Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

HOWARD L. JACKSON

Sur la comparaison des deux types d'effilement

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 15 (1971-1972), exp. nº 23, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1971-1972__15__A4_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e-15e années, 1970-1972, n° 23, 8 p.

16 mars 1972

SUR LA COMPARAISON DES DEUX TYPES D'EFFILEMENT

par Howard L. JACKSON

On considère ici le cas où $\Omega = \underset{\sim}{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ et $\omega =$ le demi-espace

$$\{x = (x_1 , \ldots , x_n) \in \Omega ; \quad x_n > 0\} .$$

Nous montrerons que si $e \subset \omega$ est effilé à l'origine dans Ω pour l'effilement interne, alors e est effilé en 0 dans ω pour l'effilement minimal. Cette implication a déjà été établie par JACKSON [4] pour $n = 2$, par CHOQUET (manuscrit inédit) pour $n \geqslant 3$, et par Jacqueline LELONG-FERRAND [5] pour le cas plus spécial où $n \geqslant 3$ et e contenu dans un cône de Stolz dans ω, de sommet l'origine.

Je crois que la démonstration qui sera présentée ici est plus simple que la démonstration de CHOQUET ou ma démonstration ancienne (voir [4], théorème 4).

On emploie les notations suivantes :

$h(r) = \begin{cases} r^{2-n} & \text{si } n \geqslant 3 \\ \log \frac{1}{r} & \text{si } n = 2 \end{cases}$ est la fonction fondamentale de Ω,

$H(x) = h(|x|)$ pour $x \in \Omega$,

$x_0 = (0 , \ldots , 0 , 1) \in \omega$,

x' = le symétrique de $x \in \omega$ par rapport à la frontière $\partial\omega$ (i. e. si $x = (x_1 , \ldots , x_{n-1} , x_n)$, alors $x' = (x_1 , \ldots , x_{n-1} , - x_n)$),

$G(x , y)$ = le noyau de Green sur $\omega \times \omega$,

$K(x , y)$ = la fonction harmonique minimale sur ω avec pôle en $x \in \partial\omega$, où K est précisée par $K(x , x_0) = 1$,

$\Theta(x , y)$ = le noyau sur $\overline{\omega} \times \overline{\omega}$, défini par BRELOT [2] et Linda NAÏM [6], c'est-à-dire : sur $\omega \times \omega$,

$$\Theta(x , y) = \frac{G(x , y)}{G(x , x_0)\, G(y , x_0)} ,$$

et sur $\partial\omega \times \omega$,

$$\Theta(x , y) = \frac{K(x , y)}{G(y , x_0)} .$$

Nous aurons d'abord besoin de lemmes qui sont fondés sur des calculs élémentaires.

LEMME 1. - <u>Dans le cas où</u> $n \geqslant 3$, <u>il existe deux nombres réels positifs</u> A_1 <u>et</u>

B_1 , $0 < A_1 \leqslant B_1$, <u>tels que</u>

$$\frac{A_1\, h|x - y|}{|x - y'|^2} \leqslant \frac{G(x , y)}{4x_n\, y_n} \leqslant \frac{B_1\, h|x - y|}{|x - y'|^2} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad (x , y) \in \omega \times \omega .$$

<u>Si</u> $n = 2$, <u>nous avons les inégalités</u>

$$\frac{1}{2|x - y'|^2} \leqslant \frac{G(x , y)}{4x_2\, y_2} \leqslant \frac{1}{2|x - y|^2} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad (x , y) \in \omega \times \omega .$$

<u>Démonstration du lemme</u> 1. - Rappelons que $G(x , y) = h|x - y| - h|x - y'|$ pour $n \geqslant 2$. Si $n \geqslant 3$, on a :

$$G(x , y) = \frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x - y'|^{n-2}} = h|x - y| \frac{(|x - y'|^{n-2} - |x - y|^{n-2})}{|x - y'|^{n-2}}$$

$$= \frac{h|x - y|[(|x - y'|^2)^{n-2} - (|y - x|^2)^{n-2}]}{|x - y'|^{n-2}\,(|x - y'|^{n-2} + |x - y|^{n-2})} .$$

