

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

MICHÈLE DEHEN

Décomposition en somme directe de l'espace des fonctions affines sur un simplexe de Choquet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. n° 9,
p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A8_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉCOMPOSITION EN SOMME DIRECTE DE L'ESPACE DES FONCTIONS AFFINES SUR UN SIMPLEXE DE CHOQUET

par Michèle DEHEN

(d'après F. JELLET [6])

1. Introduction.

Si $C(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles sur un espace compact Ω , un théorème d'Eilenberg montre que, pour toute décomposition de $C(\Omega)$ en une somme directe $C(\Omega) = C_1 \oplus C_2$ de sous-espaces vectoriels, il existe une décomposition $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ de Ω en deux fermés disjoints tels que C_i soit isomorphe à $C(\Omega_i)$ ($i = 1, 2$).

Dans cet exposé, on désire faire une généralisation de ce résultat à l'espace de Banach $\mathcal{A}(X)$, qui sera aussi noté $\mathcal{A}$, des fonctions affines continues à valeurs réelles sur un simplexe de Choquet compact X . $\mathcal{A}$ est muni de la norme de la convergence uniforme et de l'ordre partiel habituel.

2. Fonctions affines sur deux faces fermées complémentaires dans X .

Définitions. - Une face d'un ensemble convexe K est un sous-ensemble convexe $F \subset K$ tel que, si $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F$ pour $0 < \lambda < 1$ et $x, y \in K$, alors x et y appartiennent à F .

On dit que les faces F_1 et F_2 de K sont complémentaires, si $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, et si l'enveloppe convexe $\text{conv}(F_1 \cup F_2) = K$.

La proposition suivante résulte du théorème d'Edwards, et fut démontrée par LAZAR:

LEMME 1. - Si F_1 et F_2 sont deux faces fermées complémentaires du simplexe X , et si $f_i \in \mathcal{A}(F_i)$ ($i = 1, 2$), alors il existe une fonction $f \in \mathcal{A}(X)$ unique telle que

$$\begin{cases} f|_{F_i} \equiv f_i & (i = 1, 2) , \\ f|_{F_j} \equiv 0 & (j \neq i) . \end{cases}$$

Ce résultat permet de définir une injection croissante, isométrique,

$$i : \mathcal{A}(F_1) \rightarrow \mathcal{A} ,$$

en posant, pour $f \in \mathcal{A}(F_1)$: $i(f)(x) = f(x)$ si $x \in F_1$, $i(f)(x) = 0$ si $x \in F_2$. On identifiera $\mathcal{A}(F_1)$ avec son image dans $\mathcal{A}$, ainsi que $\mathcal{A}(F_2)$.

Définition. - Si B est un espace de Banach, et si B_1 et B_2 sont deux sous-espaces vectoriels de B , on dit que B est somme directe de B_1 et B_2 :

$B = B_1 \oplus B_2$ si, $\forall b \in B$, il existe une décomposition unique de b en $b = b_1 + b_2$ avec $b_i \in B_i$, et si de plus $\|b\| = \sup(\|b_1\|, \|b_2\|)$.

PROPOSITION 1. - Si F_1 et F_2 sont deux faces fermées complémentaires dans X , alors $\mathcal{A}(X)$ s'écrit comme somme directe $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ où $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(F_i)$ pour $i = 1, 2$.

Démonstration. - Si $f \in \mathcal{A}$, on définit $f_1 \in \mathcal{A}_1$ par $f_1(x) = f(x)$ si $x \in F_1$, et $f_1(x) = 0$ si $x \in F_2$, et on définit de même $f_2 \in \mathcal{A}_2$. D'après le lemme 1, la décomposition de f est $f = f_1 + f_2$. La propriété des normes se déduit du principe du minimum de Bauer.

La réciproque de cette proposition est aussi vraie, c'est-à-dire :

Pour toute décomposition de $\mathcal{A}(X)$ en somme directe $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, il existe deux faces fermées F_1 et F_2 complémentaires de X , telles que l'on puisse identifier $\mathcal{A}_1$ à $\mathcal{A}(F_1)$ et $\mathcal{A}_2$ à $\mathcal{A}(F_2)$.

Elle sera démontrée dans le paragraphe suivant.

3. Décomposition de $\mathcal{A}$ en somme directe.

Soient $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des points extrémaux de X , $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$. $\underline{1}$ désigne l'élément de $\mathcal{A}$ qui est identiquement égal à 1 sur le simplexe X .

LEMME 2 (Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{A}$). - Les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont les points f de $\mathcal{A}$ tels que, $\forall x \in \mathcal{E}(X)$, on ait $|f(x)| = +1$.

