Pierre Samuel

Sections hyperplanes des variétés normales

Astérisque , tome 1 (1948-1951), p. 419-422
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__419_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1951)

SECTIONS HYPERPLANES DES VARIÉTÉS NORMALES.

par Pierre SAMUEL.

(d'après A. SEIDENBERG [2], cf. aussi : W. KRULL [1])

1. Position algébrique du problème.

Rappelons qu'un anneau d'intégrité A est dit intégralement clos si tout élément du corps des fractions de A qui est entier sur A est élément de A. Soit V une variété algébrique, et P son idéal premier dans l'anneau de polynomes $K[X_1, \ldots, X_n]$; l'anneau $K[x] = K[X]/P$ est appelé l'anneau de coordonnées (affines) de V. Une variété projective V est dite normale si, pour tout choix de coordonnées affines, l'anneau de coordonnées affines de V est intégralement clos. (La normalité est plus faible que la "normalité arithmétique", définie par : l'anneau de coordonnées projectives de V est intégralement clos ; d'autre part une variété sans singularité est normale, la réciproque étant fausse (cône quadratique)).

Les sections hyperplanes d'une variété normale V ne sont pas toujours normales (elles peuvent se décomposer, acquérir trop de singularités, ...). Le but de ceci est de montrer que, cependant, si $\dim V \geqslant 2$, les sections non normales sont exceptionnelles, au sens suivant : dans l'espace projectif dual, les hyperplans H tels que $V \cap H$ ne soit pas normale sont contenus dans la réunion d'un nombre fini de variétés algébriques distinctes de l'espace des hyperplans tout entier. On énonce ceci en disant "pour presque tous les hyperplans H, $V \cap H$ est normale".

Le problème se ramène aussitôt au problème affine correspondant. Rappelons : pour qu'un anneau d'intégrité noethérien A soit intégralement clos, il faut et il suffit que : (S) pour tout idéal premier minimal P, A_P est l'anneau d'une valuation discrète, (E) tout idéal principal (a) de A est équidimensionnel (c'est-à-dire les idéaux premiers des composantes primaires de (a) sont tous des idéaux premiers minimaux de A) .

DÉMONSTRATION. - Si A est intégralement clos, A_P aussi, et c'est un anneau de valuation discrète d'après le théorème fondamental de la théorie classique des idéaux ; d'autre part, pour tout idéal premier P de A, on a $P^{-1} \neq A$ (regarder la décomposition primaire de (a)) ; d'où, en posant $A' = A_P$ et $P' = PA_P$, $P'^{-1} \neq A'$, et $P'P'^{-1} = A'$ (sinon $P'P'^{-1} = P'$, et par récurrence, $P'^{-n}P' = P'$, contrairement au fait que A' est intégralement clos) ; alors, pour tout idéal V non nul contenu dans P', on a $V = (VP'^{-1})P'$ avec $V'P'^{-1} \subset A'$ et $\neq V$, ce qui empêche V d'être premier. Réciproquement les composantes primaires de tout idéal principal (a) sont de la forme $A \cap (PA_P)^n$ où P est un idéal premier minimal et l'appartenance à A s'exprime par des conditions de valuations ; alors A est intersection des $A_{P'}$, et donc intégralement clos.

Il y a donc <u>trois choses</u> à démontrer :

1) pour presque tout hyperplan H, $V \cap H$ est une variété, si $\dim V \geqslant 2$ (démonstration d'irréductibilité),

2) pour presque tout H, $V^r \cap H$ n'a pas de sous-variété singulière de dim $r-2$ (correspond à (S)),

3) pour presque tout H, la condition d'équidimension (E) est vérifiée.

Nous ferons ici les choses en caractéristique 0. Le résultat reste vrai en caractéristique p (même idée générale de démonstration, mais pas mal de complications techniques).

