JEAN DIEUDONNÉ

Géométrie des espaces algébriques homogènes

Astérisque , tome 1 (1948-1951), p. 111-116

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__111_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1949)

GÉOMÉTRIE DES ESPACES ALGÉBRIQUES HOMOGÈNES

par Jean DIEUDONNÉ,

[d'après CHOW (W.L.). - Ann. of Math., t. 50, 1949, p.32-67].

1. Partie projective.

1. Préliminaires. - Soient E , E' deux espaces vectoriels à gauche de dimension $n+1$ sur des corps K , K' , $P(E)$, $P(E')$ les espaces projectifs de dimension n correspondants. Une collinéation de $P(E)$ sur $P(E')$ est une application biunivoque de $P(E)$ sur $P(E')$ qui transforme tout hyperplan en hyperplan (ou, ce qui revient au même, toute droite en droite). Le théorème fondamental de la géométrie projective affirme que si $n \geqslant 2$, une telle collinéation ne peut exister que si K' est isomorphe à K , et alors on l'obtient par passage au quotient à partir d'une application semi-linéaire de E sur E' .

En particulier, si on prend pour E' le dual de E (espace vectoriel à gauche sur l'opposé K^0 de K) une collinéation de $P(E)$ sur $P(E')$ est dite corrélation dans $P(E)$; il n'en existe que si K^0 est isomorphe à K , et alors le théorème fondamental montre que cette corrélation est définie par une forme sesquilinéaire $f(x,y)$ de rang $n+1$ sur E ($f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$, $f(x,\lambda y) = f(x,y)\lambda^{\sigma}$, où σ est un antiautomorphisme de K) . On montre que, pour que la corrélation soit involutive il faut et il suffit qu'en multipliant au besoin f par un scalaire à droite, on soit dans l'un des deux cas suivants :

1°) K est commutatif, σ est l'identité et f une forme alternée (ce qui implique n impair) ;

2°) σ (noté $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$) est un antiautomorphisme involutif de K et $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$ (forme hermitienne, en particulier forme symétrique lorsque K est commutatif et σ l'identité).

Si Δ est une corrélation involutive, pour toute variété linéaire V dans $P(E)$, de dimension q , sa conjuguée V' est de dimension $n-q-1$, et V est conjuguée de V' ; on dit que V est invariant si $V \subset V'$ (correspond aux sous-espaces totalement isotropes de E) ; le maximum r de la dimension q est tel que $2r \leqslant n-1$; on a toujours $2r = n-1$ si la forme f est alternée, mais pas nécessairement dans les autres cas.

Dans ce qui suit, on suppose que les valeurs de $f(x,x)$ sont toujours de la forme $\lambda + \bar{\lambda}$ (ceci n'est une restriction que lorsque K est de caractéristique 2).

2. Les théorèmes de Chow. - Le premier théorème concerne le cas où aucune corrélation n'est donnée dans $P(E)$. On dit alors que deux variétés linéaires de dimension r $(0 < r < n-1)$ dans $P(E)$ sont adjacentes si leur intersection est de dimension $r-1$.

THÉORÈME 1. - Toute transformation biunivoque de l'ensemble $G_{n,r}$ des variétés linéaires de dimension r sur lui-même, qui transforme deux variétés adjacentes en variétés adjacentes ainsi que l'application réciproque, est induite par une collinéation ou une corrélation (ce dernier cas seulement si $2r = n-1$).

Dans le second théorème, on suppose donnée une corrélation involutive Δ dans $P(E)$; r étant la dimension maxima des variétés linéaires invariantes, on suppose que $r \geqslant 2$.

THÉORÈME 2. - Toute transformation biunivoque de l'ensemble N_r des variétés linéaires invariantes de dimension r sur lui-même, qui transforme deux variétés adjacentes en variétés adjacentes ainsi que l'application réciproque, est induite par une collinéation permutable avec Δ.

Supposons enfin que K soit commutatif et de caractéristique $\neq 2$, que σ soit l'identité (donc f une forme symétrique) et $2r = n-1$; alors N_r se décompose en deux classes d'intransitivité pour le groupe des rotations (transformations laissant invariante la forme f, et de déterminant 1). Soit P_r une de ces classes ; si V_1 et V_2 appartiennent à P_r, la dimension de $V_1 \cap V_2$ est de la forme $r-2k$; on dit cette fois que V_1 et V_2 sont adjacentes si la dimension de $V_1 \cap V_2$ est $r-2$. On suppose $r \geqslant 4$.

THÉORÈME 3. - Toute transformation biunivoque de l'ensemble P_r sur lui-même, qui transforme deux variétés adjacentes en variétés adjacentes ainsi que l'application réciproque, est induite par une collinéation permutable avec Δ.

