisante).

b. Pour qu'un anneau noethérien A soit de Jacobson, il suffit que tout idéal premier de dimension minimale 1 ait une infinité de suridéaux premiers minimaux qui soient maximaux (on ramène au cas a. par un procédé analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème 6).

II. - Pour qu'un anneau d'intégrité qui n'est pas un corps et qui vérifie la condition descendante affaiblie soit de Jacobson, il faut et il suffit qu'il possède une infinité d'idéaux premiers (un tel anneau est en effet noethérien de dimension 1).

III. - Pour qu'un anneau d'intégrité noethérien de dimension finie d soit de Jacobson, il faut et il suffit que tout idéal premier de dimension 1 ait une infinité de surideaux premiers maximaux (le cas $d = 1$ se ramène au cas I b), puis on démontre le théorème par récurrence sur d en se servant du lemme énoncé plus haut).

Théorie de la dimension dans les anneaux de polynôme sur un anneau noethérien.

Considérons l'anneau A et l'anneau de polynômes $A[x]$. Un idéal premier de A étant désigné par une lettre telle que $\mathfrak{p}$, on désigne par $\mathfrak{p}_{x\tau}$ (τ pouvant être un indice arbitraire) un idéal premier de $A[x]$ qui repose sur $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire tel que $\mathfrak{p}_{x\tau} \cap A = \mathfrak{p}$.

THÉORÈME 7. – $\mathfrak{p}_{xo} = \mathfrak{p} \cdot A[x]$ est le plus petit idéal premier de $A[x]$ qui repose sur $\mathfrak{p}$. Il existe une infinité d'idéaux premiers de $A[x]$ qui reposent sur $\mathfrak{p}$. Deux de ces idéaux premiers distincts de $\mathfrak{p}_{xo}$ sont toujours premiers entre eux.

On ramène au cas $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{xo} = 0$ par passage aux quotients. A est alors un domaine d'intégrité avec corps des quotients K, et $K[x]$ est l'anneau des quotients de $A[x]$ par A^* (ensemble des éléments non nuls de A). Les idéaux premiers de $A[x]$ dont l'intersection avec A^* est vide correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de $K[x]$: on en déduit sans peine le théorème.

A partir de maintenant A sera supposé noethérien. On a alors le

LEMME. – Si dans l'anneau noethérien A, l'idéal premier $\mathfrak{q}$ est surideal premier immédiat de $\mathfrak{p}$, dans $A[x]$ l'idéal $\mathfrak{q}_{xo}$ ne peut jamais être surideal d'un idéal $\mathfrak{p}_x$ distinct de $\mathfrak{p}_{xo}$.

Raisonnons par l'absurde : soit $\mathfrak{p}_x \neq \mathfrak{p}_{xo}$ tel que $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{q}_{xo}$.

Soit l'idéal premier $\mathfrak{q}_{x1} = \mathfrak{q}_{xo} + xA[x]$ et soit $\mathfrak{p}'_y$ un idéal premier distinct de $\mathfrak{p}_x$ et $\mathfrak{q}_{x1}$ tel que $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}'_y \subset \mathfrak{q}_{x1}$. On a nécessairement $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}$. Le théorème précédent montre que l'on ne peut avoir $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. On a donc $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}$. Le théorème précédent montre alors que $\mathfrak{p}'_y = \mathfrak{q}_{xo}$. Donc $\mathfrak{q}_{xo}$ est le seul idéal premier compris entre $\mathfrak{p}_x$ et $\mathfrak{q}_{x1}$, ce qui contredit le théorème 6. D'où le lemme.

Ceci posé, on a le :

THÉORÈME 8. Si A est noethérien et si l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A a une dimension d, l'idéal $\mathfrak{p}_{xo}$ a la dimension d + 1 et un idéal $\mathfrak{p}_{x1}$ reposant sur $\mathfrak{p}$ et distinct de $\mathfrak{p}_{xo}$ a une dimension $d_1 \leqslant d$.

Supposons $\mathfrak{p}$ de dimension finie d et soit une chaîne sans répétition

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subset \cdots \subset \mathfrak{p}^{(d)}.$$

La chaîne

$$\mathfrak{p}_{xo} \subset \mathfrak{p}'_{xo} \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_o^{(d)} \subset \mathfrak{p}_{x1}^{(d)} = \mathfrak{p}_{xo}^{(d)} + x\,A[x]$$

montre que $\mathfrak{p}_{xo}$ a une dimension $d_o \geqslant d + 1$. Ceci montre d'ailleurs le théorème dans le cas où $\mathfrak{p}$ est de dimension infinie.

Montrons par récurrence sur d que $d_o \leqslant d + 1$:

Si $d = 0$, le théorème 7 montre que $d_o = 1 = d + 1$.

Supposons que l'inégalité cherchée ait été démontrée pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de dimension $d' < d$.

Soit $\mathfrak{p}_{x1} \subset \mathfrak{p}'_x$ (avec $\mathfrak{p}_{x1} \neq \mathfrak{p}_{x\bullet}, \mathfrak{p}'_x$). On a sûrement $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, donc $\mathfrak{p}'$ a une dimension $\leqslant d - 1$.

