Jean Braconnier

Sur les suites de composition d'un groupe et la tour des groupes d'automorphismes d'un groupe fini

Séminaire N. Bourbaki, 1948-1951, exp. n° 7, p. 39-43.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__39_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1949)

SUR LES SUITES DE COMPOSITION D'UN GROUPE ET LA TOUR DES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'UN GROUPE FINI

par Jean BRACONNIER

[d'après H. WIELANDT (1)]

1. Soient G un groupe, G' le groupe de ses automorphismes et φ la représentation de G dans G' qui, à $s \in G$, fait correspondre l'automorphisme $x \longrightarrow sxs^{-1}$ de G ; $\varphi(G)$ est un sous-groupe distingué de G' ; l'image réciproque par φ de l'automorphisme neutre de G' est le centre Z de G ; pour qu'un automorphisme $\sigma \in G'$ permute avec tous les automorphismes intérieurs, il faut et il suffit que $s^{-1}\sigma(s) \in Z$ pour tout $s \in G$. Supposons maintenant que $Z = \{e\}$; φ est un isomorphisme de G dans G' et on identifie alors G avec le sous-groupe distingué $\varphi(G)$ de G' ; le centralisateur de G (ensemble des éléments de G' permutables avec ceux de G) se réduit à $\{e\}$; en particulier, le centre de G' est $\{e\}$. Si l'on pose $G = G_1$ et si, pour tout entier $n > 0$, on désigne par G_{n+1} le groupe des automorphismes de G_n, la suite croissante de groupes (G_n) s'appelle la tour des groupes d'automorphismes de G. Etant donné $n > 0$, $G_n, G_{n-1}, \dots, G_1, \{e\}$ est une suite de composition de G_n et, pour $0 < i < n$, le centralisateur de G_i dans G_{i+1} est $\{e\}$. Dans le cas où G est un groupe fini d'ordre $g \geqslant 2$, WIELANDT, en étudiant les suites de composition d'un groupe fini ayant des propriétés analogues à celles de la suite de composition de G_n qu'on vient de définir, montre que l'ordre de G_n est majoré par une fonction de g, à savoir $g^{3(\log_2 g)^2}$. Il en résulte que la tour des groupes d'automorphismes de G n'a qu'un nombre fini d'étages : il existe n tel que tous les automorphismes de G_n soient intérieurs (2).

2. Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe ayant une suite de Jordan-Hölder, de longueur n. On dit qu'un sous-groupe H de G est correct s'il existe une suite de composition de G dont H est un terme. Tout sous-groupe distingué de G est correct, comme son nom l'indique. Si H est un sous-groupe correct de G, il existe ainsi une suite de Jordan-Hölder de G dont H est un terme, soit $G = G_0, G_1, \dots, G_r = H, \dots, G_n = \{e\}$. $G_r, \dots, G_n$ est une suite de

(1) WIELANDT (H.). - Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, Math. Z., t. 45, 1939, p. 209-244.

(2) Cette question avait été posée par ZASSENHAUS, qui a d'ailleurs montré que si G est un groupe simple non abélien, fini ou non, on a $n = 2$.

Jordan-Hölder de H, et H est de longueur $n-r$; il en résulte que le nombre r des groupes quotients $G/G_1, \ldots, G_{r-1}/H$ et la structure de ces groupes ne dépendent pas de la suite de Jordan-Hölder $G_0, \ldots, G_n$. On dit que la suite $G, G_1, \ldots, G_{r-1}, H$ est une *suite de Jordan-Hölder de longueur* r *joignant* G *à* H, et on appelle les r groupes $G/G_1, \ldots, G_{r-1}/H$ les *quotients* de cette suite. On a alors le théorème suivant :

Soient H *et* K *deux sous-groupes corrects de* G, L *le sous-groupe de* G *engendré par* $H \cup K$. *Les sous-groupes* $H \cap K$ *et* L *sont des sous-groupes corrects de* G ; *si* $\sum_1$ (resp. $\sum_2$) *est une suite de Jordan-Hölder joignant* L *à* H (resp. H *à* $H \cap K$), *chacun des quotients de* $\sum_1$ *est isomorphe à un quotient de* $\sum_2$ *et chacun des quotients de* $\sum_2$ *figure dans* $\sum_1$ *avec une multiplicité au moins aussi grande que dans* $\sum_2$.

Ce résultat fondamental se prouve en plusieurs étapes :

1) Soit $G_0, \ldots, G_n$ une suite de Jordan-Hölder de G contenant H ; si on pose $G_i' = G_i \cap K$ pour $0 \leq i \leq n$, $G_0', \ldots, G_n'$ est une suite de composition de K que l'on peut compléter, après suppression des termes égaux, en une suite de Jordan-Hölder de G dont K et $H \cap K$ sont des termes. $H \cap K$ *est donc un sous-groupe correct de* G *et les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant* K *à* $H \cap K$ *figurent parmi les quotients d'une suite de Jordan-Hölder joignant* G *à* H.

