

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

N. JACOBSON

Le problème de Kurosch

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 64, p. 145-154

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__145_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE PROBLÈME DE KUROSCHE

par N. JACOBSON

1. Histoire.

Nous considérons dans la suite des algèbres α sur un corps commutatif Φ . On dit que α est algébrique si la sous-algèbre engendrée par chaque élément de α est de dimension finie. On dit que α est localement finie si chaque sous-ensemble fini de α engendre une sous-algèbre de dimension finie. En 1941, KUROSCHE a posé la question : est-il vrai que toute algèbre algébrique est localement finie ? En 1948, KAPLANSKY a introduit la notion d'une algèbre qui satisfait à une identité polynomiale (les PI algèbres). En 1950, KAPLANSKY a démontré que toute PI algèbre algébrique est localement finie. La méthode de Kaplansky est basée sur la notion de l'espace des idéaux primitifs dans un anneau. Récemment, LEVITZKI a donné une démonstration du résultat de Kaplansky qui est plus simple que celle de Kaplansky. C'est la démonstration de Levitzki [10] que je donnerai ici.

2. Préliminaires.

Rappelons d'abord les notions de la théorie des anneaux arbitraires. On dit qu'un anneau α est primitif s'il possède une représentation irréductible fidèle. Si $I = \{\mathcal{M}\}$ est l'ensemble des modules irréductibles pour un anneau quelconque α , on définit le radical $\mathcal{R}$ comme l'ensemble des éléments z tels que $xz = 0$ pour tout x de tout $\mathcal{M}$ de I . $\mathcal{R}$ est un idéal bilatère. α est semi-simple si $\mathcal{R} = 0$. On obtient le même radical si on considère des modules à gauche et les anti-représentations au lieu de modules (à droite) et les représentations. Aussi on peut donner la caractérisation suivante : $\mathcal{R}$ est le plus grand idéal à droite (à gauche) quasi-régulier dans le sens que pour chaque $z \in \mathcal{R}$ il existe un z' tel que $z \circ z' = z + z' - zz' = 0$. Un idempotent $e \neq 0$ ne peut être quasi-régulier. Alors $\mathcal{R}$ ne contient pas d'idempotents $\neq 0$. Tout élément nilpotent est quasi-régulier et ceci entraîne que $\mathcal{R}$ contient tous les nilidéaux de l'anneau. On dit qu'un idéal bilatère $\mathfrak{p}$ est primitif (dans α) si $\alpha/\mathfrak{p}$ est un anneau primitif. Par définition (à peu près) α est semi-simple si et seulement si $\cap \mathfrak{p} = 0$ pour l'ensemble $\{\mathfrak{p}\}$ des idéaux primitifs. Rappelons aussi que tout idéal bilatère dans un anneau semi-simple est un anneau semi-simple. On a le même résultat pour $e\alpha e$, e un idempotent dans l'anneau semi-simple α .

Ensuite supposons que α est primitif et $\mathcal{M}$ est un α -module irréductible fidèle. Soit $\mathcal{C}$ le commutant de α dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire, l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec les opérateurs correspondant aux éléments de α . On a le lemme de Schur : $\mathcal{C}$ est un corps (non-commutatif). Si Γ est un anneau anti-isomorphe à $\mathcal{C}$ on peut traiter $\mathcal{M}$ comme un espace vectoriel (à gauche) sur Γ . Alors on a le théorème de Burnside généralisé ou théorème de densité : Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des éléments de $\mathcal{M}$ linéairement indépendants par rapport à Γ et $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont quelconques dans $\mathcal{M}$, il existe un $a \in \alpha$ tel que $x_i a = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

3. Anneaux matriciels.

Je suppose connues les notions des décompositions de Peirce à droite, à gauche et bilatère par rapport à un ensemble fini d'idempotents. Rappelons seulement à ce sujet quelques résultats qui sont fondamentaux pour la suite.

