Astérisque

HENRI CARTAN

Les travaux de Koszul, II

Astérisque , tome 1 (1948-1951), p. 45-52
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__45_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1949)

LES TRAVAUX DE KOSZUL, II.

par Henri CARTAN.

N-B - Le lecteur est renvoyé à l'exposé précédent pour les notions de base. Nous rappelons ici quelques notations essentielles.

1. Rappel de notations.

$\mathfrak{a}$: algèbre de Lie sur un corps K ; éléments x , y , ...

$\mathfrak{a}'$: espace vectoriel dual de $\mathfrak{a}$; éléments x' , y', ...

$\Lambda(\mathfrak{a})$: algèbre extérieure de $\mathfrak{a}$; éléments α , β , ...

$\Lambda(\mathfrak{a}')$: algèbre extérieure de $\mathfrak{a}'$; éléments α' , β', ...

Opérateur $\theta(x)$ (transformation infinitésimale définie par $x \in \mathfrak{a}$) dans $\Lambda(\mathfrak{a})$; on notera désormais $\theta^*(x)$ (et non plus $\theta(x)$) l'opérateur transposé de $-\theta(x)$, qui opère dans $\Lambda(\mathfrak{a}')$.

Opérateur $i(x)$ (produit intérieur par $x \in \mathfrak{a}$) dans $\Lambda(\mathfrak{a}')$; opérateur $e(x)$ (produit extérieur, à gauche, par $x \in \mathfrak{a}$) dans $\Lambda(\mathfrak{a})$; $i(x)$ et $e(x)$ sont transposés.

Opérateurs ∂ (bord) et δ (cobord) dans $\Lambda(\mathfrak{a})$ et $\Lambda(\mathfrak{a}')$ respectivement. δ est transposé de $-\partial$.

Relations entre opérateurs : $\partial\partial = 0$, $\delta\delta = 0$,

(1) $\theta(x) = e(x)\partial + \partial e(x)$, $\theta^*(x) = i(x)\delta + \delta i(x)$;

∂ et $\theta(x)$ commutent ainsi que δ et $\theta^*(x)$.

L'espace vectoriel d'homologie $H(\mathfrak{a})$ est défini par ∂ opérant dans $\Lambda(\mathfrak{a})$; l'algèbre de cohomologie $H(\mathfrak{a}')$ est définie par δ opérant dans $\Lambda(\mathfrak{a}')$ (on a une structure multiplicative sur $H(\mathfrak{a}')$ parce que δ est une antidérivation). Les espaces vectoriels $H(\mathfrak{a})$ et $H(\mathfrak{a}')$ sont canoniquement en dualité.

2. Composée directe de deux algèbres de Lie.

$\mathfrak{a}$ est composée directe de 2 sous-algèbres $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ si :

1) l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ est somme directe des sous-espaces $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$;

2) $[x, y] = 0$ pour $x \in \mathfrak{b}$ et $y \in \mathfrak{c}$. Notation : $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$.

Alors $\Lambda(\mathfrak{a})$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel $\Lambda(\mathfrak{b}) \otimes \Lambda(\mathfrak{c})$;

si on transporte à ce produit tensoriel la structure multiplicative de $\Lambda(\mathfrak{a})$, on trouve

$$(\beta_1 \otimes \gamma_1).(\beta_2 \otimes \gamma_2) = (-1)^{pq}(\beta_1 \wedge \beta_2) \otimes (\gamma_1 \wedge \gamma_2), \text{ où } p = \deg \beta_2, \ q = \deg \gamma_1 .$$

(notion de produit tensoriel d'algèbres graduées). Enfin, l'opérateur bord ∂ de $\Lambda(\mathfrak{b}) \otimes \Lambda(\mathfrak{c})$ satisfait à

$$\partial(\beta \otimes \gamma) = (\partial\beta) \otimes \gamma + \bar{\beta} \otimes (\partial\gamma) \qquad (\bar{\beta} = (-1)^p \beta \text{ si } \beta \text{ de degré } p)$$

Il en résulte que l'espace vectoriel $H(\mathfrak{a})$ s'identifie au produit tensoriel $H(\mathfrak{b}) \otimes H(\mathfrak{c})$.

