ANDRÉ WEIL

Théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions thêta

Séminaire N. Bourbaki, 1948-1951, exp. n° 16, p. 91-100
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__91_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1949)

THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES FONCTIONS THÊTA

(d'après des mémoires de POINCARÉ et FROBENIUS).

par André WEIL

RIEMANN savait déjà, et avait communiqué à HERMITE, que les périodes de toute fonction méromorphe 2n fois périodique de n variables satisfont à certaines relations et inégalités qui permettent de former, à partir de ces périodes, des séries thêta ; sans doute s'était-il servi de ce résultat pour exprimer, au moyen de telles séries, toutes les fonctions en question. Ce résultat a fait l'objet de travaux de WEIERSTRASS, de PICARD et POINCARÉ, d'APPELL, puis de nouveau de POINCARÉ. Il a une importance fondamentale pour la géométrie des variétés abéliennes (sur le corps complexe).

1. La dernière démonstration de POINCARÉ [2] , qui s'apparente à sa démonstration du théorème de Cousin, peut être simplifiée beaucoup au moyen d'un lemme qui joue aussi un rôle essentiel dans les démonstrations modernes des théorèmes de de Rham :

LEMME 1. - Soit V une variété compacte indéfiniment différentiable. Soit (U_i) un recouvrement ouvert fini de V . Supposons donnée dans $U_i \cap U_j$, chaque fois que cette intersection n'est pas vide, une forme différentielle ζ_{ij} de degré p , à coefficients indéfiniment différentiables, de telle sorte qu'on ait $\zeta_{ik} = \zeta_{ij} + \zeta_{jk}$ dans $U_i \cap U_j \cap U_k$ chaque fois que ce dernier ensemble n'est pas vide (ce qui implique $\zeta_{ii} = 0$, $\zeta_{ji} = -\zeta_{ij}$). Alors il existe des formes ζ_i de degré p , respectivement définies dans les U_i , à coefficients indéfiniment différentiables, telles que l'on ait $\zeta_{ij} = \zeta_i - \zeta_j$ dans U_i U_j chaque fois que cet ensemble n'est pas vide.

En effet, soit (F_i) une partition différentiable de l'unité, subordonnée au recouvrement (U_i). On posera $\zeta_i = \sum_j F_j \zeta_{ij}$, étant entendu que chaque terme du second membre est à remplacer par 0 en tout point où il n'est pas défini ([1]).

Soient E un espace vectoriel de dimension m sur les réels, D un sous-groupe discret de E , de rang m ; le groupe quotient E/D est alors un tore T^m , qui peut être considéré comme variété différentiable de dimension m . Pour un choix

([1]) L'énoncé du lemme ci-dessus, ainsi que sa démonstration, représentent une amélioration, due à N. HAMILTON, du texte de l'exposé de 1949 [Juin 1957].

donné d'un système de coordonnées $x_1, \dots, x_m$ dans E, les différentielles dx_i définissent dans T^m des formes différentielles de degré 1, et toute forme ζ sur le tore peut être exprimée au moyen de celles-là, sous la forme $\sum_{(i)} f_{i_1 \dots i_p}(x) \cdot dx_{i_1 \dots i_p}$; par $I(\zeta)$, on désignera la forme obtenue en remplaçant, dans cette expression, chaque coefficient par sa valeur moyenne sur le tore ; de même, si D est un opérateur différentiel (par exemple $D = \frac{\partial}{\partial x_i}$), on désignera par $D\zeta$ la forme obtenue en remplaçant, dans l'expression ci-dessus de ζ, chaque coefficient $f_{(i)}$ par $Df_{(i)}$. On aura $I(\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}) = 0$ (intégration par parties).

LEMME 2. - Soit $\| a_{ij} \|$ la matrice d'une forme quadratique définie positive ; soit $\Delta = \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Soit λ une forme sur le tore, à coefficients (réels ou complexes) indéfiniment différentiables. Alors, pour qu'il existe une forme μ, à coefficients indéfiniment différentiables, telle que $\Delta \mu = \lambda$, il faut et il suffit que $I(\lambda) = 0$; si $\lambda = 0$, la forme μ est alors à coefficients constants.

