

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

BERNARD MALGRANGE

## Fonctions moyenne-périodiques

*Séminaire N. Bourbaki*, 1951-1954, exp. n° 97, p. 425-431.

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1951-1954\\_\\_2\\_\\_425\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__425_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1951-1954,  
tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES

par Bernard MALGRANGE.

(d'après J.P. KAHANE [1])

La majeure partie de cet exposé sera consacrée à la démonstration, donnée par KAHANE au début de sa thèse [1], des principaux résultats de SCHWARTZ sur les fonctions moyenne-périodiques.

1. Soit  $\mathcal{E}$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables d'une variable, et  $\mathcal{E}'$ , son dual, l'espace des distributions à support compact. La convolution munit  $\mathcal{E}'$  d'une structure d'algèbre ; les idéaux fermés de  $\mathcal{E}'$  sont les sous-espaces fermés invariants par translation ; leurs orthogonaux sont les sous-espaces fermés de  $\mathcal{E}$  invariants par translation.

La transformation de FOURIER :  $\mu \rightarrow \langle \mu, e^{-2\pi i x \lambda} \rangle = \mathcal{F}(\mu)(\lambda)$  ( $\mu \in \mathcal{E}'$ ) établit un isomorphisme entre  $\mathcal{E}'$  et l'espace  $\mathcal{O}$  des fonctions analytiques entières de type exponentiel à croissance lente sur l'axe réel (théorème de Paley-Wiener-Schwartz). A la convolution dans  $\mathcal{E}'$  correspond la multiplication ordinaire dans  $\mathcal{O}$ .

On appelle exponentielle-polynome une fonction de la forme  $P(x)e^{2\pi i \lambda x}$  où  $P$  est un polynome.

PROBLÈME. - Tout sous-espace fermé  $V$  de  $\mathcal{E}$ , invariant par translation, est-il engendré par les exponentielles-polynomes qu'il contient ? (Synthèse spectrale dans  $\mathcal{E}$ ).

Nous allons montrer que la réponse est affirmative.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{U}(f)$  le sous-espace fermé invariant par translation engendré par  $f$ . Il suffit de résoudre le problème pour les sous-espaces de  $\mathcal{E}$  qui sont de la forme  $\mathcal{U}(f)$ .

DÉFINITION 1. - Si  $\mathcal{U}(f) \neq \mathcal{E}$ ,  $f$  est appelée une fonction moyenne-périodique.

Dire que  $f$  est moyenne-périodique équivaut à dire qu'il existe une distribution à support compact  $\mu \neq 0$  qui vérifie  $\mu * f = 0$ .

Considérons alors une décomposition de  $f : f = f^+ + f^-$  où  $f^+$  appartient à  $\mathcal{O}'$  et à son support limité à gauche,  $f^-$  appartient à  $\mathcal{O}'$  et à son support limité à droite :  $\mu * f^+ = -\mu * f^- = \nu$  est une distribution à support compact.

DÉFINITION 2. - La fonction méromorphe  $\frac{\mathcal{F}(\nu)}{\mathcal{F}(\mu)}$  sera appelée une transformée de Carleman de la fonction moyenne-périodique  $f$  et notée  $\mathcal{F}'(f)$ .

Si l'on prend une autre distribution à support compact  $\mu'$  qui vérifie  $\mu' * f = 0$ , on aura  $\mu' * f^+ = \nu'$  d'où  $\mu * \nu' = \nu * \mu' = \mu * \nu * f$ , d'où  $\frac{\mathcal{F}(\nu')}{\mathcal{F}(\mu')} = \frac{\mathcal{F}(\nu)}{\mathcal{F}(\mu)}$  : la définition ne dépend pas de  $\mu$ .

