Francis Hirsch

Opérateurs dissipatifs et codissipatifs invariants par translations sur les groupes localement compacts

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 15 (1971-1972), exp. nº 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1971-1972__15__A1_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e année, 1970-1972, n° 16, 12 p.

13 janvier 1972

OPÉRATEURS DISSIPATIFS ET CODISSIPATIFS INVARIANTS PAR TRANSLATIONS SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

par Francis HIRSCH

1. Introduction.

Le but de cette étude est de montrer que, dans des cas très généraux, on peut associer à un opérateur dissipatif ou codissipatif invariant par translations un semi-groupe ou une famille résolvante.

Une partie des résultats a été annoncée dans [3]. Nous allons préciser le cadre dans lequel nous nous plaçons ainsi que la terminologie :

G groupe localement compact, non nécessairement abélien, dont la loi est notée multiplicativement (e désignant l'élément neutre). On suppose évidemment $G \neq \{e\}$;

U groupe des nombres complexes de module 1 ;

X espace de Banach des fonctions complexes continues sur G et tendant vers 0 à l'infini ;

τ_x opérateur de X dans lui-même, défini par $\tau_x f(y) = f(yx)$;

σ_x opérateur de X dans lui-même, défini par $\sigma_x f(y) = f(xy)$.

Un opérateur A sur X est dit invariant à droite si,

$$\forall x \in G : \tau_x A = A\tau_x ,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in G , \forall f \in D(A) \ (= \text{domaine de } A) : \tau_x f \in D(A) \text{ et } A(\tau_x f) = \tau_x(Af) .$$

C'est analogue pour l'invariance à gauche définie à partir des opérateurs σ_x .

Un opérateur A sur X , de domaine D , est dit dissipatif si

$$\forall f \in D , \exists (z , x) \in U \times G : zf(x) = \|f\| \text{ et } \operatorname{Re} zAf(x) \leq 0 .$$

Rappelons (Cf. [2]) que ceci est équivalent à

$$\forall f \in D , \forall \lambda > 0 : \|\lambda f - Af\| \geq \|\lambda f\|$$

et aussi à

$$\forall f \in D : (\operatorname{Re} zf(x) \leq 1 \text{ sur } \{(z , x) \in U \times G ; \operatorname{Re} zAf(x) \leq 0\})$$
$$\Rightarrow (\operatorname{Re} zf(x) \leq 1 \text{ pour tout } (z , x) \text{ de } U \times G) .$$

Enfin si D est dense et A invariant à droite, A est dissipatif si, et seulement si,

$$\forall\ f \in D : \quad (f(e) = \|f\|) = (\mathrm{Re}\ Af(e) \leqslant 0) \ .$$

De même, un opérateur V sur X, de domaine D, est dit codissipatif si

$$\forall\ f \in D\ ,\quad \exists\ (z\ ,\ x) \in U \times G : \quad zVf(x) = \|Vf\| \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\ zf(x) \geqslant 0\ ,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall\ f \in D\ ,\quad \forall\ \lambda > 0 : \quad \|f + \lambda Vf\| \geqslant \|\lambda Vf\|$$

et aussi à

$$\forall\ f \in D : \quad (\mathrm{Re}\ zVf(x) \leqslant 1 \quad \text{sur} \quad \{(z\ ,\ x) \in U \times G\ ;\ \ \mathrm{Re}\ zf(x) \geqslant 0\})$$
$$\Rightarrow (\mathrm{Re}\ zVf(x) \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad (z\ ,\ x) \quad \text{de} \quad U \times G) \ .$$

Enfin, si $V(D)$ est dense et V invariant à droite, V est codissipatif si, et seulement si,

$$\forall\ f \in D : \quad (Vf(e) = \|Vf\|) \Rightarrow (\mathrm{Re}\ f(e) \geqslant 0) \ .$$

2. Opérateurs dissipatifs ou codissipatifs invariants à droite et à gauche.

Les résultats donnés dans ce paragraphe généralisent des résultats mentionnés dans [2] et [3], en simplifiant considérablement les démonstrations.