En réalité, le théorème 2 est encore valable pour $r = 1$ lorsque σ est l'identité ; au contraire, le théorème 3 (qui n'a pas de sens pour $r = 1$ ou $r = 2$) n'est plus exact pour $r = 3$, à cause de la "trialité".

3. Idée des démonstrations. -

1.- On considère les ensembles maximaux de variétés linéaires de dimension r deux à deux adjacentes. On montre successivement que :

- 1a) Tout ensemble maximal est formé des variétés contenant une même variété de dimension $r-1$ (premier type), ou des variétés contenues dans une même variété de dimension $r+1$ (second type).

- 1b) Si la transformation donnée T transforme un ensemble du premier type en ensemble du premier type (resp. second type), elle transforme tout ensemble du premier type en ensemble du premier type (resp. second type).

- 1c) T peut être étendue en une application biunivoque de l'ensemble des variétés de dimension $r-1$ sur lui-même ou sur l'ensemble des variétés de dimension $r+1$, cette application et son application réciproque conservant l'adjacence.

- 1d) Si $r \neq (n-1)/2$, le second des deux cas précédents ne peut se produire. On raisonne donc par récurrence descendante sur r, et quand on arrive à $r = 0$, il ne reste plus qu'à appliquer le théorème fondamental de la géométrie projective. Pour $r = (n-1)/2$, si le second cas se présente, par une corrélation on se ramène au premier.

2.- On établit d'abord quelques lemmes préliminaires sur les variétés invariantes.

- 2α) La variété linéaire engendrée par la réunion de toutes les variétés invariantes d'ordre r est identique à $P(E)$.

- 2β) Soient V_1, V_2 deux variétés invariantes de dimension $s \leqslant r$; alors il existe deux variétés invariantes W_1, W_2 de dimension maximale r, telle que $V_1 \subset W_1$, $V_2 \subset W_2$ et $W_1 \cap W_2 = V_1 \cap V_2$.

- 2γ) Soient V_1, V_2 deux variétés invariantes de dimension $s \leqslant r$, et soit $s - t$ la dimension de leur intersection ; alors il existe une chaîne $(W_k)_{1 \leqslant k \leqslant t+1}$ de variétés invariantes de dimension s, telles que $V_1 = W_1$, $V_2 = W_{t+1}$, et que W_k et W_{k+1} soient adjacentes.

On considère alors les ensembles maximaux de variétés linéaires de dimension (maximale) r, deux à deux adjacentes. On montre que :

– 2a) Tout ensemble maximal est formé des variétés invariantes contenant une même variété (invariante) de dimension $r-1$.

– 2b) La transformation donnée T peut être étendue en une application biunivoque de l'ensemble des variétés invariantes de dimension $r-1$ sur lui-même, qui conserve l'adjacence ainsi que son application réciproque.

– 2c) Par récurrence descendante, on étend T à toutes les variétés linéaires invariantes de dimension $< r$. Dans le cas où Δ est définie par une forme alternée, le théorème fondamental de la géométrie projective permet de conclure, tous les points étant invariants. Dans le cas général, on observe que T , restreinte aux variétés contenues dans une variété invariante V de dimension r , coïncide avec une collinéation de V sur $T(V)$; en outre, sur l'intersection de deux telles variétés, les collinéations coïncident, donc toutes ces collinéations sont relatives au même automorphisme de K .

– 2d) A partir de ces collinéations, on définit dans E une collinéation Θ dont elles sont toutes les restrictions. On peut procéder par récurrence, de la façon suivante : on construit une chaîne ascendante V_i $(0 \leqslant i \leqslant n-r)$, V_0 étant une variété invariante de dimension r , V_i étant obtenue par adjonction à V_{i-1} d'un point invariant P_i qui n'y est pas situé. Sur V_0 , Θ coïncide avec la collinéation définie par T ; puis, Θ étant définie dans V_{i-1} , on la prolonge dans V_i de la façon suivante : soit Q_i un point de V_0 conjugué de P_i ; on prend Θ de sorte qu'elle coïncide sur V_{i-1} et sur P_iQ_i avec T , ce qui la définit dans V_i sans ambiguité. Il faut alors prouver que pour tout point invariant P dans V_i et non sur P_iQ_i , on a aussi $\Theta(P) = T(P)$. C'est immédiat si P est dans la variété conjuguée de P_iQ_i , car le plan PP_iQ_i coupe alors V_{i-1} suivant une droite invariante D , et Θ et T coïncident sur D et sur P_iQ_i , donc dans PP_iQ_i . Sinon, on considère l'intersection de V_0 et de la variété conjuguée à P_iQ_i qui contient toujours une droite D' passant par Q_i , on coupe le plan P_iQ_iD' par l'hyperplan conjugué à P , ce qui donne une droite D'' , et on applique ce qui précède en remplaçant dans le raisonnement P_iQ_i par D'' .