Il suffit évidemment de faire la démonstration pour chaque coefficient séparément, c'est-à-dire pour des fonctions. Si on prend pour base, dans E, un système de m générateurs du groupe D, toute fonction indéfiniment différentiable sur le tore possède une série de Fourier $\sum_{(n)} c_{n_1 \dots n_m} e(\sum n_i x_i)$ (en posant $e(t) = e^{2\pi i t}$), absolument et uniformément convergente, et indéfiniment différentiable terme à terme. Le résultat s'ensuit aussitôt.

Supposons maintenant que E soit l'espace C^n (espace vectoriel de dimension n sur le corps C des complexes), d'où $m = 2n$. Les z_h désignant les coordonnées complexes dans C^n, tout système de coordonnées réelles dans cet espace sera formé de combinaisons linéaires des z_h, $\bar{z}_h$; sur le tore T^{2n}, on pourra donc exprimer les formes différentielles au moyen des dz_h, $d\bar{z}_h$. Le lemme 2 s'appliquera pour

$$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial z_h \partial \bar{z}_h} .$$

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans C^n, admettant pour périodes tous les vecteurs du groupe D ; on peut aussi considérer f comme fonction partout méromorphe sur le tore T^{2n} , celui-ci étant considéré comme variété à structure analytique complexe. En vertu de résultats élémentaires classiques, on peut, au voisinage de tout point de C^n (ou de T^{2n}) écrire f comme quotient φ/ψ de fonctions holomorphes premières entre elles (dans l'anneau des fonctions holomorphes au point considéré, c'est-à-dire sans facteur commun non inversible dans cet anneau). Si on recouvre T^{2n} par des ouverts U_i , dans chacun desquels f possède une telle expression φ_i/ψ_i , alors, dans $U_i \cap U_j$, la fonction $\varphi_i/\varphi_j = \psi_i/\psi_j$ sera une fonction holomorphe inversible (sans zéro).

Supposons, plus généralement, qu'on se soit donné dans T^{2n} une variété analytique complexe, de dimension (complexe) n-1 ; on entendra par là une partie fermée de T^{2n} qui, dans un voisinage suffisamment petit de chacun de ses points, puisse être définie par une équation $\varphi = 0$, où φ est holomorphe au point en question. On pourra alors former un recouvrement ouvert fini (U_i) du tore, tel que, dans chaque U_i , la variété en question soit définie par une équation $\varphi_i = 0$, les φ_i étant respectivement holomorphes dans les U_i et telles que φ_i/φ_j soit holomorphe dans $U_i \cap U_j$ quels que soient i , j (ce qui implique, en échangeant i et j , que ces fonctions sont inversibles). On supposera, pour fixer les idées, que les U_i sont images homéomorphes,dans le tore de boules ouvertes U_{io} de C^n (pour la distance $(\sum z_h\bar{z}_h)^{1/2}$). Soit U_{id} la translatée de U_{io} par le vecteur $d \in D$; les U_{id} forment un recouvrement de C^n .

Posons $\zeta_{ij} = d \log(\varphi_i/\varphi_j)$; ce sont des formes différentielles de degré 1, respectivement définies dans les $U_i \cap U_j$, et satisfaisant aux conditions du lemme 1 . Soient donc ζ_i des formes à coefficients indéfiniment différentiables, respectivement définies dans les U_i , et telles que $\zeta_{ij} = \zeta_i - \zeta_j$ dans $U_i \cap U_j$. Puisque ζ_{ij} est à coefficients holomorphes, on a $\dfrac{\partial \zeta_{ij}}{\partial \bar{z}_h} = 0$, donc, quels que soient i , j , h , $\dfrac{\partial \zeta_i}{\partial \bar{z}_h} = \dfrac{\partial \zeta_j}{\partial \bar{z}_h}$ dans $U_i \cap U_j$; on peut donc définir une forme ζ_h de degré 1 , à coefficients indéfiniment différentiables sur le tore, comme étant égale à $\dfrac{\partial \zeta_i}{\partial \bar{z}_h}$ dans U_i quel que soit i. Posons $\lambda = \sum_h \dfrac{\partial \zeta_h}{\partial z_h}$ on aura $\lambda = \Delta \zeta_i$ dans U_i quel que soit i . On a $I(\lambda) = 0$, donc (lemme 2) il existe μ tel que $\Delta\mu = \lambda$. Posons $\zeta'_i = \zeta_i - \mu$; ce sont des formes respectivement définies dans les U_i , à coefficients indéfiniment différentiables, satisfaisant à $\Delta \zeta_i = 0$, et à $\zeta_{ij} = \zeta'_i - \zeta'_j$ dans $U_i \cap U_j$.