PROPOSITION 1 [1]. - _Soit A un opérateur sur X, de domaine D, tel que A soit préfermé et invariant à droite et à gauche. Alors si A est en outre injectif_

$$\overline{\mathrm{Im}\ A} \supset \overline{D} \ .$$

Il suffit évidemment de démontrer la propriété dans le cas où A est fermé, ce que nous supposons. Soit μ une mesure bornée orthogonale à $\mathrm{Im}\ A$, et considérons f un élément de D. Posons

$$g(x) = \int f(xy)\ d\mu(y) \ .$$

On peut écrire (au sens de l'intégrale vectorielle)

$$g = \int \tau_y\ f\ d\mu(y) \ .$$

A étant fermé et invariant à droite, on a

$$g \in D \quad \text{et} \quad Ag = \int \tau_g(Af)\ d\mu(y) \ .$$

---

[1] Cette proposition a été obtenue en collaboration avec J. P. ROTH.

Par conséquent,

$$\forall\ x \in G : \quad Ag(x) = \int Af(xy)\ d\mu(y) .$$

A étant invariant à gauche, on a

$$\forall\ x \in G : \quad Ag(x) = \int A\sigma_x f(y)\ d\mu(y) = 0 .$$

Donc, $Ag = 0$, et A étant injectif, $g = 0$. Il en résulte que

$$g(e) = \int f d\mu = 0 .$$

μ est orthogonale à D , et la proposition est donc démontrée en utilisant le théorème de Hahn-Banach.

THÉORÈME 2. - Soit A (resp. V) un opérateur sur X , de domaine D dense. Sont équivalents :

(i) A est dissipatif (resp. V est codissipatif) et invariant à droite et à gauche,

(ii) Il existe un semi-groupe fortement continu, et à contraction $(P_t)_{t\geq 0}$ sur X (resp. il existe une L_0-famille résolvante à contraction $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ sur X), tel que,

$$\forall\ f \in D : \quad \lim_{t\to 0}(P_t\ f - f)/t = Af \qquad (\text{resp. } \lim_{\lambda\to 0} R_\lambda\ f = Vf) ,$$

et tel que les opérateurs P_t (resp. R_λ) soient invariants à droite et à gauche.

En outre, le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ (resp. la famille $(R_\lambda)_{\lambda>0}$) est alors unique, et A (resp. V) admet pour plus petit prolongement fermé le générateur infinitésimal (resp. le cogénérateur) de $(P_t)_{t\geq 0}$ (resp. $(R_\lambda)_{\lambda>0}$).

D'après les propriétés démontrées dans [2] (où l'on pourra également se reporter pour les notions de L_0-famille résolvante et de cogénérateur), il suffit de démontrer que si A (resp. V) vérifie (i),

$$\overline{\mathrm{Im}(I - A)} = X \quad (\text{resp. } \overline{\mathrm{Im}(I + V)} = X) .$$

Or, si A est dissipatif (resp. V est codissipatif), A (resp. V) est préfermé, et $(I - A)$ (resp. $(I + V)$) est injectif.

Il suffit donc d'appliquer la proposition 1. On déduit facilement de ce théorème le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. - Soit V un opérateur sur X , de domaine D dense. Sont équivalents :

(i) V est codissipatif, invariant à droite et à gauche et d'image dense ;

(ii) Il existe un semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ fortement continu, et à contraction, formé d'opérateurs invariants à droite et à gauche et tel que

$$\forall\ f \in D : \quad Vf = \lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\ P_t\ f\ dt\ .$$

En outre, $(P_t)_{t\geq 0}$ est alors unique, et le plus petit prolongement fermé de V est l'opposé de l'inverse du générateur infinitésimal de $(P_t)_{t\geq 0}$.

3. Balayage associé à des opérateurs dissipatifs ou codissipatifs.

Nous donnons d'abord un lemme fondamental de balayage, dû essentiellement à MOKOBODZKI-SIBONY [4].

LEMME 4. - Soient Ω un espace localement compact, H un cône convexe de fonctions continues réelles tendant vers 0 à l'infini, et F un fermé de Ω . Sont équivalents :

(i) $\forall\ f \in H$: $(f(x) \leq 1$ pour tout x de $F) \Rightarrow (f \leq 1)$;

(ii) $\forall\ \mu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$, $\exists\ \nu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$: $\int d\nu \leq \int d\mu$,

$$\operatorname{Supp} \nu \subset F\ ,$$

$$\forall\ f \in H : \int f d\mu \leq \int f d\nu$$

($\mathcal{M}_b^+(\Omega)$ désigne l'ensemble des mesures bornées positives sur Ω , et Supp désigne le support).

Supposons que (i) soit vérifié, et soit μ une mesure positive bornée.