2. <u>Question d'irréductibilité.</u>

a) Soit P l'idéal de V dans $K[X]$, et soit $K[x] = K[X]/P$ l'anneau de coordonnées. On considère d'abord des indéterminées $u_1, \dots, u_n$, v et l'hyperplan "générique" H_G $(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n = v)$. On voit facilement que l'idéal $(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n - v)$ de $K(u, v)[x]$ est premier, et que l'anneau de coordonnées de $V \cap H_G$ est isomorphe à $K(u, u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)[x]$.

b) Pour qu'une variété soit absolument irréductible (c'est-à-dire que son idéal reste premier par toute extension du corps de base ; idéal "absolument premier"), il faut et il suffit (en caractéristique 0) que K soit algébriquement fermé dans $K(x)$. On montre que, si V est absolument irréductible et de $\dim \geqslant 2$, alors $V \cap H_G$ est absolument irréductible.

DÉMONSTRATION. - K est algébriquement fermé dans $S = K(x)$, et il faut montrer que $K(u, \sum u_i x_i)$ est algébriquement fermé dans $K(u, \sum u_i x_i)(x) = S(u)$. Comme les u_i sont des variables indépendantes sur K et S, $K(u)$ est algébriquement fermé dans $S(u)$ (ZARISKI). On peut supposer $y = u_1 x_1$ et $z = u_2 x_2 + \dots + u_n x_n$ algébriquement indépendantes sur $K(u)$, puisque $\dim V \geqslant 2$. Pour $a \in K^*$, formons la fermeture algébrique L_a de $K(u)(ay + z)$ dans $S(u)$; comme $L_a(y,z)$ est compris entre $K(u,y,z)$ et la fermeture algébrique de $K(u,y,z)$ dans

$S(u)$, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour $L_a(y , z)$. Comme K est infini, il existe donc des éléments distincts a et b de K tels que $L_a(y , z) = L_b(y , z)$; d'où $L_a(by + z) = L_b(ay + z)$. Comme $K(u)$ est algébriquement fermé dans L_a , $K(u)(by + z)$ est algébriquement fermé dans $L_a(by + z) = L_b(ay + z)$, donc dans L_b , - et par conséquent $L_b = K(u)(by + z)$. Ainsi $K(u)(by + z)$ est algébriquement fermé dans $S(u)$, donc aussi $K(u , y + z)$ à cause de l'automorphisme défini par $u_1 \to b^{-1} u_1$.

c) On introduit ensuite la notion de forme associée d'un idéal I de $[X]$, supposé équidimensionnel et de dimension r (c'est-à-dire que les idéaux premiers des composantes primaires de I sont tous des idéaux de variétés de même dimension r) . Pour cela on prend $n(r + 1)$ indéterminées $d_{ij} (1 \leq i \leq n , 1 \leq j \leq r + 1)$ sur K , et on pose $Z_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} X_i$; alors $IK(d)[X] \cap K(d)[Z]$ est un idéal équidimensionnel de dimension r de $K(d)[Z_1 \ldots Z_{r+1}]$ c'est-à-dire un idéal principal ; il est engendré par un polynome $E_I(d , Z)$ (normé par la condition d'être primitif en les d_{ij} , et déterminé alors à un facteur de K^* près) ; ce polynome est appelé la forme associée de I (E. NOETHER, CHOW) ; géométriquement c'est l'équation de la "projection générique" de l'ensemble algébrique associé à I . On démontre : pour que I soit premier (resp. absolument premier), il faut et il suffit que $E_I(d , Z)$ soit irréductible (resp. absolument irréductible) en Z .

d) Prenons pour I l'idéal $(P , \sum u_i X_i - v)$ de $V^r \cap H_G$, et soit $\bar{I}$ l'idéal "spécialisé" $(P , \sum a_i X_i - b) (a_i , b \in K)$ de la section plane $V \cap H_{ab}$. Pour presque tous les systèmes (a , b) , l'idéal spécialisé $\bar{I}$ est équidimensionnel et de même dimension r-1 que I , d'après un résultat de Krull généralisé par SEIDENBERG. Comme $E_I(d , Z) = F(u , v , d , Z)$ est absolument irréductible en Z (d'après b) et c)), il en est de même de $F(a , b , d , Z)$ pour presque tous (a , b) (en effet la décomposition d'un polynome sur un corps algébriquement clos s'exprime par des relations algébriques entre ses coefficients). D'autre part, $F(a , b , d , Z)$ est dans $\bar{I}K(d)[X]$ pour presque tous (a , b) . On a donc, pour presque tous (a , b) , $E_{\bar{I}}(d , Z) = F(a , b , d , Z)$, - et $V \cap H$ est absolument irréductible.