De même, $\Lambda(\mathfrak{a}')$ s'identifie au produit tensoriel d'algèbres graduées $\Lambda(\mathfrak{b}') \otimes \Lambda(\mathfrak{c}')$. La dualité entre $\Lambda(\mathfrak{b}) \otimes \Lambda(\mathfrak{c})$ et $\Lambda(\mathfrak{b}') \otimes \Lambda(\mathfrak{c}')$ est définie par

$$\langle \beta \otimes \gamma, \beta' \otimes \gamma' \rangle = \langle \beta, \beta' \rangle . \langle \gamma, \gamma' \rangle .$$

L'opérateur δ, dans $\Lambda(\mathfrak{b}') \otimes \Lambda(\mathfrak{c}')$, satisfait à

$$\delta.(\beta' \otimes \gamma') = (\delta\beta') \otimes \gamma' + \bar{\beta}' \otimes (\delta\gamma'),$$

et l'algèbre de cohomologie $H(\mathfrak{a}')$ s'identifie au produit tensoriel des algèbres graduées $H(\mathfrak{b}')$ et $H(\mathfrak{c}')$.

Si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont les algèbres de Lie de deux groupes de Lie compacts connexes G_1 et G_2, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$ est l'algèbre de Lie du groupe produit $G_1 \times G_2$; on retrouve le théorème suivant lequel l'algèbre de cohomologie (à coefficients réels) de $G_1 \times G_2$ s'identifie canoniquement au produit tensoriel des algèbres de cohomologie de G_1 et de G_2.

3. Algèbres de Lie semi-simples.

Chaque fois qu'il s'agira de semi-simplicité, le corps K sera supposé de caractéristique nulle. On a les caractérisations suivantes, toutes équivalentes, des algèbres de Lie semi-simples :

(a) tout idéal de carré nul (i.e. : donnant naissance à un sous-groupe abélien invariant) est réduit à $\{0\}$;

(b) la forme quadratique $\mathrm{Tr}(\theta(x)\,\theta(y))$ est régulière ;

(c) $\mathfrak{a}$ est composée directe d'algèbres simples (i.e : algèbre de dimension > 1, sans idéal autre qu'elle-même et $\{0\}$) ; une telle décomposition est alors unique. En principe, la détermination de $H(\mathfrak{a})$ et $H(\mathfrak{a}')$ pour $\mathfrak{a}$ semi-simple se ramène donc à celle de l'homologie et de la cohomologie des algèbres simples ;

(d) toute représentation de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E (de dimension finie sur K) est complètement réductible (i.e : tout sous-espace invariant possède un supplémentaire invariant).

Toute algèbre quotient d'une algèbre semi-simple est semi-simple. On en déduit : si $\mathfrak{a}$ est semi-simple, $\mathfrak{a}$ est identique à l'algèbre "dérivée" $\mathfrak{a}^2$. En particulier, une $\mathfrak{a}$ semi-simple est unimodulaire (cf. 1er exposé).

Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, $x \to \theta(x)$ est une représentation de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\Lambda(\mathfrak{a})$; de même, $x \to \theta^*(x)$ est une représentation dans l'algèbre des endomorphismes de $\Lambda(\mathfrak{a}')$. Ces représentations s'annulent sur le centre C de $\mathfrak{a}$; on sera sûr qu'elles sont complètement réductibles si l'algèbre $\mathfrak{a}/C$ est semi-simple, autrement dit si $\mathfrak{a}$ est composée directe d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre abélienne. Une telle algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ sera dite réductive ; nous nous intéresserons particulièrement à l'homologie et la cohomologie des algèbres de Lie réductives. L'algèbre de Lie d'un groupe compact est toujours réductive.