Soit $\mathcal{C}^0(F)$ l'ensemble des fonctions continues réelles positives sur F et tendant vers 0 suivant les complémentaires des compacts de F .

Définissons pour tout Φ de $\mathcal{C}^0(F)$,

$$p(\Phi) = \inf\{a \int d\mu - \int f\ d\mu\ ;\ a \geq 0\ ,\ f \in H\ ,\ \text{et}\ a - f \geq \Phi\ \text{sur}\ F\}\ .$$

On voit, d'après (i), que

$$p(\Phi) \geq -\|\Phi\| \int d\mu\ ,$$

et donc p est bien défini sur $\mathcal{C}^0(F)$, et on montre facilement que p est additif et positivement homogène.

Donc, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe L forme linéaire sur $\mathcal{C}^0(F)$ majorée par p ,

$$(\Phi \leq 0) \Rightarrow (p(\Phi) \leq 0) \Rightarrow (L(\Phi) \leq 0)\ .$$

Donc L est une forme linéaire positive et se représente donc par une mesure ν

de $\mathfrak{M}_b^+(\Omega)$ avec

$$\text{Supp } \nu \subset F .$$

Soient $a \geqslant 0$, et $f \in H$,

$$\forall \ \Phi \in \mathcal{C}^0(\Omega) : \ (\Phi \leqslant a - f) \Rightarrow \left(\int \Phi \, d\nu \leqslant a \int d\mu - \int f \, d\mu\right) .$$

Il en résulte facilement que

$$\forall \ a \geqslant 0 , \ \forall \ f \in H : \ a \int d\nu - \int f \, d\nu \leqslant a \int d\mu - \int f \, d\mu ,$$

ce qui implique (ii).

Supposons maintenant que (ii) est vérifié. Soit f appartenant à H , avec $f(x) \leqslant 1$ pour tout x de F . Alors si x_0 est un élément arbitraire de Ω , il existe une mesure ν_{x_0} de $\mathfrak{M}_b^+(\Omega)$ avec

$$\int d\nu_{x_0} \leqslant 1 , \ \text{Supp } \nu_{x_0} \subset F ,$$

$$\forall \ f \in H : \ \int f \, d\nu \geqslant f(x_0) .$$

On a donc $f(x_0) \leqslant 1$.

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> A (<u>resp</u>. V) <u>un opérateur dissipatif</u> (<u>resp</u>. <u>codissipatif</u>) <u>sur</u> X , <u>invariant à droite</u>, <u>de domaine</u> D . <u>On suppose que</u> $\operatorname{Im} A$ <u>est non réduit à</u> $\{0\}$. <u>Alors il existe un voisinage compact</u> v_0 <u>de</u> e , <u>et un nombre</u> $\alpha_0 < 1$ <u>tel qu'à tout couple</u> (v , α) <u>avec</u> v <u>voisinage compact de</u> e , <u>et</u> $\alpha_0 \leqslant \alpha < 1$, <u>on puisse associer des mesures</u> $\nu_{v,\alpha}$, $\mu_{v,\alpha}$ <u>positives sur</u> $U \times G$ <u>avec</u>

$$\text{Supp } \nu_{v,\alpha} \subset \{z \ ; \ \operatorname{Re} z \geqslant \alpha\} \times v ,$$

$$\int d\mu_{v,\alpha} \leqslant 1 , \ \text{Supp } \mu_{v,\alpha} \subset \complement_{U\times G}(\{z \ ; \ \operatorname{Re} z > \alpha\} \times \mathring{v}) \ \ \underline{\text{et}} \ \ \forall \ f \in D , \ \forall \ x \in G ,$$

$$\int zAf(yx) \, d\nu_{v,\alpha}(z , y) = \int zf(yx) \, d[\mu_{v,\alpha} - \delta] (z , y)$$

[<u>resp</u>. $\int zf(yx) \, d\nu_{v,\alpha}(z , y) = \int zVf(yx) \, d[-\mu_{v,\alpha} + \delta] (z , y)$] , (<u>où</u> δ <u>représente la masse de Dirac au point</u> $(1 , e)$).

Nous allons faire la démonstration dans le cas d'un opérateur A dissipatif (la démonstration étant tout à fait analogue dans le cas d'un opérateur V codissipatif).