3. Question des singularités.

Ceci est plus simple (au moins en caractéristique 0) . On montre (en regardant les matrices jacobiennes) que , pour presque tous coefficients (a , b) , tout point singulier de la section $V \cap H_{ab}$ est point singulier de V (les hyperplans à éviter étant tangents à V). Donc, si V^r n'a pas de singularités en dim r-1 ,

$V^r \cap H_{ab}$ n'aura (pour presque tous (a , b)) pas de singularités en dim $r-2$.

4. Question d'équidimensionnalité.

On remarque d'abord que, pour une section générique $V \cap H_G$, l'anneau de coordonnées $K(u , v)[X]/I$ de celle-ci est intégralement clos (se voit paragraphe 2,a)). Avec les notations de (paragraphe 2,d)) il s'agit de montrer que, pour presque tous (a , b), tout idéal principal (y) de $R = K[X]/I$ est équidimensionnel, c'est-à-dire que (I , y) est équidimensionnel dans $K[X]$. On ne peut appliquer directement ici le théorème de Krull à $(\bar{I} , y)$ (considéré comme idéal spécialisé de (I , y)),,puisque les "mauvais" (a , b) peuvent dépendre de (y).

On utilise alors le biais suivant : si R n'est pas intégralement clos, soit R' sa clôture intégrale ; il existe un conducteur $\mathfrak{f} \neq (0)$ de R dans R' (: idéal des $y \in R$ tels que $yz' \in R$ pour tout $z' \in R'$) ; et pour tout élément $y \in \mathfrak{f}$, l'idéal Ry n'est pas équidimensionnel (pour $z' \in R'$,,$z' \notin R$, on a $yz' \in R$ et $yz' \notin Ry$, bien que $v(yz') \geqslant v(y)$ pour toute valuation v correspondant à un idéal premier minimal de R, c'est-à-dire bien que yz' appartienne à toutes les composantes primaires isolées de Ry). Reste à trouver un élément y dont on soit sûr qu'il est dans le conducteur $\mathfrak{f}$.

Or soit $E_{\bar{I}}(d , Z)$ la forme associée à $\bar{I}$ (paragraphe 2,c))). On montre (par des traces ou des déterminants de Vandermonde) que la dérivée $D_{Z_{r+1}}(E_{\bar{I}}(d , Z)$ est élément du conducteur de $K(d)[Z]/(E_{\bar{I}})$, donc de celui de $K(d)[X]/\bar{I}$. On montre aussi que le remplacement de K par $K(d)$ ne change rien à la normalité. Comme $E_{\bar{I}}(d , Z) = F(a , b , d , Z)$ pour presque tous (a , b) ($F(u , v , d , Z)$ étant la forme associée à I) (paragraphe 2,d)), et comme l'idéal "générique" $(I , D_{Z_{r+1}} F(u , v , d , Z))$ est équidimensionnel à cause de la normalité de la section générique, il en est de même presque toujours de l'idéal spécialisé, qui est presque toujours $(\bar{I} , D_{Z_{r+1}} F(a , b , d , Z))$ (théorème de Krull-Seidenberg). Par conséquent $K(d)[X]/\bar{I}$ est presque toujours intégralement clos. Et ceci termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRULL (Wolfgang). - Parameterspezialisierung in Polynomringen, Arch. Math., I, II, t. 1, 1948, p. 56-64 et p. 129-137.

[2] SEIDENBERG (A.). - The hyperplane sections of normal varieties, Trans. Amer. math. Soc., t. 69, 1950, p. 357-386.