4. Homologie des algèbres de Lie réductives.

Dans la représentation $x \to \theta(x)$ de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre des endomorphismes de $\Lambda(\mathfrak{a})$, le $\theta(x)$ d'un cycle est un bord, d'après (1) ; de même, le $\theta^*(x)$ d'un cocycle est un cobord.

LEMME 1. - Soit une représentation complètement réductible $x \to \tau(x)$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, de dimension finie, muni d'un opérateur d tel que $dd = 0$; supposons que $\tau(x)d = d\tau(x)$, et que $\tau(x)$ transforme tout "cycle" en un "bord". Soit F le sous-espace des éléments "invariants" de E (i.e : éléments α tels que $\tau(x).\alpha = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$). Alors F est stable pour d, et l'homomorphisme canonique du groupe d'homologie H(F) dans le groupe d'homologie H(E) est un isomorphisme du premier groupe sur le second.

Appliquons ceci aux représentations $x \to \theta(x)$ et $x \to \theta^*(x)$ d'une algèbre réductive $\mathfrak{a}$; F devient $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{J}'$), sous-algèbre des chaînes (resp. cochaînes) invariantes. Or ∂ est nul pour tout élément de $\mathfrak{J}$, et δ est nul pour tout élément de $\mathfrak{J}'$, en vertu des formules

$$2\partial = \sum_k i(x'_k)\,\theta(x_k) \quad , \quad 2\delta = \sum_k e(x'_k)\,\theta^*(x_k)$$

(x_k et x'_k bases duales ; voir 1er exposé). Donc $H(\mathfrak{J})$ s'identifie à $\mathfrak{J}$,

$H(\mathfrak{I}')$ à $\mathfrak{I}'$, et le lemme montre que $\mathfrak{I} \to H(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{I}' \to H(\mathfrak{a}')$ sont des isomorphismes sur (il y a une chaîne invariante et une seule dans chaque classe d'homologie ; id. pour cochaînes et cohomologie). De plus $\mathfrak{I}' \to H(\mathfrak{a}')$ est un isomorphisme pour la structure d'algèbre ; on ne peut pas en dire autant de $\mathfrak{I} \to H(\mathfrak{a})$, puisque $H(\mathfrak{a})$ n'a pas de structure multiplicative, mais l'identification de $H(\mathfrak{a})$ à $\mathfrak{I}$, qui possède une structure d'algèbre, définit précisément une structure multiplicative sur $H(\mathfrak{a})$, et permet de parler de l'algèbre d'homologie d'une algèbre de Lie réductive. On démontre que si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact connexe, la structure multiplicative de $H(\mathfrak{a})$ est précisément celle définie par le "produit de Pontrjagin".

REMARQUE. - Sur $\mathfrak{a}$ réductive existe au moins une forme quadrative invariante régulière ; elle définit un isomorphisme de l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{a})$ sur l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{a}')$, et de $\mathfrak{I}$ sur $\mathfrak{I}'$; donc $H(\mathfrak{a})$ et $H(\mathfrak{a}')$ sont des algèbres isomorphes (non canoniquement).

5. Les trois premiers nombres de Betti d'une algèbre de Lie semi-simple.

Remarque préliminaire : pour que α' soit une cochaîne invariante, il faut et il suffit que α' et $i(x).\alpha'$ soient des cocycles quel que soit $x \in \mathfrak{a}$ (conséquence de (1)).

Le premier nombre de Betti est nul : car la relation

$$\langle x \wedge y \, , \, \delta x' \rangle = - \langle [x, y] \, , \, x' \rangle$$

montre que si x' est un cocycle, x' est orthogonal à l'algèbre dérivée $\mathfrak{a}^2$, donc est nul si $\mathfrak{a}$ est semi-simple.

Le deuxième nombre de Betti est nul : toute cochaîne invariante α' de degré 2 est nulle, car $i(x).\alpha'$ est un cocycle de degré 1 pour tout x, donc est nul.