2) On montre que L *est un sous-groupe correct de* G en raisonnant par récurrence sur la longueur n de G, puis par récurrence sur la somme des longueurs de deux suites de Jordan-Hölder joignant respectivement G à H et à K.

3) *On montre enfin que les quotients de* $\sum_2$ *figurent parmi les quotients de* $\sum_1$ en raisonnant par récurrence sur la longueur d'une suite de Jordan-Hölder joignant G à K ; soit M un sous-groupe distingué maximal de G contenant K et $H_1 = H \cap M$; ou bien

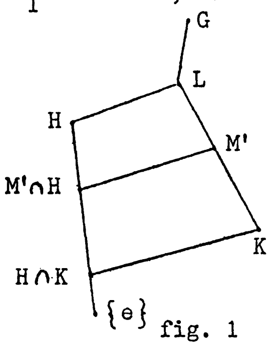

fig. 1

a) $H \cap K = H_1$ et K est invariant par tous les automorphismes intérieurs $x \longrightarrow sxs^{-1}$ avec $s \in H$; on a $HK = KH = L$; si $K = L$ le résultat est immédiat ; sinon, il existe un sous-groupe distingué maximal M' de L contenant K et ne contenant pas H, d'où le résultat (fig. 1), car $M' = (M' \cap H)K$ et $K \cap (M' \cap H) = K \cap H$; ou bien

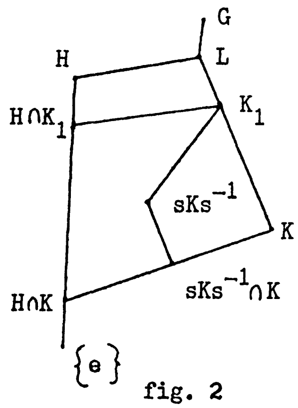

fig. 2

b) $H \cap K = H_1$ et il existe $s \in H$ tel que $sKs^{-1} \neq K$; alors le sous-groupe K_1 engendré par $K \cup sKs^{-1}$ est correct et de longueur supérieure à celle de K (fig. 2) ; ou bien

c) $H \cap K \neq K_1$; alors le sous-groupe K_2 de G engendré par $H_1 \cap K$ est correct et de longueur supérieure à celle de K , d'où le résultat (fig. 3).

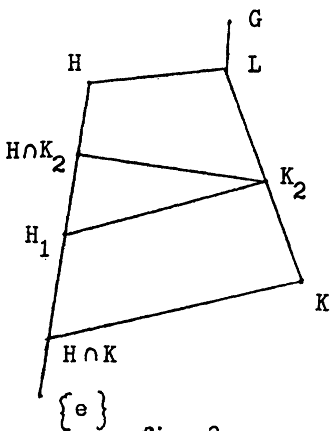

fig. 3

Le résultat ci-dessus admet les corollaires suivants :

1. Si H (resp. K) est d'ordre fini h (resp. k), L est d'ordre fini l et les seuls diviseurs premiers de l sont ceux de hk.

2. Si H et K sont résolubles, L l'est aussi.

3. Si, quel que soit le sous-groupe distingué maximal P de H , H/P n'est isomorphe à aucun quotient de $\sum_2$, H est un sous-groupe distingué de L .

Pour que tous les sous-groupes de G soient corrects, il faut et il suffit que G soit fini et produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

On sait que si deux sous-groupes distingués de G ont une intersection réduite à $\{e\}$, tous les éléments de l'un permutent avec tous les éléments de l'autre. Ce résultat se généralise ainsi aux sous-groupes corrects :

Soient H et K deux sous-groupes corrects de G tels que $H \cap K = \{e\}$, soit L le sous-groupe (correct) de G engendré par $H \cup K$, et soit H' (resp. K') le plus petit sous-groupe distingué de L contenant H (resp. K) ; pour que tout élément de H permute avec tout élément de K , il faut et il suffit que le seul sous-groupe abélien de $H' \cap K'$ soit $\{e\}$.

Cette condition est évidemment nécessaire (car H et K sont des sous-groupes distingués de L , $H = H'$ et $K = K'$). Pour montrer qu'elle est suffisante, on raisonne par récurrence sur la somme des longueurs des suites de Jordan-Hölder qui joignent respectivement G à H et K . Si $H = H'$ et $K = K'$, le résultat est immédiat ; on suppose donc $K \neq K'$; il existe alors un sous-groupe distingué maximal M de G qui contient K ; soit $H_1 = H \cap M$; on montre que tous les éléments de H_1 permutent avec ceux de K, puis avec ceux de K', d'où on déduit $H \cap K' = \{e\}$, ce qui permet alors de montrer que les éléments de H permutent avec ceux de K.

La condition ci-dessus est en particulier vérifiée lorsque tous les quotients abéliens d'une suite de Jordan-Hölder de H sont distincts des quotients abéliens d'une suite de Jordan-Hölder de K. Il en est ainsi lorsque H et K sont d'ordres finis premiers entre eux.