Puisque A est non identiquement nul et invariant à droite, il existe un élément f_0 de D tel que $Af_0(e)$ soit réel strictement positif. Il existe alors un voisinage compact v_0 de e , et $\alpha_0 < 1$ tel que

$$\operatorname{Re} zAf_0(x) > 0 \ \text{ pour tout } \ (z , x) \in \{z \in U \ ; \ \operatorname{Re} z > \alpha_0\} \times v_0 .$$

Soient alors v un voisinage compact de e , et α avec $v \subset v_0$, et $\alpha_0 < \alpha < 1$.

Soit $W_{v,\alpha} = \{z \in U \ ; \ \text{Re } z \geqslant \alpha\} \times v$ et $F_{v,\alpha} = \complement W_{v,\alpha}$. A étant dissipatif, on a, $\forall f \in D$,

$$(\{(z , x) \in U \times G \ ; \ \text{Re } zAf(x) \leqslant 0\} \subset F_{v,\alpha} \text{ et } \text{Re } zf(x) \leqslant 1 \text{ pour } (z , x) \in F_{v,\alpha})$$
$$\Rightarrow (\text{Re } zf(x) \leqslant 1 \text{ pour tout } (z , x) \in U \times G) .$$

Appliquant le lemme 4 à l'espace $U \times G$ et au cône

$$H_{v,\alpha} = \{(z , x) \longrightarrow \text{Re } zf(x) \ ; \ \{(z , x) \in U \times G \ ; \ \text{Re } zAf(x) \leqslant 0\} \subset F_{v,\alpha}\} ,$$

on obtient qu'il existe une mesure $\mu_{v,\alpha}$ positive telle que

$$\int d\mu_{v,\alpha} \leqslant 1 , \quad \text{Supp } \mu_{v,\alpha} \subset F_{v,\alpha}$$

et

$$\forall h \in H_{v,\alpha} : \ h(e) \leqslant \int h(z , y) \, d\mu_{v,\alpha}(z , y) .$$

Donc, $\forall f \in D$,

$$(\text{Re } zAf(x) > 0 \text{ pour tout } (z , x) \text{ de } W_{v,\alpha}) \Rightarrow (\int \text{Re } zf(y) \, d(\mu_{v,\alpha} - \delta)(z , y) \geqslant 0).$$

En appliquant ce qui précède à $f + \varepsilon f_0$, et en faisant tendre ε vers 0 , on voit que, $\forall f \in D$,

$$(\text{Re } zAf(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } (z , x) \text{ de } W_{v,\alpha}) \Rightarrow (\int \text{Re } zf(y) \, d(\mu_{v,\alpha} - \delta)(z , y) \geqslant 0) .$$

Ceci permet de démontrer, en utilisant le corollaire du théorème de Hahn-Banach concernant le prolongement de formes linéaires positives (corollaire qui peut s'appliquer par suite de l'existence de f_0), qu'il existe une mesure $\nu_{v,\alpha}$ positive, telle que $\text{Supp } \nu_{v,\alpha} \subset W_{v,\alpha}$, et

$$\forall f \in D : \ \int \text{Re } zAf(y) \, d\nu_{v,\alpha}(z , y) = \int \text{Re } zf(y) \, d(\mu_{v,\alpha} - \delta)(z , y) .$$

On en déduit évidemment, en utilisant l'invariance à droite, l'expression cherchée.

Avant de donner des applications de cette proposition, nous signalons un lemme.

LEMME 6. - Soient Ω un groupe localement compact (opération notée multiplicativement), σ une mesure positive sur Ω avec $\int d\sigma \leqslant 1$, et soit f une fonction uniformément continue et bornée sur Ω telle que

$$\forall x , x' \in \Omega : \ \int f(xyx') \, d\sigma(y) = f(xx') .$$

Alors

$$\left.\begin{array}{l} \forall y \in \text{Supp } \sigma \\ \forall x , x' \in \Omega \end{array}\right\} : \ f(xyx') = f(xx') .$$

Il s'agit d'une adaptation du lemme de CHOQUET-DENY [1] au cas d'un groupe non nécessairement commutatif.

THÉORÈME 7. Soit V un opérateur sur X, codissipatif, invariant à droite et à gauche, et de domaine D dense dans X. Alors sont équivalents :

(i) $\overline{\mathrm{Im}\, V} \neq X$,

(ii) $\exists\, (z_0 , x_0) \in U \times G$, $x_0 \neq e$, tel que

$$\forall\, f \in D \,,\quad \forall\, x \in G : \quad z_0\, Vf(xx_0) = Vf(x) \,.$$

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est évidente.