Le troisième nombre de Betti est égal à la dimension de l'espace vectoriel des formes quadratiques invariantes, et, en particulier, il est toujours ≥ 1.

Une forme quadratique invariante est une forme bilinéaire $f(x, y)$ symétrique, telle que $f(\theta(z).x, y) + f(x, \theta(z).y) = 0$ pour tout $z \in \mathfrak{a}$. On définit comme suit un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{I}'^3$ des cochaînes invariantes de degré 3 sur l'espace des formes quadratiques invariantes ; soit donnée α' invariante de degré 3 ; pour chaque $x \in \mathfrak{a}$, $i(x).\alpha'$ est un cocycle de degré 2, donc cohomologue à 0 ; il existe donc une cochaîne x' de degré 1, et une seule, telle que $\delta x' = i(x).\alpha'$; l'application $x \to x'$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}'$ définit une forme bilinéaire $f(x, y) = \langle y, x' \rangle$. On a

$$f(x, [y, z]) = - \langle x \wedge y \wedge z , \alpha' \rangle \tag{2}$$

et f est symétrique et invariante. Réciproquement, si f est une forme bilinéaire symétrique et invariante, il existe une cochaîne α' et une seule telle que (2) ait lieu, et cette cochaîne est invariante. C.Q.F.D.

REMARQUE. - Cette réciproque vaut même sans supposer la semi-simplicité. En particulier, la forme bilinéaire symétrique et invariante $\operatorname{Tr} \theta(x)\, \theta(y)$ définit une cochaîne invariante de degré 3, la "cochaîne de Cartan".

COROLLAIRE. - Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie simple telle que l'unicité (à un facteur scalaire près) d'une forme quadratique invariante soit assurée, le troisième nombre de Betti de $\mathfrak{a}$ est égal à 1. C'est notamment le cas de l'algèbre d'un groupe de Lie compact connexe ; ou d'une algèbre de Lie simple sur un corps algébriquement clos.

6. Homomorphisme d'une algèbre de Lie dans une autre.

Soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ deux algèbres de Lie quelconques (sur le même corps K) et φ un homomorphisme de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$; φ se prolonge en un homomorphisme, noté encore φ , de l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{b})$ dans l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{a})$. Le transposé φ^* (homomorphisme de $\mathfrak{a}'$ dans $\mathfrak{b}'$) se prolonge en un homomorphisme, noté encore φ^* , de l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{a}')$ dans l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{b}')$; de plus, φ et φ^* prolongés sont deux applications transposées. On a $\partial\varphi = \varphi\partial$, $\delta\varphi^* = \varphi^*\delta$, d'où un homomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $H(\mathfrak{b})$ dans $H(\mathfrak{a})$, et un homomorphisme $\tilde{\varphi}^*$ de $H(\mathfrak{a}')$ dans $H(\mathfrak{b}')$, transposé de $\tilde{\varphi}$. L'homomorphisme $\tilde{\varphi}^*$ est aussi un homomorphisme pour les structures multiplicatives.

THÉORÈME 1. - Si les algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont réductives, $\tilde{\varphi}$ est un homomorphisme pour les structures multiplicatives de $H(\mathfrak{b})$ et $H(\mathfrak{a})$.

Ceci se prouve à partir du

LEMME 2. - Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie quelconque ; alors quelles que soient les chaînes α et β de $\Lambda(\mathfrak{a})$, la chaîne

$$\partial.(\alpha \wedge \beta) + (\partial\alpha) \wedge \beta - \bar{\alpha} \wedge (\partial\beta)$$

est orthogonale aux cochaînes invariantes.