3. On dit qu'un groupe est parfait s'il est identique au groupe de ses commutateurs. On dit qu'un groupe U est local si l'ensemble des sous-groupes distingués de U, distincts de U, admet un plus grand élément M_U.

Si H est un sous-groupe correct, parfait et local de G et si K est un sous-groupe correct de G ne contenant pas H, H est un sous-groupe distingué du sous-groupe de G engendré par $H \cup K$ (démonstration par récurrence sur la longueur de G). Soient $\mathcal{N}$ l'ensemble des quotients non abéliens d'une suite de Jordan-Hölder de G, et ℓ le nombre de ces quotients ; il existe exactement ℓ sous-groupes corrects parfaits et locaux de G, soient $H_1, \ldots, H_\ell$; l'ensemble des groupes $H_1/M_{H_1}, \ldots, H_\ell/M_{H_\ell}$ est identique à $\mathcal{N}$. On démontre ce résultat par récurrence sur la longueur n de G ; si $n > 0$ et si M est un sous-groupe distingué maximal de G, ou bien G/M est abélien, et tous les sous-groupes corrects, parfaits et locaux de G sont contenus dans M, ou bien G/M n'est pas abélien, et on montre, à l'aide du résultat du début de ce paragraphe, qu'il existe un sous-groupe H de G, correct, parfait, local et non contenu dans M : il suffit de prendre pour H un sous-groupe minimal parmi les sous-groupes corrects de G non contenus dans M. Cet important résultat permet de démontrer les propriétés suivantes :

Soit H un sous-groupe correct et parfait de G ;

a) Si $H \neq \{e\}$, H est engendré par les sous-groupes corrects, parfaits et locaux qu'il contient.

b) H permute avec tous les sous-groupes corrects de G.

c) Si K est un sous-groupe correct de G tel que $H \cap K$ soit résoluble, H est un sous-groupe distingué du sous-groupe de G engendré par $H \cup K$.

4. Soient maintenant G un groupe fini d'ordre g , H un sous-groupe correct de G d'ordre $h \geqslant 2$. On a le théorème fondamental suivant :

Soient H' le plus petit sous-groupe distingué de G contenant H , et r l'indice du normalisateur de H ; il existe un nombre premier p tel que, si H_p est le plus petit sous-groupe distingué de H tel que H/H_p soit un p-groupe, H' contienne un sous-groupe correct K d'ordre $p^K > r^{1/\alpha}/(\log_{60} g)^c h^{2\alpha}$ (en posant $\alpha = \log_2 h$ et $c = \log_{60} 2$) et dont tous les éléments permutent avec les éléments de H_p .

On commence par établir le résultat suivant : si L est un sous-groupe distingué de G d'ordre ℓ et dont l'indice est une puissance de p , il existe un sous-groupe distingué M de G d'ordre $p^m \geqslant p^n/\ell^{\log_2 \ell}$, p^n étant la plus grande puissance de p divisant g , et tous les éléments de M permutent avec ceux de L (on utilise le fait que le groupe des automorphismes de L est d'ordre $\leqslant \ell^{\log_2 \ell}$). Puis on montre que, si $h = p^j$, l'ordre de H' est $p^{j'} > r^{1/j}$. On en déduit alors un premier résultat : si H est résoluble, alors H' contient un sous-groupe correct d'ordre $p^k > r^{1/\alpha}/h^\alpha$. On remarque enfin que, si H est parfait, on a $r \leqslant (\log_{60} g)^{\alpha c}$ (en utilisant le fait que le plus petit groupe simple non abélien est le groupe alterné de degré 5 , dont l'ordre est 60). On en déduit le théorème fondamental en considérant le plus petit sous-groupe distingué H_1 de H tel que H/H_1 soit résoluble : H_1 est alors parfait.

Remarquons maintenant que, si p divise l'ordre du centralisateur de H_p , p divise aussi l'ordre du centralisateur de H . Si donc le centralisateur de H se déduit à $\{e\}$, l'ordre du centralisateur de H_p est premier avec p et $p^k = 1$, donc $r < (\log_{60} g)^{c\alpha} h^{2\alpha^2}$. Or l'ordre du normalisateur de H est $\leqslant h^\alpha$; on a donc $g < ((\log_{60} g)^c h^{2\alpha+1})^\alpha$. Mais on a $h \geqslant 6$ (sinon H aurait un centre $\neq \{e\}$) et par suite, $\alpha > 2$; on en déduit que $(\log_{60} g)^c \leqslant h^{\alpha-1}$, d'où $g < h^{3\alpha^2}$. En résumé : Si le centralisateur de H se réduit à $\{e\}$, on a $g < h^{3\alpha^2}$.

Si on reprend les notations du paragraphe 1 , il est clair que G est un sous-groupe correct de G_n et que le centralisateur de G dans G_n est $\{e\}$. L'ordre de G_n est donc $\leqslant g^3 (\log_2 g)^2$, d'où le résultat annoncé.