Deux cas sont possibles :

1° $\mathfrak{p}'_x \neq \mathfrak{p}'_{xo}$. D'après les hypothèses de récurrence :

$$\dim \mathfrak{p}'_x \leqslant \dim \mathfrak{p}' \leqslant d - 1 .$$

2° $\mathfrak{p}'_x = \mathfrak{p}'_{xo}$. D'après le lemme, $\mathfrak{p}'$ n'est pas un suridéal premier immédiat de $\mathfrak{p}$. On a donc $\dim \mathfrak{p}' \leqslant d - 2$. D'après les hypothèses de récurrence $\dim \mathfrak{p}'_x \leqslant \dim \mathfrak{p}' + 1 \leqslant d - 1$.

De toutes façons, $\dim \mathfrak{p}'_x \leqslant d - 1$. On en conclut $\dim \mathfrak{p}_{x1} = d_1 \leqslant d$. Soit maintenant $\mathfrak{p}_{xo} \subset \mathfrak{p}'_x$ $(\mathfrak{p}_{xo} \neq \mathfrak{p}'_x)$. Deux cas sont possibles :

1° $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$. D'après les hypothèses de récurrence $\dim \mathfrak{p}'_x \leqslant d$.

2° $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. On vient alors de montrer que $\dim \mathfrak{p}_x \leqslant d$.

On voit donc que $\dim \mathfrak{p}' \leqslant d + 1$. D'où le théorème.

REMARQUE. - Dans l'énoncé du théorème, il n'est pas nécessaire de supposer que A soit noethérien, mais seulement qu'il vérifie le lemme précédent.

Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes sur un anneau de Jacobson noethérien.

Avec les notations du théorème précédent on a :

THÉORÈME 9. - Si A est de dimension finie, pour que l'on ait toujours l'égalité $d_1 = d$, il faut et il suffit que A soit un anneau de Jacobson.

1°. Si A n'est pas de Jacobson, $\exists$ un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et $a \notin \mathfrak{p}$ tel que $a \in \mathrm{Raj}\,\mathfrak{p}$.

Soit $\mathfrak{p}_{x1} = \mathfrak{p}_{xo} + (1 + ax)A[x]$.

Si $\mathfrak{p}_{x1} \subset \mathfrak{p}'_x$, l'idéal $\mathfrak{p}'$ ne peut être maximal : en effet $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ et $a \in \mathfrak{p}'$.

Si on avait une chaîne sans répétition : $\mathfrak{p}_{x1} \subset \mathfrak{p}'_x \subset \dots \subset \mathfrak{p}_x^{(d)}$ un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 8 montrerait que $\mathfrak{p}^{(d)}$ est maximal. Donc $d_1 < d$.

2° Supposons A de Jacobson. On procède par récurrence sur d . Le théorème est toujours vrai pour $d = 0$. Supposons le vérifié pour toute valeur $d' < d$. Soit $\mathfrak{p}$ de dimension $d \geqslant 1$ et soit $\mathfrak{p}_{x1} \neq \mathfrak{p}_{xo}$. En passant au quotient, on peut supposer $\mathfrak{p} = 0$.

A étant un anneau de Jacobson noethérien de dimension > 0 , on voit qu'il contient une infinité d'idéaux premiers de dimension $d - 1$.

Soit $p(x) = c_o x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n$ un polynôme de degré maximal contenu dans $\mathfrak{p}_{x1}$.

$\mathfrak{p}_{x1}$ est l'idéal $(p(x))_{A^*}$ [1].

A étant noethérien, (c_o) n'a qu'un nombre fini de suridéaux premiers minimaux donc $\exists \mathfrak{p}'$ premier de dimension $d - 1$ tel que $c_o \notin \mathfrak{p}'$.

Posons $\mathfrak{a}'_x = \mathfrak{p}'_{xo} + (p(x))A[x]$. On a $\mathfrak{a}'_x \cap A = \mathfrak{p}'$.

Soit $\mathfrak{c}'_x = (\mathfrak{a}'_x)_{A^*}$. On a $\mathfrak{c}'_x \cap A = \mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}_{x1} \subset \mathfrak{c}'_x$.

$A[x]$ étant noethérien, $\mathfrak{c}'_x$ n'a qu'un nombre fini de suridéaux premiers minimaux. On voit alors (par la considération de son radical), que l'un d'entre eux, soit $\mathfrak{p}'_x$, repose sur $\mathfrak{p}'$.

D'après les hypothèses de récurrence, $\mathfrak{p}'_x$ a la dimension $d - 1$. La relation $\mathfrak{p}_{x1} \subset \mathfrak{p}'_x$ montre alors que $\mathfrak{p}_{x1}$ a la dimension d . D'où le théorème.

On n'a aucun théorème de cette sorte dans le cas de la dimension minimale : il peut arriver que la dimension minimale de $\mathfrak{p}_{x1}$ soit plus grande que celle de $\mathfrak{p}$. Il peut arriver aussi qu'elle soit plus petite.