Supposons (i), et prenons les notations de la proposition 5.

Supposons que $\forall\, v \subset v_0$, $\forall\, \alpha_0 < \alpha < 1$, $\nu_{v,\alpha} \neq 0$. Soit alors $a_{v,\alpha}$ la masse totale de $\nu_{v,\alpha}$, on a donc

$$\forall\, f \in D : \quad f = \lim_{v \searrow \{e\},\alpha \nearrow 1} \int z\sigma_y\, Vf(d(-\mu_{v,\alpha}+\delta)/a_{v,\alpha})(z\,,\,y) \,.$$

V étant supposé invariant à gauche, ceci montre que $X = \overline{D} \subset \overline{\mathrm{Im}\, V}$, ce qui est contradictoire.

Donc il existe $v \subset v_0$ et $\alpha_0 < \alpha < 1$ tel que $\nu_{v,\alpha} = 0$, et donc $\forall\, f \in D$, $\forall\, x \in G$, $\forall\, z_1 \in U$

$$z_1\, Vf(x) = \int zz_1\, Vf(yx)\, d\mu_{v,\alpha}(z\,,\,y)$$

et V étant invariant à gauche, on a aussi (en appliquant ce qui précède à $z_1\, \sigma_{x'}\, f$), $\forall\, f \in D$, $\forall\, x\,,\, x' \in G$, $\forall\, z_2\,,\, z_1 \in U$,

$$z_1\, z_2\, Vf(x'x) = \int z_1\, zz_2\, Vf(x'yx)\, d\mu_{v,\alpha}(z\,,\,y) \,.$$

Alors, d'après le lemme 6, $\forall\, (z_0\,,\, x_0) \in \mathrm{Supp}\, \mu_{v,\alpha}$, $\forall\, f \in D$, $\forall\, x \in G$,

$$z_0\, Vf(xx_0) = Vf(x)$$

(on peut supposer $\mu_{v,\alpha} \neq 0$, car sinon $\mathrm{Im}\, V = \{0\}$, et (ii) est bien vérifié).

Si $x_0 = e$ et $z_0 \neq 1$, on a $\mathrm{Im}\, V = \{0\}$, et (ii) est vérifié.

Si $x_0 \neq e$, (ii) est aussi vérifié, et on est toujours dans l'un de ces deux cas, car

$$\mathrm{Supp}\, \mu_{v,\alpha} \not\ni (1\,,\, e) \,.$$

THÉORÈME 8. - Supposons que G n'ait pas de sous-groupe compact autre que $\{e\}$.

Soit A (resp. V) un opérateur dissipatif (resp. codissipatif) sur X, de domaine D, invariant à droite et à gauche.

<u>Alors, si</u> Im A (<u>resp</u>. Im V) <u>est non réduit à</u> $\{0\}$,

$$\overline{\operatorname{Im} A} = \overline{D} \quad (\underline{\text{resp}}.\ \overline{\operatorname{Im} V} = \overline{D}) .$$

Supposons que A est un opérateur dissipatif tel que $\operatorname{Im} A \neq 0$, et prenons les notations de la proposition 5 .

Supposons que $\nu_{v,\alpha} = 0$. Alors, A étant invariant à droite et à gauche, on aurait $\forall\, z_1 , z_2 \in U$, $\forall\, x , x' \in G$, $\forall\, f \in D$,

$$z_1\, z_2\, f(xx') = \int z_1\, zz_2\, f(xyx')\, d\mu_{v,\alpha}(z , y) .$$

Donc, en raisonnant comme précédemment, $\exists\, (z_0 , x_0) \in U \times G$, $x_0 \neq e$,

$$\forall\, f \in D , \ \forall\, x \in G : \ z_0\, f(xx_0) = f(x) .$$

Soit x_1 tel que $|f(x_1)| = \|f\|$. Alors

$$\forall\, n \in \underset{\sim}{Z} : \ |f(x_1\, x_0^n)| = \|f\| .$$

f tendant vers 0 à l'infini, et G n'ayant pas de sous-groupe compact autre que $\{e\}$, on voit que ceci entraîne aussitôt que f est nulle, et donc D est réduit à $\{0\}$, ce qui contredit $\operatorname{Im} A \neq \{0\}$.