Ecrivons ζ_i sous la forme $\sum u_{ih}\ dz_h + \sum v_{ih}\ d\bar{z}_h$; par définition, $\Delta\zeta_i' = 0$ signifie qu'on a $\Delta u_{ih} = \Delta v_{ih} = 0$; si donc on pose $\zeta_i'' = \sum u_{ih}\ dz_h$, on aura encore $\Delta\zeta_i'' = 0$; et, comme les ζ_{ij} ne contiennent que les dz_h (et non les $d\bar{z}_h$), on aura encore $\zeta_{ij} = \zeta_i'' - \zeta_j''$ dans $U_i \cap U_j$ quels que soient i , j . De plus, on a $d\zeta_{ij} = 0$, donc, dans $U_i \cap U_j$, $d\zeta_i'' = d\zeta_j''$; on peut donc définir une forme ω (de degré 2) sur le tore , comme étant égale à $d\zeta_i''$ dans U_i quel que soit i . Comme les opérateurs d et Δ permutent, on aura $\Delta\omega = 0$; par suite ω est à coefficients constants, donc de la forme

$$\sum_{h<k} a_{hk}\ dz_h\ dz_k + \sum_{h,k} b_{hk}\ d\bar{z}_h\ dz_k \qquad \text{avec} \quad a_{hk}\ ,\ b_{hk} \quad \text{constants.}$$

Cela posé, considérons, dans la boule U_{id} dans C^n , la forme $\eta_{id} = \zeta_i'' - \sum_{h<k} a_{hk}\ z_h\ dz_k - \sum_{h,k} b_{hk}\ \bar{z}_h\ dz_k$; on a $d\eta_{id} = 0$ de sorte qu'on peut écrire $\eta_{id} = df_{id}$, où f_{id} est une fonction dans U_{id} ; de plus, comme η_{id} ne contient que les dz_h (et non les $d\bar{z}_h$) , f_{id} est une fonction holomorphe dans U_{id} . Alors, chaque fois que deux boules U_{id} , $U_{jd'}$ auront une intersection non vide, on aura, dans cette intersection, $d\log(\varphi_i/\varphi_j) = d(f_{id} - f_{jd'})$, ce qui implique que la fonction $\varphi_i . e^{-f_{id}}$ holomorphe dans U_{id} , admet, dans $U_{jd'}$, un prolongement analytique qui ne diffère de la fonction $\varphi_j . e^{-f_{jd'}}$ que par un facteur constant. Chacune de ces fonctions admet donc un prolongement analytique $F(z)$ à tout l'espace C^n , qui est une fonction entière ; dans chacune des boules U_{id} , $F(z)$ ne diffère de φ_i que par un facteur qui est une fonction holomorphe inversible ; et, quels que soient d , $d' \in D$, la différentielle $d\log[F(z+d')/F(z+d)] = \eta_{id} - \eta_{id'}$ est de la forme $\sum c_h\ dz_h$ avec des c_h constants.

On appellera <u>fonction thêta</u>, relative au sous-groupe discret D (de rang $2n$) de l'espace C^n , toute fonction entière $F(z)$ telle que, pour tout $d \in D$, $F(z+d)/F(z)$ soit de la forme $e(\sum c_h z_h + b)$ ("fonctions intermédiaires" dans la terminologie de POINCARÉ, "Jacobische Functionen" dans celle de FROBENIUS). On a donc démontré que <u>toute sous-variété analytique complexe, de dimension complexe</u> $n-1$, <u>du tore</u> $T^{2n} = C^n/D$, <u>est la variété des zéros d'une fonction thêta</u> (et, plus précisément, d'une fonction thêta qui s'annule avec la multiplicité 1 sur chaque composante irréductible de la variété donnée).

Le groupe D étant donné, les fonctions thêta qui y appartiennent forment un monoïde multiplicatif, dont les éléments inversibles sont les fonctions thêta sans zéros. Celles-ci sont de la forme $e[P(z)]$, où $P(z)$ est une fonction entière telle que $P(z+d) - P(z)$ soit une fonction linéaire des z_h quel que soit $d \in D$; les dérivées secondes de $P(z)$ sont donc des fonctions entières périodiques, donc bornées, donc constantes, et par suite $P(z)$ est un polynome du 2e degré ; réciproquement, si $P(z)$ est tel, $e[P(z)]$ est une fonction thêta pour tout groupe D ; une telle fonction sera dite triviale. Ce qui précède démontre aussi le théorème suivant : toute fonction méromorphe dans C^n, admettant pour périodes tous les vecteurs de D, peut s'écrire, d'une manière et essentiellement d'une seule (c'est-à-dire à des facteurs près qui sont des fonctions thêta triviales) comme quotient de deux fonctions thêta premières entre elles (c'est-à-dire sans facteur commun non trivial dans le monoïde des fonctions thêta appartenant à D).