Si nous prenons une autre décomposition de  $f : f = f_1^- + f_1^+$  qui vérifie les mêmes conditions,  $\mu * f_1^+ = \nu_1 = \nu + \mu * (f_1^+ - f^+)$ . Comme  $f_1^+ - f^+$  est à support compact, nous voyons que :  $\frac{\mathcal{F}(\nu_1)}{\mathcal{F}(\mu)} - \frac{\mathcal{F}(\nu)}{\mathcal{F}(\mu)} = \mathcal{F}(f_1^+ - f^+)$  est une fonction entière : la transformée de Carleman n'est donc pas invariante mais sa partie polaire est bien définie.

Le théorème fondamental affirme que cette partie polaire détermine  $f$  :

THÉORÈME 1. - Si une fonction moyenne-périodique  $f$  a pour transformée de Carleman une fonction entière,  $f$  est nulle.

Pour démontrer le théorème 1, on utilise le lemme suivant :

LEMME. - Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux distributions à support compact telles que  $\frac{\mathcal{F}(\nu)}{\mathcal{F}(\mu)}$  soit entière. Quel que soit le polynôme  $P(x)$ , il existe une distribution à support compact  $\nu_P$  telle que  $P(x)\mu * \nu = \mu * \nu_P$ .

Il suffit de démontrer le lemme pour  $P(x) = x$  (on procède ensuite par récurrence).

Cela revient à démontrer que la fonction entière  $\frac{M'(\lambda)}{M(\lambda)} N(\lambda)$  appartient à  $\mathcal{O}$ . (on pose  $\mathcal{F}(\mu) = M$ ,  $\mathcal{F}(\nu) = N$ )

or, on peut écrire :

$$\frac{M'(\lambda)}{M(\lambda)} = \frac{a}{\lambda} + b + \sum_i \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} \right) = \frac{a}{\lambda} + b - \sum_i \frac{1}{\lambda_i^2} + \lambda^2 \sum \frac{1}{(\lambda - \lambda_i) \lambda_i^2}$$

$$\sum \frac{1}{|\lambda_i|^2} = A < +\infty \text{ car } M \text{ est une fonction d'ordre 1.}$$

$$\left| \frac{N(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} \right| \leq |\lambda_1^{\max} \lambda| \leq 2 |N(\lambda_1)| \quad \text{quel que soit } \lambda_1 \text{ (module maximum)}$$

$$\text{d'où } \left| \frac{M'(\lambda)}{M(\lambda)} N(\lambda) \right| \leq [ |a| + |b| + |\lambda|^2 A + |\lambda| A ] |\lambda_1^{\max} \lambda| \leq 2 |N(\lambda_1)|$$

et le lemme s'ensuit immédiatement.

D'après le théorème des supports, les  $\nu_p$  ont leurs supports dans un intervalle fixe. On applique le lemme à  $\mu$  tel que  $\mu * f = 0$  et  $\nu = f^+ * \mu$ . On peut supposer que  $\mu$  est indéfiniment différentiable (si  $\mu * f = 0$  ;  $\alpha * \mu * f = 0$ ,  $\alpha$  fonction indéfiniment différentiable à support compact, et  $\alpha * \mu$  est indéfiniment différentiable).

Alors  $\mu * \nu_p = P(x) \mu * \nu = P(x) \mu * \mu * f^+$ . Toutes les distributions qui interviennent ont leur support limité à gauche : le théorème des supports montre que :

$$\nu_p = P(x) \mu * f^+ \text{ et aussi } \nu_p = -P(x) \mu * f^-, \text{ d'où } P(x) \mu * f = 0.$$

Soit  $a$  tel que  $\mu(a) \neq 0$  ; on choisit une suite de polynomes :  $P_1(x)$  qui tendent vers  $\frac{1}{\mu(a)} \delta_a$  sur un voisinage du support de  $\mu$ . Alors  $P_1(x) \mu \rightarrow \delta_a$  dans  $\mathcal{E}'$  donc,  $\tau_a f = 0$ , d'où  $f = 0$ . C.Q.F.D.