Soient e_1, e_2 deux idempotents dans α . Alors les idéaux à droite $e_1 \alpha$, $e_2 \alpha$ sont α -isomorphes si et seulement s'il existe des éléments e_{12}, e_{21} tels que $e_{12} e_{21} = e_1$, $e_{21} e_{12} = e_2$. Supposons que α possède un élément unité 1 et que $\alpha = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{I}_n$ où les $\mathcal{I}_j$ sont des idéaux à droite isomorphes deux à deux. On a $1 = \sum_{j=1}^n e_j$, $e_j \in \mathcal{I}_j$, les e_j sont des idempotents orthogonaux et $\alpha = e_j \alpha$. On peut démontrer qu'il existe des unités matricielles e_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ telles que $e_{ii} = e_i$ et

$$e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}, \quad \sum e_{ii} = 1.$$

Si $\mathcal{b}$ est le sous-anneau des éléments commutant avec les e_{ij} , tout $a \in \alpha$ peut s'écrire dans la forme $a = \sum b_{ij} c_{ij}$, $b_{ij} \in \mathcal{b}$. Alors $\alpha \cong \mathcal{b}_n$, l'anneau des matrices d'ordre n sur $\mathcal{b}$. On a aussi $\mathcal{b} \cong e_{11} \alpha e_{11}$.

4. Algèbres algébriques.

Tous les résultats de 2 et 3 sont valables pour des algèbres. Désormais nous considérerons des algèbres sur un corps commutatif Φ .

On dit qu'un élément $a \in \alpha$ est algébrique si la sous-algèbre A engendrée par a est de dimension finie. On appelle $\dim A + 1$ le degré de a et si $A \supset aA \supset \dots \supset a^{k-1}A = a^kA = \dots$, k est l'indice de a . On a $\deg a = \text{ind } a$ si et seulement si a est nilpotent.

PROPOSITION 1. - Si a est algébrique d'indice k , il existe un x (dans A) tel que

$$a^k x a^k = a^k .$$

On a $a^k \in a^{k-1} A = a^k A = a^{k+1} A$. Alors

$$a^k = a^{k+1} b = a^{k+2} b^2 = \dots = a^{2k} b^k = a^k b^k a^k$$

et $x = b^k$.

Remarquons que $e = a^k x$ est idempotent et $ea^k = a^k$. Par conséquent, si a n'est pas nilpotent, $e \neq 0$. Ceci entraîne

THÉOREME 1. - Si α est algébrique, ou bien α est une nilalgèbre, ou bien α contient un élément idempotent.

Puisque le radical $\mathcal{P}$ ne contient aucun idempotent, il est clair que $\mathcal{Q}$ est une nilalgèbre.

On dit que α est de degré borné (indice borné) s'il existe une borne finie pour les degrés (indices) des éléments de α . Evidemment toute sous-algèbre et toute image homomorphe d'une algèbre algébrique de degré (indice) borné est de la même sorte.

PROPOSITION 2. - Une algèbre α est d'indice borné si et seulement si les indices de tous les éléments nilpotents sont bornés.

Soit $\varphi(\lambda)$ le polynôme de degré minimal (sans terme constant) tel que $\varphi(a) = 0$, $a \in \alpha$. Soit λ^k la plus grande puissance de λ divisant $\varphi(\lambda)$. On voit que k est l'indice de a . Posons $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) \lambda^{-(k-1)}$, $b = \psi(a)$. On vérifie que b est nilpotent d'indice k .

THÉOREME 2. - Soit α une algèbre algébrique sans éléments nilpotents (sauf 0) et soit $a \in \alpha$. Alors l'idéal bilatère (a) engendré par a est de la forme (e) où e est un idempotent contenu dans le centre de α .

D'après la proposition 1 on a un idempotent e tel que $(a) = (e)$. Ensuite nous démontrons que si α est un anneau sans éléments nilpotents, tout idempotent dans α est contenu dans le centre. Pour cela considérons la décomposition bilatère de Peirce $\alpha = e \alpha e + (1 - e) \alpha e + e \alpha (1 - e) + (1 - e) \alpha (1 - e)$. Les éléments de $e \alpha (1 - e)$ et $(1 - e) \alpha e$ sont nilpotents. Alors $e \alpha (1 - e) = 0 = (1 - e) \alpha e$, $\alpha = e \alpha e + (1 - e) \alpha (1 - e)$ ce qui entraîne que e est dans le centre.

COROLLAIRE. - Soit α comme dans le théorème 2. Alors pour chaque sous-ensemble fini $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ d'éléments de α il existe un idempotent e dans le centre tel que $ea_i = a_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Soit e_i un idempotent tel que $e_i a_i = a_i$; on prend

$$e = e_1 \circ e_2 \circ \dots \circ e_k \quad (a \circ b = a + b - ab).$$

5. PI-algèbres.

On dit qu'une algèbre α (pas nécessairement algébrique) satisfait à une identité polynomiale ou que α est une PI-algèbre, s'il existe un élément $p(x_1, \dots, x_r) \neq 0$ dans l'algèbre libre tel que $p(a_1, \dots, a_r) = 0$ pour tout choix des a_i dans α . Nous verrons que la classe des PI-algèbres contient celle des algébriques de degré borné.