Donc on a $\forall\, v \subset v_0$, $\forall\, \alpha_0 < \alpha < 1$, $\nu_{v,\alpha} \neq 0$, et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 7 , on voit que

$$\overline{D} \supset \overline{\operatorname{Im} A} .$$

Supposons maintenant que μ est une mesure bornée sur G , orthogonale à $\operatorname{Im} A$. Soit, pour f élément de D ,

$$\Phi_f(y) = \int f(yx)\, d\mu(x) .$$

A étant invariant à droite et à gauche,

$$\forall\, f \in D : \ \int z\Phi_f(y)\, d[\mu_{v,\alpha} - \delta]\,(z , y) = 0 .$$

Soit (D étant invariant à gauche)

$$\forall\, f \in D , \ \forall\, x \in G : \ \int z\Phi_f(xy)\, d[\mu_{v,\alpha} - \delta]\,(z , y) = 0 .$$

Soit (z_0 , x_0) tel que $z_0\, \Phi_f(x_0) = \|\Phi_f\|$,

$$\|\Phi_f\| = \int z_0\, z\Phi_f(x_0\, y)\, d\mu_{v,\alpha}(z , y) .$$

Si (z_1 , x_1) appartient au support de $\mu_{v,\alpha}$, on a

$$\forall\, n \in \underset{\sim}{N} : \ z_0\, z_1^n\, \Phi_f(x_0\, x_1^n) = \|\Phi_f\| .$$

G n'ayant pas de sous-groupe compact autre que $\{e\}$, et Φ_f tendant vers 0 à l'infini, on a $\Phi_f = 0$, ce qui implique $\int f\, d\mu = 0$, et donc μ est orthogonale à D . Ceci démontre (d'après le théorème de Hahn-Banach) que

$$\overline{\mathrm{Im}\ A} \subset \overline{D} .$$

La démonstration est pratiquement identique dans le cas codissipatif.

4. Opérateurs dissipatifs, invariants à droite, de domaine invariant à droite et à gauche.

Dans ce paragraphe, nous donnons une extension du théorème 2 pour les opérateurs dissipatifs.

THÉORÈME 9. - Soit A un opérateur sur X, de domaine D dense. On suppose que

$$\forall\ x \in G :\ \tau_x D = \sigma_x D = D .$$

Alors sont équivalents :

(i) A est dissipatif et invariant à droite,

(ii) Il existe un semi-groupe fortement continu et à contraction $(P_t)_{t\geq 0}$ sur X tel que

$$\forall\ f \in D :\ \lim_{t\to 0}(P_t\, f - f)/t = Af ,$$

et tel que les opérateurs P_t soient invariants à droite.

En outre, le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ est alors unique et son générateur infinitésimal est le plus petit prolongement fermé de A.

Nous allons démontrer que, sous l'hypothèse (i), $\mathrm{Im}(I - A)$ est dense. On peut évidemment supposer $\mathrm{Im}\ A$ non réduit à $\{0\}$. Reprenons les notations de la proposition 5. D étant dense, il est clair que les mesures $\nu_{v,\alpha}$ sont non nulles. Donc, notant $a_{v,\alpha}$ la masse totale de $\nu_{v,\alpha}$, on a

$$\forall\ f \in D :\ Af = \lim_{v\searrow\{e\},\alpha\nearrow 1} \int z\ \sigma_y\ f\, d((\mu_{v,\alpha}-\delta)/a_{v,\alpha})(x\ ,\ y) .$$

Soit μ une mesure bornée orthogonale à $\mathrm{Im}(I - A)$. Pour f élément de D, notons

$$\Phi_f(y) = \int f(yx)\ d\mu(x) .$$

On a

$$\forall\ f \in D :\ \lim_{v\searrow\{e\},\alpha\nearrow 1} \int z\Phi_f(y)\ d(\delta + (\delta - \mu_{v,\alpha}/a_{v,\alpha}))(z\ ,\ y) = 0 .$$

Soit $f \in D$, et soit $(z_0\ ,\ y_0)$ tel que $z_0\ \Phi_f(y_0) = \|\Phi_f\|$.

Comme

$$\Phi_f(y_0\ y) = \Phi\sigma_{y_0}\ f(y)$$

et que D est invariant à gauche, on a

$$0 = \|\Phi_f\| + \lim_{V\searrow\{e\},\alpha\nearrow 1} \int zz_0\ \Phi_f(y_0\ y)\ d((\delta - \mu_{V,\alpha})/a_{V,\alpha})(z\ ,\ y)\ .$$

Or

$$\mathrm{Re} \int zz_0\ \Phi_f(y_0\ y)\ d((\delta - \mu_{V,\alpha})/a_{V,\alpha})(z\ ,\ y) \geqslant 0\ .$$

Donc $\|\Phi_f\| = 0$, et en particulier,

$$\int f(x)\ d\mu(x) = 0\ .$$

Donc μ est orthogonale à D , ce qui démontre le résultat.