Cela étant, considérons une algèbre de Lie réductive, et montrons que si α et

$\bar{\alpha} \wedge \partial\gamma$ sont des cycles, alors $\bar{\alpha} \wedge \partial\gamma$ est un bord : en effet, d'après le lemme 2 , $\partial(\alpha \wedge \gamma) - \bar{\alpha} \wedge \partial\gamma$ est orthogonal aux cochaînes invariantes, et comme c'est un cycle il est orthogonal aux cobords ; il est donc orthogonal à tous les cocycles, et par suite c'est un bord ; ainsi $\bar{\alpha} \wedge \partial\gamma$ est bien un bord. Soient alors α et β des cycles invariants, et α_1 et β_1 des cycles respectivement homologues à α et β ; montrons que si $\alpha_1 \wedge \beta_1$ est un cycle, ce cycle est homologue à $\alpha \wedge \beta$; on a

$$\alpha \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta_1 = \alpha \wedge (\beta - \beta_1) + (\alpha - \alpha_1) \wedge \beta \quad ,$$

et d'après ce qu'on vient de montrer chacun des termes du second membre est un bord.

De là résulte : dans une algèbre de Lie réductive, si α_1 et β_1 sont des cycles tels que $\alpha_1 \wedge \beta_1$ soit un cycle, la classe d'homologie de $\alpha_1 \wedge \beta_1$ est le produit des classes d'homologie de α_1 et de β_1 .

La démonstration du théorème 1 se fait ainsi : β_1 et β_2 étant deux chaînes invariantes de $\Lambda(\mathfrak{b})$, $\varphi(\beta_1)$, $\varphi(\beta_2)$ et $\varphi(\beta_1 \wedge \beta_2)$ sont des cycles de $\Lambda(\mathfrak{a})$, donc la classe de $\varphi(\beta_1 \wedge \beta_2) = \varphi(\beta_1) \wedge \varphi(\beta_2)$ est le produit des classes de $\varphi(\beta_1)$ et $\varphi(\beta_2)$.

7. Théorème de Hopf-Samelson.

Ce théorème se prouve pour les algèbres de Lie réductives, grâce au théorème 1 ci-dessus. Soit d'abord $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie quelconque, et φ l'"application diagonale" de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a} \subset \Lambda(\mathfrak{a}) \otimes \Lambda(\mathfrak{a})$:

$$\varphi(x) = x \oplus x = x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad .$$

D'où un homomorphisme φ de $\Lambda(\mathfrak{a})$ dans $\Lambda(\mathfrak{a}) \otimes \Lambda(\mathfrak{a})$, tel que

$$\varphi(\alpha) = \alpha \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \alpha.$$

L'application transposée φ^* de $\Lambda(\mathfrak{a}') \otimes \Lambda(\mathfrak{a}')$ dans $\Lambda(\mathfrak{a}')$ est un homomorphisme d'algèbres (paragraphe 6) ; il en résulte facilement que

$$\varphi^*(\alpha' \otimes \beta') = \alpha' \wedge \beta' \quad .$$

L'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $H(\mathfrak{a})$ dans $H(\mathfrak{a}) \otimes H(\mathfrak{a})$ satisfait à

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \tilde{\alpha} \text{ , } \tilde{\alpha} \text{ désignant une classe d'homologie.}$$

L'homomorphisme transposé $\tilde{\varphi}^*$ est un homomorphisme d'algèbres, et satisfait à

$$\tilde{\varphi}^*(\tilde{\alpha}' \otimes \tilde{\beta}') = \tilde{\alpha}' . \tilde{\beta}' \qquad \text{(produit dans } H(\mathfrak{a}')) .$$

Si maintenant $\mathfrak{a}$ est une algèbre réductive, l'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ est aussi un homomorphisme pour les structures multiplicatives de $H(\mathfrak{a})$ et de $H(\mathfrak{a}) \otimes H(\mathfrak{a})$.