## 2. Théorèmes généraux.

DÉFINITION 3. - On appelle spectre de  $f$  l'ensemble des pôles de  $\mathcal{F}'(f)$  (comptés avec leur ordre de multiplicité).

PROPOSITION 1. - Soit  $f$  une fonction moyenne-périodique ; pour que  $P(x) e^{2\pi i \lambda x}$  ( $P(x)$  étant un polynome de degré  $n$ ) appartienne à  $\mathcal{T}(f)$ , il faut et il suffit que  $\lambda$  appartienne au spectre de  $f$  avec un ordre de multiplicité au moins égal à  $n+1$ .

On peut supposer pour la démonstration que  $\lambda = 0$ .

Supposons que  $\mathcal{F}'(f)$  ait un pôle d'ordre  $n+1$  à l'origine ; soit  $\mu$  une distribution à support compact orthogonale à  $\mathcal{T}(f)$  ; la symétrique  $\check{\mu}$  de  $\mu$  par rapport à l'origine vérifie  $\check{\mu} * f = 0$  ; donc  $\mathcal{F}(\check{\mu}) \mathcal{F}'(f)$  est une fonction entière,  $\mathcal{F}(\check{\mu})$  a un zéro d'ordre  $n+1$  au moins à l'origine, donc  $\langle x^k, \mu \rangle = 0$  ( $0 \leq k \leq n$ ) ; donc  $x^k \in \mathcal{T}(f)^{\perp\perp} = \mathcal{T}(f)$ .

Réciproquement, supposons que  $P(x)$  appartienne à  $\mathcal{T}(f)$ . On peut choisir  $\mu$  tel que  $\mu * f = 0$ ,  $\nu = \mu * f^+$  et  $\mathcal{F}(\nu)$  ne s'annule pas à l'origine (on remplace éventuellement  $\mu$  et  $\nu$  par  $\mu_1$  et  $\nu_1$  avec  $\mathcal{F}(\mu) = \lambda^k \mathcal{F}(\mu_1)$ ,

$\mathcal{F}'(\nu) = \lambda^k \mathcal{F}'(\nu_1)$  ; on a encore  $\mu_1 * f^+ = \nu_1$  . On a  $\mu * P(x) = 0$  , donc  $\mathcal{F}'(\mu)$  s'annule au moins  $n + 1$  fois à l'origine et  $\mathcal{F}'(f)$  a un pôle d'ordre au moins  $n + 1$  .

Nous pouvons maintenant donner la réponse au problème posé :

**THÉOREME 2.** - La fonction moyenne-périodique  $f$  est limite dans  $\mathcal{E}$  de combinaisons linéaires des exponentielles-polynomes contenues dans  $\mathcal{V}(f)$  .

Soit  $\sigma$  une distribution à support compact ;  $\sigma * f \in \mathcal{V}(f)$  , donc  $\sigma * f$  est moyenne-périodique. Une transformée de Carleman de  $\sigma * f$  est  $\mathcal{F}(\sigma) \mathcal{F}'(f)$  (en décomposant :  $\sigma * f = \sigma * f^+ + \sigma * f^-$ ) .

D'après le théorème 1, pour que  $\sigma * f = 0$  , il faut et il suffit que  $\mathcal{F}'(\sigma)$  s'annule sur le spectre de  $f$  .

En appliquant la proposition 1 : pour que  $\sigma * f = 0$  , il faut et il suffit que  $\sigma * P(x) e^{2\pi i \lambda x} = 0$  quand  $P(x) e^{2\pi i \lambda x} \in \mathcal{V}(f)$  ; ou encore pour que  $\check{\sigma} \in \mathcal{V}(f)^\perp$  il faut et il suffit que  $\langle \check{\sigma}, P(x) e^{2\pi i \lambda x} \rangle = 0$  quand  $P(x) e^{2\pi i \lambda x} \in \mathcal{V}(f)$  .

C.Q.F.D.