On emploie l'identité $u^n - v^n = (u - v) \sum_{i=0}^{n-1} u^{n-1-i}\, v^i$, et on obtient :

$$G(x , y) = \frac{h|x - y|(|x - y'|^2 - |x - y|^2)[(|x - y'|^2)^{n-3} + \dots + (|x - y|^2)^{n-3}]}{|x - y|^{n-2}\,[|x - y'|^{n-2} + |x - y|^{n-2}]} .$$

De l'identité $|x - y'|^2 - |x - y|^2 = (x_n + y_n)^2 - (x_n - y_n)^2 = 4x_n\, y_n$, il vient ensuite

$$\frac{G(x , y)}{4x_n\, y_n} = \frac{h|x - y|[|x - y'|^{2(n-3)} + \dots + |x - y|^{2(n-3)}]}{|x - y|^{n-2}\,[|x - y'|^{n-2} + |x - y|^{n-2}]} ,$$

ce qui entraîne

$$\frac{|x - y'|^{2(n-3)}\; h|x - y|}{2|x - y'|^{2(n-2)}} \leqslant \frac{G(x , y)}{4x_n\, y_n} \leqslant \frac{(n - 2)|x - y'|^{2(n-3)}\; h|x - y|}{|x - y'|^{2(n-2)}} .$$

La première partie du lemme est complètement démontrée si on choisit $A_1 = \frac{1}{2}$ et $B_1 = (n - 2)$. Pour le cas $n = 2$, nous avons

$$G(x , y) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{|x - y|^2 + 4x_2\, y_2}{|x - y|^2}\right)$$

Puisque $\log(1 + u) \leqslant u$ pour $u \geqslant 0$, et $\log(1 - v) \geqslant - v$ pour $0 \leqslant v \leqslant 1$, il s'en suit que

$$\frac{1}{2}\, \frac{4x_2\, y_2}{|x - y'|^2} \leqslant G(x , y) \leqslant \frac{1}{2}\, \frac{4x_2\, y_2}{|x - y|^2}$$

et la démonstration est achevée.

Remarque 1. - Il est possible de généraliser la première partie du lemme 1 pour une fonction fondamentale de la forme $h(r) = 1/r^{\alpha}$, où $\alpha > 0$ est arbitraire et $\Omega = \underset{\sim}{R}^n$ $(n \geqslant 2)$. On considère d'abord le cas où α est rationnel, puis le cas général où α est comme la limite d'une suite de rationnels.

LEMME 2. - Il existe deux réels positifs A_2, B_2, $0 < A_2 \leqslant B_2$, et une boule V de centre 0, tels que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\frac{A_2\, G(x\,,\,y)}{4x_n\, y_n} \leqslant \Theta(x\,,\,y) \leqslant \frac{B_2\, G(x\,,\,y)}{4x_n\, y_n} \quad \underline{\text{si}} \quad (x\,,\,y) \in (\omega \cap V) \times (\omega \cap V)\ .$$

Démonstration du lemme 2. - Soit $f(x) = h|x - x_0|$, et remarquons que

$$G(x\,,\,x_0) = f(x) - f(x')\ .$$

Grâce au théorème de la moyenne, nous avons

$$G(x\,,\,x_0) = 2x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)\ ,$$

où ξ est situé sur le segment joignant x' à x. Puisque $f \in C^1$ sur $\Omega - \{x\}$, et en 0 en particulier, alors $\forall\ \varepsilon > 0$, il existe une δ-boule V du centre 0 telle que

$$\left|\frac{G(x\,,\,x_0)}{2x_n} - \frac{\partial f}{\partial x_n}(0)\right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad x \in \omega \cap V\ ,$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(0) \begin{matrix} = \\ \\ = \end{matrix} \begin{Bmatrix} n-2 & \text{si} & n \geqslant 3 \\ & & \\ 1 & \text{si} & n = 2 \end{Bmatrix}$$

est positif et, si on choisit $\varepsilon > 0$ convenablement, alors les deux nombres

$$A_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(0) + \varepsilon\right)^{-2} \quad \text{et} \quad B_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(0) - \varepsilon\right)^{-2}$$

répondent aux conditions cherchées.