THÉORÈME 3 (JACOBSON). - Toute algèbre algébrique de degré borné est une PI-algèbre.

Soit N la borne supérieure des degrés des éléments de α . Alors on a une équation $a^N + \alpha_1 a^{N-1} + \dots + \alpha_{N-1} a = 0$ pour chaque $a \in \alpha$. Soit b un autre élément de α . On a $[a^N b] + \alpha_1 [a^{N-1} b] + \dots + \alpha_{N-1} [ab] = 0$, où généralement $[xy] = xy - yx$. Ensuite on a

$$[[a^N b], [ab]] + \alpha_1 [[a^{N-1} b], [ab]] + \dots + \alpha_{N-2} [[a^2 b], [ab]] = 0.$$

Après ça on prend le commutateur avec $[[a^2 b], [ab]]$, etc. Cela donne une identité

$$[[[a^N b], [ab]]; [[a^2 b], [ab]]]; [[[a^3 b], [ab]]; [a^2 b], [ab]]] \dots = 0$$

valable pour tout $a, b \in \alpha$. Cette identité n'est pas triviale car le terme $a^N b a^2 b a^3 b a^2 b a b \dots$ ne paraît qu'une fois.

Ensuite nous considérerons la structure des PI-algèbres primitives.

PROPOSITION 4. - Si α satisfait à une identité polynomiale de degré m , α satisfait à une identité multilinéaire de degré $\leq m$.

On entend par un élément multilinéaire un élément de la forme

$$\sum p_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$$

où la somme est prise sur toutes les permutations des chiffres $1, 2, \dots, n$.

On obtient la démonstration par le procédé usuel de linéarisation.

Une conséquence immédiate de la proposition 4 est la

PROPOSITION 5. - Si $\mathcal{A}$ est une PI-algèbre et P est un corps commutatif contenant le corps de base $\mathbb{F}$, $\mathcal{A}_P$ est PI.

Le théorème 2 montre que l'algèbre $\mathbb{F}_n$ de toutes les matrices sur $\mathbb{F}$ est une PI-algèbre. D'autre part le degré des identités pour $\mathbb{F}_n$ ne peut pas être trop petit. En effet, on a la

PROPOSITION 6. - L'algèbre $\mathbb{F}_n$ ne satisfait à aucune identité de degré $< 2n$.

Autrement il existerait une identité de la forme

$$a_1 a_2 \dots a_m = \sum_{i_1, \dots, i_m} p_{i_1 \dots i_m} a_{i_1} \dots a_{i_m},$$

$m < 2n$, la somme prise sur les permutations $\neq$ l'identité. Posons $a_1 = e_{11}$, $a_2 = e_{12}$, $a_3 = e_{22}$, $a_4 = a_{23}$, ..., ce qui donne $a_1 \dots a_m \neq 0$, $a_{i_1} \dots a_{i_m} = 0$ ce qui contredit l'identité.

PROPOSITION 7. (AZUMAYA et NAKAYAMA). - Soit Γ un corps, Σ son centre et P un sous-corps commutatif maximal. Alors $\Gamma \otimes_{\Sigma} P$ considéré comme une algèbre

sur P est isomorphe à une algèbre dense (c'est-à-dire, ayant la propriété donnée dans le théorème de densité) des transformations linéaires d'un espace vectoriel sur P .

On voit facilement que $\Gamma \otimes_{\Sigma} P$ est simple. Nous pouvons identifier Γ avec

l'ensemble des multiplications à droite $\xi \rightarrow \xi \chi$ dans Γ et P avec l'ensemble des multiplications à gauche par les éléments de P . On a un homomorphisme naturel de $\Gamma \otimes_{\Sigma} P$ sur l'ensemble d'endomorphismes ΓP dans Γ . Puisque

$\Gamma \otimes_{\Sigma} P$ est simple cela donne un isomorphisme. Puisque Γ est un corps l'ensemble

de multiplications à droite est irréductible. Par conséquent ΓP est irréductible, le commutant de cet ensemble est d'après la maximalité de P , P lui-même. Alors on obtient le résultat par utilisation du théorème de densité.