2. L'étude algébrique des fonctions thêta a été faite en détail par FROBENIUS, dans deux mémoires peu connus mais fort intéressants [1]. Ce qui suit reproduit quelques-uns de ses résultats, obtenus par une voie légèrement différente.

Supposons d'abord, plus généralement, qu'on ait un espace vectoriel de dimension m sur les réels, un sous-groupe discret D de E de rang m, et une fonction $F(x)$ à valeurs complexes, telle que $\log F(x+d)/F(x)$ soit une fonction linéaire (non homogène) quel que soit $d \in D$. Prenons pour base, dans E, un système de m générateurs de D ; en notation matricielle, un point x de E sera une matrice à m lignes et 1 colonne, et un vecteur de D sera une matrice n à composantes entières. Par hypothèse, quel que soit n dans D, on a $F(x+n) = F(x).e[L_n(x)]$, où $L_n(x)$ est linéaire ; on devra avoir $L_{n+n'}(x) \equiv L_n(x+n') + L_{n'}(x) \pmod 1$, d'où on conclut facilement à l'existence de matrices A, A_o, et d'un vecteur b, tels que

$$(1) \qquad F(x+n) = F(x).e[\,{}^tn.A.x + \frac{1}{2}\,{}^tn.A_o.n + {}^tb.n\,] \;;$$

de plus, A_o doit être une matrice symétrique, et on doit avoir $A \equiv A_o \pmod 1$, donc $A \equiv {}^tA \pmod 1$, de sorte que la matrice $E = A - {}^tA$ est une matrice alternée à coefficients entiers.

[Soient n, n' deux vecteurs à composantes entières, x_o un point de E, et P le parallélogramme de sommets x_o, $x_o + n$, $x_o + n'$, $x_o + n + n'$; si on suppose que F ne s'annule en aucun point du contour de P, l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}.\int d \log F(x)$, prise le long de ce contour, a la valeur ${}^tn.E.n'$. Si on est dans des conditions telles que l'équation $F(x) = 0$ définisse dans le tore $T^m = E/D$ une variété Z à m-2 dimensions (réelles), ${}^tn.E.n'$ sera le nombre (algébrique) d'intersections de Z avec le cycle image de P dans T^m, ce qui montre que la matrice E détermine la classe d'homologie (à $m-2$ dimensions) de Z dans le tore].

Supposons maintenant que m soit pair, et qu'on mette sur E une structure d'espace vectoriel sur le corps des complexes ; celle-ci sera complètement définie si on se donne la matrice J correspondant à la multiplication scalaire des vecteurs par i ; on aura $J^2 = -1$. Pour qu'une expression ${}^t a.x$ soit une forme linéaire dans E pour la structure complexe de E, il faut et il suffit qu'on ait ${}^t a.J = i.{}^t a$; de même, si M est une matrice symétrique à coefficients complexes, pour que ${}^t x.M.x$ soit une forme quadratique dans les coordonnées complexes, dans E, il faut et il suffit que $MJ = iM$.

Supposons que $F(x)$ satisfasse à (1) et soit une fonction entière pour la structure complexe de E. Alors, quel que soit n à composantes entières, ${}^t n.A.x$ sera forme linéaire (complexe) dans E, ce qui donne $AJ = iA$. Soit $A = X + iY$, avec X et Y réels ; on aura donc $X = YJ$. Comme $E = A - {}^t A$ est réel, on aura $E = X - {}^t X$, et $Y = {}^t Y$, d'où ${}^t X = {}^t J.Y$, $E = YJ - {}^t J.Y$, $EJ = -Y - {}^t J.Y.J$; on voit donc que $S = EJ$ est une matrice symétrique ; on voit aussi que la forme alternée de matrice E, et la forme quadratique de matrice S, sont invariantes par J, ce qui s'exprime par $E = {}^t J.E.J$, $S = {}^t J.S.J$.