COROLLAIRE 1. - Dans le cas $n \geqslant 3$, il existe deux nombres réels A, B, $0<A\leqslant B$, tels que

$$\frac{A\, h|x - y|}{|x - y'|^2} \leqslant \Theta(x\,,\,y) \leqslant \frac{B\, h|x - y|}{|x - y'|^2} \quad \underline{\text{où}} \quad (x\,,\,y) \in (v \cap \omega) \times (v \cap \omega)\ .$$

COROLLAIRE 2. - Dans le cas $n = 2$, il existe A, B, réels positifs, $0<A\leqslant B$, tels que

$$\frac{A}{|x - y'|^2} \leqslant \Theta(x , y) \leqslant \frac{B}{|x - y|^2} \text{ où } (x , y) \in (V \cap \omega) \times (V \cap \omega) .$$

Remarque 2. - Si $x = 0$, $y \in \omega$, il existe $A > 0$ tel que $\Theta(0 , y) = A/|y|^n$. Pour $n \geqslant 3$, nous écrirons $\Theta(0 , y) = (Ah|y|)/|y|^2$.

Remarque 3. - Le lemme 2, avec son corollaire 1, est valable pour

$$h(r) = \frac{1}{r^\alpha} , \quad \alpha > 0 , \text{ et } \Omega = R^n \quad (n \geqslant 2) .$$

Maintenant nous introduisons des notations supplémentaires :

$r_p = S^{-p}$, où $S > 1$ est fixé et $p \in \underset{\sim}{N}$,

$I_p = \{x \in \Omega ;\ r_{p+1} < |x| \leqslant r_p\}$,

$e_p = e \cap I_p$, où $e \subset \Omega$,

$J_p = I_{p-1} \cup I_p \cup I_{p+1}$,

$E_p = \Omega - J_p$,

λ_p = la trace de λ sur I_p , où $\lambda > 0$ est une mesure de Radon sur Ω ,

λ'_p = la trace de λ sur J_p ,

λ''_p = la trace de λ sur E_p ,

$H * \lambda(x) = \int H(x - y)\, d\lambda(y) = \int h|x - y|\, d\lambda(y)$ est le potentiel ordinaire de λ au point x .

LEMME 3. - Soit λ une mesure positive sur la boule

$$V = \{x \in \Omega ;\ |x| \leqslant \tfrac{1}{2}\} \text{ et } u(x) \equiv H * \lambda(x) \text{ tel que } u(0) < +\infty .$$

Si $x \in I_p$, il existe $k > 0$, indépendant de p , tel que $H * \lambda''_p(x) \leqslant ku(0)$.

Démonstration du lemme 3. - On a

$$H * \lambda''_p(x) = \int_{E_p} h|x - y|\, d\lambda(y) = \int_{E_p} \left(\frac{h|x - y|}{h|y|}\right) h|y|\, d\lambda(y) .$$

On montrera que si $x \in I_p$ et $y \in E_p$, alors $(h|x - y|/h|y|)$ est borné par un nombre positif qui est indépendant de p .