On peut préciser ce résultat :

**THÉOREME 3.** - Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$  , invariant par translation,  $V \neq \mathcal{E}$  . Les exponentielles-monômes de  $V$  forment une base de  $V$  . Par rapport à ces exponentielles-monômes, toute fonction  $f$  de  $V$  admet un développement formel  $f \sim \sum_{j,k} a(\lambda_{j,k}) x^k e^{2\pi i \lambda_j x}$  déterminé explicitement par la partie polaire de  $\mathcal{F}'(f)$  . Si ce développement formel est nul,  $f$  est nulle. Si une somme d'exponentielles-monômes de  $V$  tend vers  $f$  sur un intervalle assez grand (pour la convergence uniforme des fonctions ainsi que de toutes leurs dérivées), les coefficients de cette somme tendent vers ceux du développement formel de  $f$  .

Soit  $\mu$  une distribution à support compact telle que  $\check{\mu} \in V^\perp$  , et soit  $a$  la longueur du plus petit intervalle contenant le support de  $\mu$  ; on peut supposer que  $\text{supp}(\mu) \subset [0, a]$  .

Pour toutes les fonctions moyenne-périodiques, nous prendrons comme décomposition :  $f^+ = Yf$  ,  $f^- = (1 - Y)f$  ( $Y$  : fonction de Heaviside).

Soit  $f$  une fonction de  $V$  :

$$\mu * f^+ = - \mu * f^- = \nu \text{ et } \nu \text{ a son support dans } [0, a] .$$

Soit  $\sum_p$  une somme d'exponentielles monômes de  $V$  ;  $\mu * \sum_p^+ = \sigma_p$  .

Si  $\sum_p$  tend vers  $f$  sur l'intervalle  $[-\epsilon, a + \epsilon]$ ,  $\sigma_p$  tendra vers  $\nu$ , donc la partie polaire de  $\mathcal{F}'(\sum_p)$  tendra vers la partie polaire de  $\mathcal{F}'(f)$  .

Si  $\sum_p = \sum a_p(\lambda_j, k) x^k e^{2\pi i \lambda_j x}$ , la partie polaire de  $\mathcal{F}'(\sum_p)$  est :

$$\left\{ \frac{a_p(\lambda_j, k) k!}{[2\pi i(\lambda_j - \lambda)]^{k+1}} \right\} \quad (\text{calcul immédiat})$$

En prenant pour  $f$  une exponentielle-monôme de  $V$ , on voit que les exponentielles-monômes forment un système libre dans  $V$  (et même un système libre sur tout intervalle de longueur  $> a$ ). Elles forment donc une base de  $V$  ; le reste du théorème suit immédiatement.

REMARQUE. - La même théorie peut se faire dans  $\mathcal{D}'$  (espace des distributions),  $\mathcal{C}$  (espace des fonctions continues).

### 3. Quelques propriétés des fonctions moyenne-périodiques.

L'introduction des transformées de Carleman de fonctions moyenne-périodiques permet de résoudre certains problèmes difficilement abordables autrement. Voici un exemple :

**THÉORÈME 4.** - Soit  $f$  une fonction de  $L^\infty$ , moyenne-périodique (dans  $\mathcal{D}'$ ). Son spectre est réel et simple, les coefficients de son développement sont bornés par  $\|f\|$ , et  $f$  est une distribution presque-périodique.

Soit  $\mu$  tel que  $\mu * f = 0$ , et soit  $\mu * f^+ = \nu$  ( $f^+ = Yf$ ). Soit

$$G(\lambda) = \int_0^{+\infty} f^+(x) e^{-2\pi i \lambda x} dx ,$$

$G(\lambda)$  est une fonction définie pour  $\forall \lambda < 0$ , et l'on a  $\mathcal{F}(\mu) G(\lambda) = \mathcal{F}(\nu)$ , d'où  $\mathcal{F}'(f) = G(\lambda)$ . De même, si  $\forall \lambda > 0$  :  $\mathcal{F}'(f) = - \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-2\pi i \lambda x} dx$ .