Convenons de dire que la fonction thêta $F(x)$ est <u>normale</u> si l'on a ${}^t A = -\bar{A}$ et $b = \bar{b}$. Alors ${}^t X = -X = -\frac{1}{2}.E$, $Y = -XJ = -\frac{1}{2}.EJ$, d'où $A = \frac{1}{2}.E(1 - iJ) = \frac{1}{2}(E - iS)$. D'autre part, une fonction thêta triviale est de la forme $e(\frac{1}{2}.{}^t x.M.x + {}^t r.x)$, avec $M = {}^t M$, $MJ = iM$, et ${}^t r.J = i.{}^t r$. Si on multiplie la fonction thêta $F(x)$, satisfaisant à (1), par celle-ci on obtient une fonction analogue, pour laquelle A, A_o, b, sont remplacés par $A + M$, $A_o + M$, $b + r$; <u>et la matrice</u> E <u>n'est pas changée</u>. On peut, d'une manière et d'une seule, multiplier $F(x)$ par une fonction triviale de manière à obtenir une fonction normale. Posons en effet $A_1 = \frac{1}{2}(E - iS)$, et $M = A_1 - A$; comme on a $A_1 - {}^t A_1 = E = A - {}^t A$, on a $M = {}^t M$; comme $AJ = iA$ et $A_1 J = iA_1$, on a $MJ = iM$; r sera alors déterminé de manière unique par la condition que ${}^t r.x$ soit une forme linéaire (complexe) ayant une partie imaginaire donnée, à savoir la partie imaginaire de $-{}^t b.x$.

Soit alors $F(x)$ une fonction thêta normale ; A_o aura même partie imaginaire que A, à savoir $-\frac{iS}{2}$; on a dans ces conditions

$$|F(x+n)|^2 = |F(x)|^2 . e^{\pi(2.{}^tn.S.x + {}^tn.S.n)} ,$$

c'est-à-dire que $|F(x)|^2 . e^{-\pi {}^tx.S.x}$ est périodique, donc bornée, de sorte qu'on a $|F(x)|^2 \leq C.e^{\pi . {}^tx.S.x}$. Soit x_0 un vecteur $\neq 0$; le vecteur qui en résulte par multiplication scalaire complexe par $u+iv$ est le vecteur $ux_0 + v.Jx_0$; si donc x_1 est un point fixe, $F[x_1 + ux_0 + v.Jx_0]$ sera une fonction entière de $u+iv$; elle est majorée en valeur absolue par $(Ce^{\pi U})^{1/2}$, avec $U = {}^t(x_1 + ux_0 + vJx_0)\, S(x_1 + ux_0 + vJx_0)$, d'où (en tenant compte de $S = {}^tJ.S.J.$, $SJ = -{}^tJ.S$) :

$$U = (u^2 + v^2)\,{}^tx_0.S.x_0 + 2\,{}^tx_1(uSx_0 + vSJx_0) + {}^tx_1\, Sx_1 .$$

Si donc il existe x_0 tel que ${}^tx_0.S.x_0 < 0$, $F(x)$ est identiquement nulle ; la forme quadratique de matrice S est donc définie ou semi-définie positive ; cela étant, ${}^tx_0.S.x_0 = 0$ entraîne $Sx_0 = 0$, et aussi ${}^t(Jx_0)S(Jx_0) = 0$, donc $SJx_0 = 0$, donc $U = {}^tx_1Sx_1$, de sorte que F est bornée, donc constante, sur toute droite complexe parallèle à la direction déterminée par le vecteur x_0. On en conclut que, si le rang de S est $m' < m$, la fonction $F(x)$ peut s'écrire comme fonction thêta de $m'/2$ variables complexes. Si on exclut ce cas, on voit que S est <u>définie</u> positive.