THÉOREME 4 (KAPLANSKY). - Supposons que $\mathcal{A}$ soit une algèbre qui satisfait à une identité du degré d . Alors le centre Σ de $\mathcal{A}$ est un corps et $\mathcal{A}$ est une algèbre simple de dimension $\leq \left[\frac{d^2}{2}\right]$ sur Σ .

D'après le théorème de densité on peut considérer α comme une algèbre dense de transformations linéaires d'un espace vectoriel $\mathcal{M}$ sur un corps Γ . Soit $\mathcal{M}_k$ un sous-espace de $\mathcal{M}$ de dimension finie k et soit $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de α appliquant $\mathcal{M}_k$ dans lui-même. En tenant compte du théorème de densité on voit que toute transformation linéaire de $\mathcal{M}_k$ dans $\mathcal{M}_k$ est induite par un élément convenable appartenant à $\mathfrak{b}$. Alors l'algèbre Γ_k de toutes les matrices d'ordre k sur Γ , qui est isomorphe à l'algèbre des transformations linéaires de $\mathcal{M}_k$, est une image homomorphe de $\mathfrak{b}$. Il suit que Γ_k et par conséquent Φ_k satisfait à une identité de degré d . D'après la Proposition 6, $d \geq 2k$. Alors $\dim \mathcal{M} \leq [\frac{d}{2}]$ et $\alpha \cong \Gamma_k$, $k \leq [\frac{d}{2}]$ et α est simple. Le centre de Γ_k est le centre $\sum$ de Γ . Evidemment Γ satisfait à l'identité donnée pour α . Cela est le cas aussi pour $\Gamma \otimes \sum P$, P un sous-corps commutatif maximal.

Si l'on emploie la proposition 7 et le raisonnement donné dans la première partie de la démonstration on voit que la dimension de $\Gamma \otimes \sum P$ sur P est finie.

Par conséquent la dimension de Γ sur $\sum$ est finie et celle de α est finie. On voit maintenant que $\alpha \otimes \sum P \cong P_h$ où $h^2 = \dim \alpha$ sur $\sum$. La proposition 6 s'applique encore pour montrer que $h \leq [\frac{d}{2}]$.

6. Idéaux matriciels.

PROPOSITION 8 (LEVITZKI). - Soit a un élément nilpotent d'indice n dans une algèbre algébrique semi-simple. Alors l'idéal (a) contient un système de n^2 unités matricielles.

On a $a^{n-1} \alpha \neq 0$ et par conséquent il existe un élément b tel que $a^{n-1} b = e = e^2 \neq 0$. Posons $e_i = a^{n-i} b a^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. On trouve que $e_1^2 = e_1$ et $e_i \neq 0$ puisque $e_1 = e \neq 0$. De plus $e_i e_j = 0$ si $j < i$ ce qui entraîne que $u = e_1 \circ e_2 \circ \dots \circ e_n$ est idempotent et $e_i u = e_i = u e_i$. Alors $\mathfrak{b} = u \alpha u \subseteq (a)$ et u est un élément unité pour $\mathfrak{b}$. On voit que $\mathfrak{b} = \sum_{\oplus} e_i \mathfrak{b}$. Puisque $(a^{n-1} b) a^{i-1} = e_i$ et $a^{i-1} (a^{n-1} b) = e_i$, $e_i \mathfrak{b} \cong e_i \mathfrak{b}$. D'après le résultat cité en paragraphe 3, $\mathfrak{b}$ contient un système de n^2 unités matricielles.

PROPOSITION 9. - Soit α algébrique et semi-simple, $\{e_{ij}\}$ un système de n^2 unités matricielles $u = \sum_{i=1}^n e_{ii}$. Supposons ou bien

1° $e_{11} \alpha e_{11}$ contient un élément nilpotent $\neq 0$, ou bien

2° u n'est pas dans le centre. Alors il existe un système $\{f_k\}$ de au moins $(n+1)^2$ unités matricielles tel que $f_{11} \in e_{11} \alpha e_{11}$.

$$(1) \quad b = u \alpha u = c_n, \quad c_n \cong e_{11} b e_{11} = e_{11} \alpha e_{11}.$$

D'après la proposition 8, c contient un système de $r^2 > 1$ unités matricielles. Cela entraîne que α possède un système de $n^2 r^2$ unités matricielles.

(2) On obtient la démonstration facilement par la considération de la décomposition de Peirce $\alpha = u \alpha u + u \alpha (1-u) + (1-u) \alpha u + (1-u) \alpha (1-u)$.