Dans le cas $n \geqslant 3$, nous avons l'identité $h(\alpha r) \equiv h(\alpha)\, h(r)$. Si $|y| \leqslant r_{p+2}$, $x \in I_p$, alors

$$\left(\frac{h|x - y|}{h|y|}\right) \leqslant \frac{h(r_{p+1} - r_{p+2})}{h(r_{p+2})} = \frac{h(S^{-p-1} - S^{-p-2})}{h(S^{-p-2})} = \frac{h(S^{-p-2})\, h(S - 1)}{h(S^{-p-2})} .$$

Si $|y| \geqslant r_{p-1}$, $x \in I_p$, alors $|x - y| \geqslant |y| - |x| \geqslant |y|\, [1 - (r_p/r_{p-1})]$ ce qui entraîne

$$\left(\frac{h|x - y|}{h|y|}\right) \leqslant \frac{h|y|}{h|y|} h\left[1 - \frac{S^{p-1}}{S^p}\right] = h\left(1 - \frac{1}{S}\right) .$$

Dans le cas $n = 2$, nous avons l'identité $h(\alpha r) \equiv h(\alpha) + h(r)$.

Si $|y| \leqslant r_{p+2}$, $x \in I_p$, alors

$$\left(\frac{h|x - y|}{h|y|}\right) \leqslant \frac{h(S^{-p-2}) + h(S - 1)}{h(S^{-p-2})} - \frac{(p + 2) \log S + h(S - 1)}{(p + 2) \log S} ,$$

qui est majoré par un nombre positif indépendant de p .

Si $|y| \geqslant r_{p-1}$, $x \in I_p$, alors

$$\left(\frac{h|x - y|}{h|y|}\right) \leqslant \frac{h|y| + h(1 - 1/S)}{h|y|} \leqslant 1 + \frac{h(1 - 1/S)}{h(1/2)} .$$

En tout cas, $(h|x - y|/h|y|)$ est majoré par un nombre qui est indépendant de p . Soit $k > 0$, tel que $(h|x - y|/h|y|) \leqslant k$ si $x \in I_p$ et $y \in E_p$, et notons que

$$H * \lambda_p''(x) \leqslant k \int_{E_p} h|y| \, d\lambda(y) \leqslant ku(0) ,$$

ce qui établit notre lemme.

Remarque 4. - BRELOT [1] a établi un lemme analogue pour la suite (r_p) , définie par $h(r_p) = S^p$. Nous verrons que cette suite est aussi utilisable pour le cas $n \geqslant 3$, mais pas pour $n = 2$.

Remarque 5. - Il est possible de faire une extension du lemme 3 pour la fonction $h(r) = 1/r^\alpha$, où $\alpha > 0$.

THÉORÈME 1. - *Si* $e \subset \omega$ *est effilé en* 0 *dans* $\Omega = \underset{\sim}{R}^n$ $(n \geqslant 3)$, *alors* e *est effilé en* 0 *dans le demi-espace* ω .

Démonstration du théorème 1. - Si $0 \notin \bar{e}$, alors l'implication est immédiate. Soit $0 \in \bar{e}$, et rappelons (voir [1], p. 4) qu'il existe une mesure $\lambda > 0$ sur $\omega \cup \partial\omega$ qui charge seulement $\bar{e} - \{0\}$ et qui soit telle que le H-potentiel $u(x) \equiv H * \lambda(x)$ satisfasse à

$$u(0) < + \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0, x \in e} u(x) = + \infty .$$

On a

$$u(x) = H * \lambda_p'(x) + H * \lambda_p''(x) ,$$

et si $x \in e_p$, il existe $k > 0$ tel que $H * \lambda_p''(x) < ku(0)$, grâce au lemme 3. Il s'ensuit que

$$H * \lambda_p'(x) \geqslant u(x) - ku(0) ,$$

et donc $\forall\ M > 0$, il existe $p_0 \in \underset{\sim}{N}$ tel que, si $p \geqslant p_0$, $x \in e_p$, alors

$$H * \lambda_p'(x) > M .$$

Maintenant nous <u>définissons</u> une mesure nouvelle $\mu > 0$ telle que la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à λ soit $d\mu/d\lambda = |y|^2$.