3.– Soit P'_r l'autre classe d'intransitivité du groupe des rotations dans l'ensemble des variétés invariantes de dimension r .

On considère encore les ensembles <u>maximaux</u> de variétés linéaires appartenant à P_r et deux à deux adjacentes. On montre que :

- 3a) Tout ensemble maximal est formé, soit de variétés ayant une intersection de dimension $r-1$ avec une variété de P'_r (premier type), soit de variétés contenant une même variété (invariante) de dimension $r-3$ (second type).

- 3b) Si la transformation donnée T transforme <u>un</u> ensemble du premier type en ensemble du premier type (resp. second type), elle transforme <u>tout</u> ensemble du premier type en ensemble du premier type (resp. second type).

- 3c) Si $r > 3$, seul le premier cas est possible, et on est alors ramené au théorème 2.

4. <u>Relations avec les travaux de HUA</u>. - HUA considère certains cas particuliers des problèmes précédents, qu'il formule et traite en langage de matrices, ce qui donne naturellement des calculs horribles où on ne comprend rien (et le plus souvent des conditions inutilement restrictives). Par exemple, quand il s'agit de la corrélation Δ définie par une forme alternée sur un espace E de dimension $2m$, ayant la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \underline{I}_m \\ -\underline{I}_m & 0 \end{pmatrix}$ par rapport à une base convenable (e_i), à m vecteurs engendrant un sous-espace totalement isotrope de dimension m, il associe la matrice $(\underline{X},\underline{Y})$ à m lignes et $2m$ colonnes dont les lignes sont les vecteurs en question ; on a alors la relation

$$(\underline{X},\underline{Y}) \begin{pmatrix} 0 & \underline{I}_m \\ -\underline{I}_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\underline{X} \\ {}^t\underline{Y} \end{pmatrix} = 0$$

et réciproquement (lorsque $(\underline{X},\underline{Y})$ est de rang m) ; il appelle $(\underline{X},\underline{Y})$ un <u>couple symétrique</u> de matrices. L'espace N_{m-1} n'est autre que l'espace des classes de ces couples pour la relation d'équivalence $(\underline{X}_1 , \underline{Y}_1) = \underline{Q}\,(\underline{X},\underline{Y})$ où $\underline{Q}$ est inversible. Le seul intérêt visible de cette formulation est que l'effet des collinéations sur l'espace N_{m-1} se traduit alors par des transformations sur $\underline{Z} = \underline{Y}^{-1}\underline{X}$ de la forme $\underline{Z} \to a(\underline{A}\underline{Z}^{\sigma} + \underline{B})\,(\underline{C}\underline{Z}^{\sigma} + \underline{D})^{-1}$, où $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ sont des matrices carrées satisfaisant à des relations convenables.

2. <u>Partie birationnelle</u>.

On suppose K commutatif, et on ne considère plus que les espaces $G_{n,r}$ (grassmannienne), N_r pour $n = 2r+1$ et Δ défini par une forme alternée, et

P_r pour $n = 2r+1$. Ce sont alors des variétés algébriques irréductibles sans singularités dans un espace projectif S , et CHOW montre que toute transformation birationnelle et birégulière d'une de ces variétés sur elle-même est induite par une collinéation de $P(E)$ (pour l'automorphisme identique de K) sauf pour P_3 . On commence par traduire les notions d'"adjacence" introduites dans 1.) en notions géométriques dans S : deux points sont "adjacents" dans $G_{n,r}$ ou N_r quand la droite qui les joint est dans $G_{n,r}$ (resp. N_r) ; deux points sont "adjacents" dans P_r quand ils sont sur une conique contenue dans P_r . Tout revient alors à démontrer que toute transformation birationnelle et birégulière des variétés considérées transforme une droite (resp. conique) en droite (resp. conique), ce qui se fait en étudiant les systèmes linéaires complets sans point de base sur ces variétés, et en particulier le système engendré par les sections hyperplanes de ces variétés.

Dans le cas où K est le corps des nombres complexes, on peut dans ce qui précède remplacer l'hypothèse que la transformation est birationnelle et birégulière, par l'hypothèse qu'elle est biunivoque et analytique ; le raisonnement est analogue, en remplaçant les systèmes linéaires complets par les classes d'homologie.