5. Opérateurs dissipatifs ou codissipatifs, invariants à droite, sur un groupe compact.

Dans le cas d'un groupe compact, on peut encore étendre le théorème précédent.

THÉORÈME 10. - On suppose G compact. Soit A un opérateur sur X , de domaine D dense. Sont équivalents :

(i) A est dissipatif et invariant à droite,

(ii) Il existe un semi-groupe fortement continu et à contraction $(P_t)_{t\geqslant 0}$ sur X tel que

$$\forall\ f \in D :\ \lim_{t\to 0}(P_t\ f - f)/t = Af\ ,$$

et tel que les opérateurs P_t soient invariants à droite.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est évidente.

Supposons (i), et plaçons-nous dans le cas où $\mathrm{Im}\ A \neq \{0\}$. Reprenant les notations de la proposition 5, et notant $a_{V,\alpha}$ la masse totale de $\nu_{V,\alpha}$ (qui est non nulle puisque D est dense), on obtient

$$\forall\ f \in D :\ \ Af = \lim_{V\searrow\{e\},\alpha\nearrow 1} \int z\ \sigma_y\ f\ d((\mu_{V,\alpha} - \delta)/a_{V,\alpha})(z\ ,\ y)\ .$$

Il existe donc un ensemble J , un filtre $\mathfrak{F}$ sur J , et des opérateurs A^j $(j \in J)$ dissipatifs, bornés, invariants à droite, tels que

$$\forall\ f \in D :\ \ Af = \lim_{\mathfrak{F}} A^j\ f\ .$$

Soit $P_t^j = e^{tA^j}$. P_t^j est évidemment un opérateur invariant à droite, de norme inférieure ou égale à 1 .

Donc pour toute f de X , $\{P_t^j\ f\ ;\ j \in J\}$ est un ensemble relativement compact d'après le théorème d'Ascoli.

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathfrak{F}$. Pour tout $t \geqslant 0$, il existe un opérateur P_t , de norme inférieure ou égale à 1 , invariant à droite, tel que

$$\forall f \in X : P_t f = \lim_{\mathcal{U}} P_t^j f .$$

Du fait que, pour tout j , $(P_t^j)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe, on déduit que

$$\forall f \in X , \forall t , s \geq 0 : P_{t+s} f = P_t P_s f .$$

LEMME. - Pour tout f de D , $P_t^j A^j f$ converge suivant $\mathcal{U}$ vers $P_t Af$, la limite étant uniforme en t sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

En effet, pour tout f de D ,

$$\|P_t^j A^j f - P_t Af\| \leq \|A^j f - Af\| + \|(P_t^j - P_t)(Af)\| .$$

D'autre part, si h appartient à D ,

$$\|P_t^j Af - P_s^j Af\| \leq 2 \|Af - h\| + |s - t| \|A^j h\| .$$

Le lemme se déduit aisément de ces deux inégalités et de la densité de D . Ceci étant, $\forall f \in D$, $\forall j \in J$, $\forall t$,

$$P_t^j f - f = \int_0^t P_s^j A^j f \, ds .$$

Donc, d'après le lemme, $s \dashrightarrow P_s Af$ est continue, et

$$P_t f - f = \int_0^t P_s Af \, ds .$$

ce qui prouve que $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu, et que (ii) est vérifié.

COROLLAIRE 11. - On suppose G compact. Soit V un opérateur sur X , invariant à droite, codissipatif, de domaine et d'image denses. Alors il existe un semi-groupe fortement continu et à contraction $(P_t)_{t \geq 0}$ sur X tel que

$$\forall f \in D(V) : \lim_{\lambda \to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f \, dt = Vf ,$$

et tel que les opérateurs P_t soient invariants à droite.

En effet, si V est codissipatif et d'image dense, V est injectif, et $-V^{-1}$ vérifie l'hypothèse (i) du théorème 10, et donc (ii). Le résultat en découle aisément.

Nota. - Les méthodes utilisées au paragraphe 2 ont aussi été employées pour donner des résultats analogues dans le cadre des espaces homogènes avec J. P. ROTH [5].