PROPOSITION 10 (KAPLANSKY). - Soit $e_1, e_2, \dots$ une suite d'idempotents $\neq 0$ tels que $e_{i+1} \in e_i \alpha e_i$, $i = 1, 2, \dots$. Alors il existe un idéal primitif $\mathfrak{p}$ tel que $e_i \in \mathfrak{p}$, $i = 1, 2, \dots$.

On voit facilement que l'idéal à droite $\mathcal{F} = \sum (1 - e_i) \alpha$ ne contient pas e_1 . Soit $\mathcal{F}'$ un idéal à droite maximal contenant $\mathcal{F}$ et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal de tous les éléments b tels que $\alpha b \subseteq \mathcal{F}'$. On voit que $\mathfrak{p}$ est primitif et $e_i \in \mathfrak{p}$, $i = 1, 2, \dots$, puisque $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{F}'$.

THÉOREME 4 (LEVITZKI). - Soit α une algèbre algébrique semi-simple ayant la propriété que pour chaque idéal primitif $\mathfrak{p}$, $\alpha/\mathfrak{p}$ est d'indice borné. Alors tout idéal $b \neq 0$ de α contient un idéal $c = \delta_n$ où δ est une algèbre avec élément unité u appartenant au centre de α et δ est sans éléments nilpotents $\neq 0$.

La démonstration est assez facile d'après les propositions 8, 10.

7. Le problème de Kurosch.

PROPOSITION 11. - Une algèbre α est localement finie (l.f.) si elle contient un idéal b tel que b et α/b sont l.f.

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ une partie finie de α et X la sous-algèbre engendrée. Puisque α/b est l.f. on peut trouver $x_{r+1}, \dots, x_n \in X$ tel

que $\sum_1^n \Phi \bar{x}_1$, $\bar{x}_1 = x_1 + b$, est une sous-algèbre de α/b . On a $x_i x_j = \sum \gamma_{ijk} x_k + z_{ij}$, $\gamma_{ijk} \in \Phi$, $z_{ij} \in X \cap b$. Soit M la sous-algèbre engendrée par les éléments z_{ij} , $x_k z_{ij}$, $z_{ij} x_k$, $x_k z_{ij} x_l$. Puisque $M \subseteq b$, $\dim M < \infty$. On vérifie que M est un idéal dans X . Puisque $x_i x_j - \sum \gamma_{ijk} x_k \in M$, X/M est de dimension finie. Par conséquent $\dim X < \infty$.

Soient b et c des idéaux l.f. de α . Puisque $(b + c)/b \cong b/(b \cap c)$ est l.f., $b + c$ est l.f.. Il suit que la somme $\mathcal{F}$ de tous les idéaux l.f. de α est l.f. On appelle $\mathcal{F}$ le noyau localement fini de α . D'après la proposition 11, il est clair que le noyau l.f. de $\alpha/\mathcal{F}$ est nul. Nous avons besoin aussi de la proposition suivante :

PROPOSITION 12. - Le noyau l.f. contient tout idéal à droite (à gauche) l.f.

Soit $\mathcal{I}$ un idéal à droite l.f. et posons $b = \alpha \mathcal{I} + \mathcal{I}$, l'idéal engendré par $\mathcal{I}$. Soit $\{x_1\}$ une partie finie de b . Alors

$$x_1 = \sum a_{ij} u_{ij} + u_1, \quad a_{ij} \in \alpha, \quad u_1, u_{ij} \in \mathcal{I}.$$

Posons $u_{ijk} = u_1 a_{jk}$, $u_{ijk\ell} = u_{ij} a_{k\ell} \in \mathcal{I}$. Les éléments $u_1, u_{ij}, u_{ijk}, u_{ijk\ell}$ engendrent une sous-algèbre avec une base finie $y_1, y_2, \dots, y_m$. On voit que la sous-algèbre X engendrée par les x_1 est contenue dans l'espace engendré par les y_ℓ et les $a_{ij} y_\ell$. Alors $\dim X < \infty$.

THÉORÈME 5 (KAPLANSKY). - Toute PI-algèbre qui est algébrique est localement finie.