Désignons par V le Θ-potentiel de μ ,

$$V(x) = \int \Theta(x , y)\, d\mu(y) = \int \Theta(x , y)|y|^2\, d\lambda(y) .$$

Alors

$$V(0) = \int \Theta(0 , y)|y|^2\, d\lambda(y) = A \int \frac{h|y|}{|y|^2}\, |y|^2\, d\lambda(y) = Au(0) < \infty$$

grâce à la remarque 2.(lemme 2, corollaire 2). Si $x \in e_p$, alors

$$V(x) = \int \Theta(x , y)|y|^2\, d\lambda(y) \geqslant A \int_{J_p} \frac{(h|x - y|)|y|^2\, d\lambda(y)}{|x - y'|^2}$$

pour tout p assez grand, où $A > 0$ grâce au corollaire 1 du lemme 2. Puisque $y \in J_p$ et $x \in I_p$, il s'ensuit que $|y| \geqslant r_{p+2}$, et que $|x - y'|$ est plus petit que le diamètre de la boule de rayon r_{p-1} et de centre 0 . Donc nous avons

$$V(x) \geqslant A\left(\frac{r_{p+2}}{2r_{p-1}}\right)^2 \int_{J_p} h|x - y|\, d\lambda(y) = A\left(\frac{1}{2S^3}\right)^2 H * \lambda_p'(x) \quad \text{pour} \quad x \in e_p ,$$

où $p \in \underset{\sim}{N}$ est arbitraire. Il s'ensuit que

$$\lim_{x\to 0, x\in e} V(x) = \infty \quad \text{et} \quad V(0) < + \infty ,$$

ce qui entraîne (voir [6]) que e est effilé au sens minimal en 0 . Notre théorème est donc complètement démontré.

<u>Remarque</u> 6. - Le théorème 1 est valable pour la fonction fondamentale de la forme $h(r) = 1/r^\alpha$, où $\alpha > 0$ et $\Omega = \underset{\sim}{R}^n$ $(n \geqslant 2)$.

<u>Remarque</u> 7. - Pour la démonstration du théorème 1, il est possible d'employer la suite (r_p) , définie par $h(r_p) = S^p$, au lieu de la suite que nous avons employée.

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> $e \subset \omega$ <u>est effilé en</u> 0 <u>dans</u> $\Omega = R^2$, <u>alors</u> e <u>est effilé en</u> 0 <u>dans le demi-espace</u> ω .

<u>Démonstration du théorème</u> 2. - Soit $K(0 , y) = y_2/|y|^2$ une fonction harmonique minimale dans ω , avec pôle en 0 , et considérons le disque

$$D = \{y \in \omega ;\ K(0 , y) > 1\} .$$

On fera d'abord la restriction que $e \subset D$.

On définit λ comme on l'a fait dans la démonstration du théorème 1. Mais ici, nous définirons la mesure μ telle que $d\mu/d\lambda = |y|^2 h|y|$. Alors le Θ-potentiel de μ, désigné par

$$V(x) = \int \Theta(x , y)\, d\mu(y) = \int \Theta(x , y)\, |y|^2 h|y|\, d\lambda(y) ,$$

possède la propriété que

$$V(0) = \int \Theta(0 , y)\, |y|^2 h|y|\, d\lambda(y) = A \int \frac{1}{|y|^2} |y|^2 h|y|\, d\lambda(y) = Au(0) < +\infty .$$