On a ainsi obtenu des conditions nécessaires pour qu'à des matrices J, E données appartiennent des fonctions thêta ; on doit avoir $J^2 = -1$, E doit être une matrice alternée à coefficients entiers, et EJ doit être la matrice d'une forme définie ou semi-définie positive. Quant à la réciproque, on se bornera, pour simplifier le langage, au cas où E est de rang m, donc EJ définie ; le résultat essentiel est alors le suivant : A, A_0 et b étant tels qu'il a été dit (c'est-à-dire satisfaisant à $AJ = iA$, $A - {}^tA = E$, $A_0 = {}^tA_0 \equiv A \pmod 1$, b quelconque), <u>le nombre de fonctions thêta linéairement indépendantes, satisfaisant</u> à (1), <u>est</u> $(\det E)^{1/2}$ (on notera que $\det E$ est le carré d'un entier, le "pfaffien" de E). FROBENIUS en donne deux démonstrations ; dans la première, on réduit E, par la théorie des diviseurs élémentaires, à la forme $\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$, où D est une matrice diagonale ; cela fait, on voit que les $m/2$ premiers vecteurs de base sont linéairement indépendants, non seulement sur le corps des réels, mais aussi sur le corps des complexes, et qu'en multipliant une fonction thêta satisfaisant à (1) par une fonction thêta triviale convenable, on obtient une fonction admettant ces $m/2$ vecteurs pour périodes ; alors, avec les coordonnées complexes obtenues en prenant ces vecteurs pour base, la fonction peut s'écrire sous forme de série de Fourier ; en l'écrivant ainsi, avec des coefficients indéterminés, on arrive aussitôt au résultat annoncé, ainsi qu'à l'expression des fonctions cherchées au moyen de "séries thêta".

La deuxième démonstration de FROBENIUS peut, avec nos notations, s'exposer comme suit. D'après ce qui précède, on peut se borner aux fonctions normales ($^tA = -\bar{A}$, b réel). A côté de l'espace donné $E = C^n$ où la structure complexe est définie par la matrice J , et où on recherche les fonctions thêta satisfaisant à (1), considérons en un autre, E' , où la structure complexe sera définie par $-J$, et où on recherchera les fonctions thêta satisfaisant à

$$(1') \qquad G(y+m) = G(y).e[-{}^tm.\bar{A}.y - \frac{1}{2}\,{}^tm.\bar{A}_o.m - {}^tb.m] ,$$

et aussi l'espace produit $E \times E'$, de structure complexe $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}$, et l'équation

$$(2) \quad H(x+n\,,\,y+m) = H(x\,,y)\,e[{}^t(n-m)(Ax+\bar{A}y) + \frac{1}{2}\,{}^t(n-m)A_o(n-m) + {}^tb(n-m)].$$

Comme $A_o \equiv A \pmod 1$, on a $A_o = A + C$, avec C entier, d'où $A_o + \bar{A}_o = 2C + A + \bar{A} \equiv E \pmod 2$; on vérifie alors que, si $F(x)$ est solution de (1), et $G(y)$ de (1') , $H(x\,,\,y) = F(x)G(y)e(-{}^tyAx)$ l'est de (2). De plus, les relations $AJ = iA$, $(-{}^tJ)A = {}^t(\bar{A}J) = {}^t(-i\bar{A}) = iA$ montrent que ${}^tyAx$ est une forme bilinéaire complexe sur $E \times E'$; et, si $F(x)$ est une fonction holomorphe dans E , $\overline{F(y)}$ l'est dans E' . On en conclut :

1) la relation $G(y) = \overline{F(y)}$ établit une correspondance biunivoque ("antilinéaire" sur le corps des complexes) entre les fonctions thêta $F(x)$, solutions de (1) , et les fonctions thêta $G(y)$, solutions de (1') ; en particulier, ces deux problèmes ont même nombre N (fini ou non) de solutions linéairement indépendantes sur le corps des complexes ;

2) si $F(x)$, $G(y)$ sont de telles fonctions, $H(x\,,\,y) = F(x)G(y)e(-{}^tyAx)$ est une fonction thêta, solution de (2) ; réciproquement, si $H(x\,,\,y)$ est une fonction thêta, solution de (2) , alors, quel que soit x_o , $H(x_o\,,y)e({}^tyAx_o)$ est une fonction thêta solution de (1') dans E', et, quel que soit y_o , $H(x\,,\,y_o)\,e({}^ty_oAx)$ est une fonction thêta solution de (1) dans E ; on en conclut facilement que le nombre de fonctions thêta $H(x\,,\,y)$ dans $E \times E'$, solutions de (2) , linéairement indépendantes sur le corps des complexes, est N^2 .