Soit A un anneau de Jacobson noethérien de dimension finie et soit l'anneau des polynômes à n variables $A[x_1 , \dots , x_n]$.

En remarquant que chacun des anneaux $A_i = A[x_1 , \dots , x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est

---

[1] Rappelons que si S est un sous-ensemble multiplicativement clos de l'anneau B , pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de B , on désigne par $\mathfrak{a}_S$ (composante isolée de $\mathfrak{a}$) l'idéal de B ainsi défini :

$$x \in \mathfrak{a}_S \rightleftarrows \{\exists s \in S \quad \text{avec} \quad sx \in \mathfrak{a}\}.$$

encore un anneau de Jacobson de dimension finie, l'application répétée du théorème précédent montre les résultats suivants.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A de dimension d. L'idéal $\mathfrak{p}_{x0} = \mathfrak{p}A_n$ a pour dimension $d + n$.

Soit $\mathfrak{p}_{x1}$ un idéal premier de A_n tel que $\mathfrak{p}_{x1} \cap A = \mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}_{x1} \neq \mathfrak{p}_{x0}$, la dimension d_1 de $\mathfrak{p}_{x1}$ est telle que $d \leq d_1 \leq d+n-1$. Pour que l'on ait l'égalité $d_1 = d$, il faut et il suffit que pour chaque x_i il existe un polynôme $p(x_i) \in \mathfrak{p}_{x1}$ ne dépendant que de la variable x_i et dont les coefficients n'appartiennent pas à $\mathfrak{p}_0$. En effet, il faut et il suffit pour cela que, quel que soit i, l'idéal $\mathfrak{p}_{x1} \cap A_i$ ait la dimension d. Supposons $d_1 = d$ et soit x_i. On peut toujours supposer le numérotage des x_i fait de telle sorte que $i = 1$. On a alors $\dim \mathfrak{p}_{x1} \cap A_1 = d$ et il existe un polynôme $p(x_1) \in \mathfrak{p}_{x1} \cap A_1$ tel que $p(x_1) \notin \mathfrak{p}A_1$.

Réciproquement, si pour chaque i $(1 \leq i \leq n)$ $\exists\, p_i(x_i) \in \mathfrak{p}_{x1} \cap A[x_i]$ tel que $p_i(x_i) \notin \mathfrak{p}A[x_i]$, on voit par récurrence sur i que $d_1 = d$.

Plus généralement, soit $\mathfrak{p}_x$ un idéal premier de A_n tel que $\mathfrak{p}_x \cap A = \mathfrak{p}$. On peut numéroter les x_i de telle manière qu'il existe un entier $s (0 \leq s \leq n)$ avec les propriétés suivantes :

Tout polynôme $p(x_1, \dots, x_s) \in \mathfrak{p}_x$ a ses coefficients dans $\mathfrak{p}$.

Pour tout $k > s$, $\exists\, p_k(x_1, \dots, x_s, x_k) \in \mathfrak{p}_x$ dont aucun des coefficients n'appartient à $\mathfrak{p}$.

On voit alors que $\mathfrak{p}_x \cap A_s$ a la dimension $d + s$ (en prenant $A_0 = A$) et que $\mathfrak{p}_x$ a encore la dimension $d + s$.

On appelle s le <u>degré de transcendance de</u> $\mathfrak{p}_x$ (sur A) ; c'est encore le degré de transcendance du corps des quotients de $A[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}_x$ sur le corps des quotients de $A/\mathfrak{p}$. On peut donc énoncer le :

THÉORÈME 10. – <u>Soit</u> A <u>un anneau de Jacobson noethérien de dimension finie</u> $\mathfrak{p}_x$ <u>un idéal premier de</u> $A_n = A[x_1, \dots, x_n]$. <u>La dimension de</u> $\mathfrak{p}_x$ <u>(dans</u> A_n<u>)</u> <u>est égale à</u> $d + s$, <u>si on désigne par</u> d <u>la dimension de</u> $\mathfrak{p}_x \cap A$ <u>dans</u> A <u>et par</u> s <u>le degré de transcendance de</u> $\mathfrak{p}_x$ <u>(sur</u> A).

Si A est un corps, on obtient le théorème classique sur la dimension d'un idéal dans un anneau de polynômes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Les structures fondamentales de l'analyse, Livre 2 : Algèbre, Chapitres 4 et 5. - Paris, Hermann, 1950 (Act. scient. et ind. n° 1102; Eléments de Mathématique, 11). Chapitre 5 : Corps commutatifs, Paragraphe 3.

[2] KRULL (Wolfgang). - Berträge zur Arithmetik kommutativer Intergritätsbereiche. III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie, Math. Z., t. 42, 1937 p. 745-766.

[3] KRULL (Wolfgang). - Jacobsonsches Radikal und Hilbertscher Nullstellensatz, Proceedings of the international Congress of Mathematicians [1950..Cambridge, Mass.]. Vol. 2. - Providence, American mathematical Society, 1952 ; p. 56-64.

[4] KRULL (Wolfgang). - Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, Math. Z., t. 54, 1951, p. 354-387.