On se trouve donc dans la situation algébrique suivante :

A algèbre graduée de rang fini sur un corps K de caractéristique nulle dont la loi de multiplication satisfait aux conditions de commutation et anticommutation habituelles pour une algèbre extérieure ; A' algèbre graduée isomorphe (non canoniquement) à A, et en dualité canonique avec A ; les éléments de degré 0 de A (resp. de A') se composent des multiples de l'unité et sont identifiés aux éléments de K. La dualité entre $A \otimes A$ et $A' \otimes A'$ étant définie par $\langle \alpha \otimes \beta , \alpha' \otimes \beta' \rangle = \langle \alpha , \alpha' \rangle . \langle \beta , \beta' \rangle$, l'homomorphisme canonique $\tilde{\varphi}^*$ de $A' \otimes A'$ dans A' (tel que $\tilde{\varphi}^*(\alpha' \otimes \beta') = \alpha' . \beta'$) a pour transposé $\tilde{\varphi}$ un homomorphisme de A dans $A \otimes A$ qui respecte les structures multiplicatives. Dans une telle situation, appelons primitifs les éléments homogènes de degré ≥ 1 de A (resp. de A') qui sont orthogonaux aux produits $\alpha' . \beta'$ tels que α' et β' soient de degrés ≥ 1 (resp. aux produits $\alpha . \beta$, etc.). On démontre alors le théorème d'algèbre :

THÉORÈME DE HOPF-SAMELSON (abstrait). - Les éléments primitifs sont de degrés impairs ; ils engendrent un sous-espace vectoriel P de A (resp. P' de A') ; l'application canonique $P \to A$ (resp. $P' \to A'$) se prolonge en un isomorphisme de l'algèbre extérieure $\Lambda(P)$ sur A (resp. un isomorphisme de $\Lambda(P')$ sur A') ; restreinte à P et P', la dualité entre A et A' définit une dualité entre P et P' ; celle-ci se prolonge à la manière habituelle en une dualité entre $\Lambda(P)$ et $\Lambda(P')$, qui, par identification de $\Lambda(P)$ et A, de $\Lambda(P')$ et A', redonne la dualité existant entre A et A'.

L'énoncé précédent s'applique donc si on prend pour A l'algèbre d'homologie $H(\mathfrak{a})$ d'une algèbre de Lie réductive, et pour A' l'algèbre de cohomologie $H(\mathfrak{a}')$.

REMARQUE. - Dans le cas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ d'un groupe compact connexe, la dimension de l'espace P des éléments primitifs est égale au rang du groupe, c'est-à-dire à la dimension maxima des sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{a}$. On n'a pas encore de démonstration algébrique de ce fait, qui serait à prouver pour une algèbre de Lie réductive.

8. Homomorphisme d'une algèbre réductive dans une algèbre réductive.

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux algèbres réductives, φ un homomorphisme de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$; conservons les notations du paragraphe 6. Tout élément primitif de $H(\mathfrak{b})$ est transformé par $\tilde{\varphi}$ en un élément primitif de $H(\mathfrak{a})$; tout élément primitif de $H(\mathfrak{a}')$ est transformé par $\tilde{\varphi}^*$ en un élément primitif de $H(\mathfrak{b}')$. Compte tenu du théorème 1 (paragraphe 6), on en déduit :

THÉORÈME 2. - (cf. SAMELSON). L'idéal des zéros de $\tilde{\varphi}$ est l'idéal de $H(\mathfrak{b})$ engendré par les éléments primitifs de $H(\mathfrak{b})$ dont l'image par $\tilde{\varphi}$ est nulle ; la sous-algèbre image de $\tilde{\varphi}$ est la sous-algèbre de $H(\mathfrak{a})$ engendrée par l'unité et les éléments primitifs de $H(\mathfrak{a})$ qui appartiennent à l'image de $\tilde{\varphi}$. Propriétés analogues pour les algèbres de cohomologie.

COROLLAIRE. - n désignant la dimension de $\mathfrak{b}$, pour que $\tilde{\varphi}$ soit biunivoque, il suffit que $\tilde{\varphi}(\omega) \neq 0$, ω désignant l'élément générateur de $H_n(\mathfrak{b})$.

Le prochain exposé sera consacré à l'étude de l'homologie et de la cohomologie relatives : une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$ étant donnée, on définit l'homologie (resp. la cohomologie) de l'"espace homogène" $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ et on étudie les relations entre l'homologie (cohomologie) de $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$.