On voit facilement qu'il suffit de démontrer que le noyau l.f., $\mathcal{F}$, est $\neq 0$. Considérons d'abord le cas où α est une nilalgèbre. Soit a un élément de α tel que $a \neq 0$, $a^2 = 0$ et considérons l'idéal $a\alpha$. Si $a\alpha = 0$, α contient un idéal nilpotent $\neq 0$ et $\mathcal{F}$ est $\neq 0$. Supposons ensuite que $a\alpha \neq 0$. On a une identité de la forme $f(x_2, \dots, x_d)x_1 + g(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0$ pour α tel que tout terme de g contient x_1 avant la dernière place. Alors si on pose $x_1 = a_1 = a$, $x_i = a_i \in a\alpha$, $i > 1$ on obtient $g(a_1, \dots, a_d) = 0$ et par conséquent $f(a_2, \dots, a_d)a = 0$. Soit ∂ l'annulateur à gauche de $a\alpha$. Alors on voit que $a\alpha/\partial$ satisfait à une identité de degré $\leq d - 1$. Par induction sur d , on voit que $a\alpha/\partial$ est l.f. Puisque $\partial^2 = 0$, $a\alpha$ est l.f. et le noyau l.f. de α est $\neq 0$. Considérons ensuite le cas où α ne contient aucun élément nilpotent $\neq 0$. Nous pouvons supposer aussi que α possède

un nombre fini de générateurs $x_1, x_2, \dots, x_r$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal primitif dans α . L'algèbre $\alpha/\mathfrak{P}$ est de dimension finie sur le centre Σ et puisque elle a un nombre fini de générateurs $\dim \alpha/\mathfrak{P} \text{ (sur } \Phi) < \infty$. On peut trouver alors des éléments $y_1, y_2, \dots, y_m$ tels que,

$$x_i = \sum \alpha_{ij} y_j + z_i, \quad \alpha_{ij} \in \Phi, \quad z_i \in \mathfrak{P}$$

et

$$y_i y_j = \sum \gamma_{ijk} y_k + z_{ij}, \quad \gamma_{ijk} \in \Phi, \quad z_{ij} \in \mathfrak{P}.$$

On voit facilement que l'idéal $(z_1, z_{ij}) = \mathfrak{P}$. D'après le corollaire au théorème 2 il existe un élément unité u dans $\mathfrak{P}$. Par conséquent $\alpha = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D} \cong \alpha/\mathfrak{P}$ est de dimension finie. Ainsi on voit dans ce cas aussi que le noyau l.f. est $\neq 0$. Supposons finalement que α est arbitraire. Le premier résultat donne une réduction au cas où α est semi-simple. D'après le théorème 4, α contient un idéal matriciel $\mathfrak{b} = \mathfrak{D}_n$ où $\mathfrak{D}$ est sans éléments nilpotents. Alors $\mathfrak{D}$ est l.f. Il suit que $\mathfrak{b}$ est l.f. Le noyau l.f. est donc encore $\neq 0$.

Le même raisonnement donne le résultat suivant :

THÉOREME 6. - Soit α une algèbre algébrique d'indice fini tel que $\alpha/\mathfrak{P}$ soit une PI-algèbre pour tout idéal primitif de α . Alors α est l.f.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMITSUR (A.S) and LEVITZKI (J.). - Minimal identities for algebras, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 449-463.
- [2] JACOBSON (Nathan). - Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, Annals of Math., Series 2, t. 46, 1945, p. 695-707.
- [3] KAPLANSKY (Irving). - On a problem of Kurosch and Jacobson, Bull. Amer. math. Soc., t. 52, 1946, p. 496-500.
- [4] KAPLANSKY (Irving). - Rings with a polynomial identity, Bull. Amer. math. Soc., t. 54, 1948, p. 575-580.
- [5] KAPLANSKY (Irving). - Groups with representations of bounded degree, Canadian J. of Math., t. 1, 1949, p. 105-112.
- [6] KAPLANSKY (Irving). - Topological representation of algebras, II., Trans. Amer. math. Soc., t. 68, 1950, p. 62-75.
- [7] KAPLANSKY (Irving). - The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 219-255.
- [8] KUROSCH (A.). - Ringtheoretische Probleme, die mit dem Burnsidischen Problem über periodische Gruppen in Zusammenhang stehen, Bull. Acad. Sc. URSS, Série mathématique, t. 5, 1941, p. 233-240.
- [9] LEVITZKI (Jakob). - On a problem of A. Kurosch, Bull. Amer. math. Soc., t. 52, 1946, p. 1033-1035.
- [10] LEVITZKI (Jakob). - On the structure of algebraic algebras and related rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 74, 1953, p. 384-409.
- [11] MAL'ČEV (A. I.). - O predstavlenijakh beskonečnykh algebr, Recueil math. Acad. Sc. Moscou (Mat. Sbornik), N.S., t. 13, 1943, p. 263-286.

[Juin 1958]