Posons $w = \frac{1}{2}[(1-iJ)x + (1+iJ)y]$; les composantes du vecteur w sont des formes linéaires complexes dans $E \times E'$ (car $(1-iJ)J = i(1-iJ)$) , et forment dans cet espace un système de coordonnées complexes (car les w , $\bar{w}$ sont linéairement indépendants). Si, au lieu de $H(x\ ,\ y)$, nous écrivons $H(w)$, $H(w)$ sera fonction entière des w ; comme $A = \frac{1}{2}(E - iEJ)$, on a $Ax + \bar{A}y = Ew$; si, dans (2) , nous faisons d'abord $n = m$, puis $m = 0$, on voit que (2) équivaut au système des relations :

$$
(2')\qquad
\begin{aligned}
&H(w + n) = H(w)\ ,\\
&H(w + \tfrac{1}{2}(1 - iJ)n) = H(w)e[{}^{t}nEw + \tfrac{1}{2}\,{}^{t}nA_{o}\,n + {}^{t}bn]\,.
\end{aligned}
$$

En vertu de la première, on peut écrire

$$H(w) = \sum c_{(n)}.e({}^{t}n.w)\ ,$$

la sommation étant étendue à tous les vecteurs n à composantes entières. En substituant dans la deuxième relation (2'), on obtient

$$c_{(r+En)} = c_{(r)}.e[\,-\tfrac{1}{2}\,{}^{t}nA_{o}n - bn - \tfrac{1}{2}\,{}^{t}r(1 - iJ)n]\ ,$$

quels que soient r , n à composantes entières. Il s'ensuit que la série écrite pour $H(w)$ est combinaison linéaire, à coefficients constants, des séries

$$H_{r}(w) = e({}^{t}r.w)\ \Theta\,[Ew + b - \tfrac{1}{2}(1 - i\,{}^{t}J)r]\ ,$$

où on a posé

$$\Theta(z) = \sum_{(n)} e(-\tfrac{1}{2}\,{}^{t}n.A_{o}.n + {}^{t}n.z)$$

(sommation étendue à tous les vecteurs n à composantes entières). En raison de $A_{o} \equiv \frac{1}{2}(E - iS)$ (mod 1) , et du fait que S est <u>définie</u> positive, la série thêta est absolument et uniformément convergente dans tout domaine borné, et on a

$$\Theta(z + An) = \Theta(z)e({}^{t}n.z + \tfrac{1}{2}\,{}^{t}n.A_{o}.n)\ ,$$

d'où résulte que chacune des séries $H_{r}(w)$ définit bien une fonction thêta satisfaisant à (2') ; si D est, comme toujours, le groupe des vecteurs n à composantes entières, et si D' désigne le sous-groupe des vecteurs de la forme En , où n est à composantes entières, D/D' est un groupe fini, d'ordre égal à $\det E$; on obtiendra un système complet de fonctions $H_{r}(w)$ linéairement indépendantes en prenant pour r un système complet de représentants de D/D' dans D . On a donc $N^{2} = \det E$; on a aussi, en donnant à y une valeur constante, le moyen d'exprimer par des séries thêta les fonctions thêta $F(x)$ satisfaisant à (1) dans l'espace E .

Les mémoires de FROBENIUS contiennent encore un grand nombre de résultats intéressants, qu'on ne peut mentionner ici. Notons seulement qu'on déduit aussitôt, de ce qui précède, que, si on se donne $n + 2$ fonctions thêta de n variables complexes, satisfaisant à une même équation (1) , les monômes de degré suffisamment élevé formés avec ces fonctions ne peuvent être linéairement indépendants ; il s'ensuit, d'après ce qu'on a vu, que $n + 1$ fonctions méromorphes, $2n$ fois périodiques, de n variables complexes, ne peuvent être algébriquement indépendantes. Un raisonnement analogue permet de voir que, s'il existe des fonctions méromorphes de n variables, admettant $2n$ périodes données, qui ne puissent s'écrire comme fonctions de combinaisons linéaires de ces variables en nombre moindre que n , ces fonctions forment un corps de fonctions algébriques de dimension n (extension algébrique de degré fini d'une extension transcendante pure de dimension n du corps des constantes).

La plupart des résultats connus sur les fonctions et les variétés abéliennes (dans le "cas classique" où le corps des constantes est le corps des complexes) se déduit très facilement de ce qui précède, et de la connaissance de l'anneau de cohomologie sur le tore.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FROBENIUS (G.). - Über die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Funktionen, J. für die reine und angew. Math., t. 97, 1884, p. 16-48 et p. 188-223.

[2] POINCARE (Henri). - L'oeuvre mathématique de Weierstrass, Acta Mathematica, t. 22, 1899, p. 1-178.