Si $x \in e_p$ et p assez grand, nous avons

$$V(x) \geqslant \frac{A_2}{4} \int_{J_p} \frac{G(x , y)}{x_2\, y_2} |y|^2 h|y|\, d\lambda(y) ,$$

où $A_2 > 0$ grâce au lemme 2. Puisque $|y|/|y_2| \geqslant 1$, il s'ensuit que

$$V(x) \geqslant \frac{A_2}{4} \int_{J_p} \frac{|y|\, h|y|}{|x|} (h|x - y| - h|x - y'|)\, d\lambda(y)$$

$$\geqslant \frac{A_2}{4} (\frac{r_{p+2}}{r_p})\, h(r_{p-1}) \int_{J_p} (h|x - y| - h|x - y'|)\, d\lambda(y)$$

$$\geqslant \frac{A_2}{4} (\frac{S^p}{S^{p+2}})(p - 1) \log S(H * \lambda'_p(x) - \int_{J_p} h|x - y'|\, d\lambda(y)) .$$

Soit $k = (A_2/4)(\log S/S^2)$, et remarquons que $|x - y'| \geqslant x_2 \geqslant (r_{p+1})^2$ parce que $x \in I_p \cap D$.

Alors, $h|x - y'| \leqslant h(r_{p+1})^2 = 2h(r_{p+1}) = 2(p + 1) \log S$. Il s'en suit que

$$V(x) \geqslant (p - 1)\, k(H * \lambda'_p(x) - 2(p + 1) \log S\, \|\lambda'_p\|) ,$$

où $\|\lambda'_p\| = \|\lambda_{p-1}\| + \|\lambda_p\| + \|\lambda_{p+1}\|$. On a

$$\sum_p p\|\lambda_p\| < +\infty ,$$

parce que $u(0) = \int h|y|\, d\lambda(y) < +\infty$, et donc $\lim_p p\|\lambda_p\| = 0$.

Un calcul trivial fait voir que l'on a également $\lim_p (p + 1)\|\lambda'_p\| = 0$, il s'en suit que

$$V(x) \geqslant (p - 1)\, k(H * \lambda'_p(x) - 1) \quad \text{pour tout } p \text{ assez grand ,}$$

où $x \in e_p$.

Donc $\lim_{x\to 0, x\in e} V(x) = \infty$, ce qui entraîne que e est effilé au sens minimal en 0. L'implication est établie dans le cas $e \subset D$.

Si $e \subset \omega$ est quelconque, nous avons $e = e' \cup e''$, où

$$e' = e \cap D \quad \text{et} \quad e'' = e \cap (e - D) .$$

Nous avons démontré que e' est effilé en 0 dans ω , et il est évident que e'' est effilé au sens minimal en 0 parce que $\omega - D$ lui-même est effilé en 0 dans ω .

Cela termine la démonstration.

Remarque 8. - Il est possible de choisir $\mu = \sum_p \mu_p$, où $\mu_p = (r_p)^2 \lambda_p$, pour les démonstrations des théorèmes 1 et 2.

Remarque 9. - La suite (r_p) , définie par $h(r_p) = S^p$, ne convient pas pour la démonstration du théorème 2, parce que la suite (r_{p+1}/r_p) tend vers zéro très rapidement, de sorte que

$$\lim_p \left(\frac{r_{p+2}}{r_p}\right) h(r_{p-1}) = 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRELOT (M.). - Sur les ensembles effilés, Bull. Sc. math., 2e Série, t. 68, 1944, 1re partie, p. 12-36.

[2] BRELOT (M.). - Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin, Ann. Univ. Grenoble, Nouvelle Série, Sect. Math. Phys., t. 23, 1948, p. 113-138.

[3] BRELOT (M.). - On topologies and boundaries in potential theory. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 175).

[4] JACKSON (H. L.). - Some results on thin sets in a half plane, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, T. 20, 1970, fasc. 2, p. 210-218.

[5] LELONG-FERRAND (Jacqueline). - Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, Ann. Ec. Norm. Sup., 3e Série, t. 66, 1949, p. 125-159.

[6] NAÏM (Linda). - Sur le rôle de la frontière de Martin dans la théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 183-281 (Thèse Sc. math. Paris, 1957).

(Texte reçu le 21 mai 1973)

Howard L. JACKSON
McMaster University
Department of Mathematics
HAMILTON, Ontario L8S 4K1 (Canada)