Par suite :  $|\mathcal{F}'(f)(\lambda)| \leq \frac{\|f\|}{2\pi|\lambda|}$  d'où résulte immédiatement que le spectre de  $f$  est réel et simple et que les coefficients de son développement formel sont bornés par  $\|f\|$ .

$f \sim a_0 + \sum_{\lambda_j \neq 0} a_j e^{2\pi i \lambda_j x}$ . Une primitive seconde de  $f - a_0$  est moyenne-périodique et a pour développement formel :

$$f_2 \sim \sum_{\lambda_j \neq 0} \frac{a_j}{(2\pi i \lambda_j)^2} e^{2\pi i \lambda_j x}.$$

Comme  $\sum \frac{1}{|\lambda_j|^2} < +\infty$ , ce développement est absolument convergent : sa somme  $f_2$  est donc une fonction presque périodique. Alors  $f = a_0 + f_2''$  est une distribution presque périodique.

Terminons en donnant sans démonstration deux théorèmes de prolongement. Soit  $\Lambda$  une suite de nombres complexes (non nécessairement tous distincts)  $I$  un intervalle fermé. On appelle  $\mathcal{E}_I$  l'espace des fonctions continues sur  $I$  et  $\mathcal{E}_I(\Lambda)$  l'espace des fonctions limites uniformes sur  $I$  de sommes d'exponentielles-monomes de  $\Lambda$ .

THÉOREME 5 (LEONTIEV-KAHANE). - Si  $\Lambda$  est une suite symétrique s'accumulant angulairement sur l'axe réel, et si  $I > 2\pi$  dans  $\max \Lambda$ , toute fonction de  $\mathcal{E}_I(\Lambda)$ , analytique sur  $I$ , se prolonge en une fonction de  $\mathcal{E}_R(\Lambda)$  analytique sur  $R$ .

Appelons moyenne-période d'une suite  $\Lambda$  la borne supérieure  $L(\Lambda)$  des intervalles  $I$  sur lesquels  $\mathcal{E}_I(\Lambda) = \mathcal{E}_I$ , et moyenne-période d'une fonction moyenne-périodique  $f$ , la moyenne-période  $L_f$  du spectre de  $f$ .

Pour toute suite  $\Lambda$ , on a  $L(\Lambda) \geq 2\pi$  dans  $\max \Lambda$  (LEVINSON).

COROLLAIRE. - Si  $\Lambda$  est une suite symétrique s'accumulant angulairement sur l'axe réel, on a  $L(\Lambda) = 2\pi$  dans  $\max \Lambda$ . (Hypothèse de Schwartz).

Sinon, il existerait un intervalle  $I$  avec  $\mathcal{E}_I(\Lambda) = \mathcal{E}_I$ , et auquel le théorème 5 s'appliquerait ; en particulier, toute fonction analytique sur  $I$  se prolongerait en une fonction analytique sur toute la droite, ce qui est absurde.

THÉOREME 6. - Soit  $f$  une fonction moyenne-périodique, analytique sur toute la droite, et soit  $\Lambda$  son spectre ;  $f$  se prolonge analytiquement en  $\bar{f}$  dans une bande horizontale  $B$  du plan complexe (éventuellement un demi-plan ou le plan entier) telle que sur tout segment de longueur  $L_f$  de la frontière de  $B$ , il y ait au moins une singularité de  $\bar{f}$  ; et  $\bar{f} \in \mathcal{E}_B(\Lambda)$ .

(Beaucoup plus difficile que le théorème 5).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-54, p. 39-130 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).

ADDITIF

On trouvera une démonstration très simple et plus élémentaire du théorème 1 dans :

- KOOSIS (Paul). - Note sur les fonctions moyenne-périodiques, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 357-360.

[Octobre 1957]

---