Démonstration. - Si on suppose que $f \in \mathcal{A}$ vérifie $|f(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathcal{E}(X)$, le principe du minimum de Bauer implique que f appartient à $\mathcal{B}$. Si on suppose $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ où $f_i \in \mathcal{B}$, alors, pour tout x de $\mathcal{E}(X)$,

$$|f(x)| = \frac{1}{2} |f_1(x) + f_2(x)| = 1 \quad \text{et} \quad |f_i(x)| \leq |f(x)| = 1 \quad \text{pour } i = 1, 2 ;$$

par suite, pour tout $x \in \mathcal{E}(X)$, $f_1(x) = f_2(x) = f(x) = \pm 1$. Les trois fonctions

sont continues et affines, et elles sont égales sur $\mathcal{E}(X)$; elles sont donc égales sur tout X . Par suite, $f \in \mathcal{E}(\mathcal{B})$.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{B}$, et s'il existe $x_0 \in \mathcal{E}(X)$ tel que $|f(x_0)| < 1$, la fonction $|f|$ est convexe et continue sur X , par suite $v = 1 - |f|$ est concave et continue sur X , de plus elle vérifie $0 \leq v \leq 1$ et $v(x_0) = b > 0$. On peut définir une fonction $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ par $u(x) = 0$ si $x \neq x_0$ et $u(x_0) = b$. u est alors convexe, semi-continue supérieurement, et on a $u \leq v$. D'après le théorème d'Edwards, il existe $h \in \mathcal{A}$ vérifiant $u \leq h \leq v$. Par suite, les fonctions $(f + h)$ et $f - h$ appartiennent à $\mathcal{B}$, et f s'écrit $f = \frac{1}{2} [(f + h) + (f - h)]$, où h n'est pas nulle puisque $h(x_0) = b > 0$. Ce qui montre que $f \notin \mathcal{E}(\mathcal{B})$.

LEMME 3. - Si T est une isométrie linéaire surjective : $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, alors il existe deux faces fermées complémentaires F_1 et F_2 de X , et une isométrie linéaire positive surjective $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in F_1, \quad T(f)(x) &= P(f)(x), \\ \forall f \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in F_2, \quad T(f)(x) &= -P(f)(x). \end{aligned}$$

Démonstration. - T étant linéaire isométrique et surjective, on en déduit que T transforme l'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ en lui-même. Par suite $T(\underline{1}) \in \mathcal{E}(\mathcal{B})$, et d'après le lemme 2, ceci équivaut à $|T(\underline{1})(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathcal{E}(X)$. Si l'on pose

$$F_1 = \{x ; T(\underline{1})(x) = 1\}, \quad F_2 = \{x ; T(\underline{1})(x) = -1\},$$

comme F_1 et F_2 sont les ensembles où la fonction affine continue $T(\underline{1})$ prend son maximum et son minimum, ce sont des faces fermées complémentaires. Si on définit P comme indiqué dans le lemme, P est une isométrie linéaire de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}$, et vérifie $P(\underline{1}) = \underline{1}$. D'après un théorème d'Eilenberg, on peut alors déduire que P est positive.

On utilise ensuite un résultat dû à EDWARDS :

Il existe un homéomorphisme affine de X sur le sous-ensemble

$$\{y \in \mathcal{A}' ; y \geq 0, \quad \|y\| = y(\underline{1}) = 1\},$$

continu dans l'espace de Banach $\mathcal{A}'$, dual topologique de $\mathcal{A}$, lorsque $\mathcal{A}'$ est muni de la topologie vague $\sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

On désignera par la même lettre, X et son injection dans $\mathcal{A}'$. On sait de plus que $\mathcal{E}(X) \cup [-\mathcal{E}(X)]$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathcal{A}'$, qui sera notée $\mathcal{B}'$.

LEMME 4. - Si P est une isométrie linéaire positive surjective : $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ vérifiant $P(\underline{1}) = \underline{1}$, alors il existe un homéomorphisme affine $h : X \rightarrow X$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in X, \quad \text{on ait } P(f)(x) = f[h(x)] .$$

Démonstration. - Si P' est le transposé de P , alors P' est une isométrie linéaire positive surjective de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}'$. D'après la caractérisation de X dans $\mathcal{A}'$, on déduit que $P'(X) = X$. Si l'on pose $h = P'/X$, le lemme est démontré.

PROPOSITION 2. - Si T est une isométrie linéaire surjective : $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, alors il existe deux faces fermées complémentaires F_1 et F_2 de X , et un homéomorphisme affine $h : X \rightarrow X$, tels que, $\forall f \in \mathcal{A}$,

$$\forall x \in F_1, \quad \text{on ait } T(f)(x) = + f[h(x)] ,$$

et

$$\forall x \in F_2, \quad \text{on ait } T(f)(x) = - f[h(x)] .$$

Démonstration. - Elle est immédiate, en utilisant les lemmes 3 et 4.

THÉOREME. - Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ est une décomposition de $\mathcal{A}$ en somme directe, alors il existe deux faces fermées complémentaires F_1 et F_2 de X telles que $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(F_i)$ (pour $i = 1, 2$).

Démonstration. - Puisque $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, toute fonction f de $\mathcal{A}$ se décompose de manière unique en $f = f_1 + f_2$ où $f_i \in \mathcal{A}_i$. Si on définit l'application T de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ par $T(f) = T(f_1 + f_2) = f_1 - f_2$, T est une isométrie linéaire surjective. Par suite, il existe deux faces fermées complémentaires F_1 et F_2 de X , et un homéomorphisme h de X sur X , tels que

$$\forall f = f_1 + f_2 \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in F_1, \quad T(f)(x) = f_1(x) - f_2(x) = f_1[h(x)] + f_2[h(x)] ,$$

$$\forall x \in F_2, \quad T(f)(x) = f_1(x) - f_2(x) = - f_1[h(x)] - f_2[h(x)] .$$

Si l'on démontre que, pour tout x de X , on a $h(x) = x$, on pourra en déduire que l'on peut identifier $\mathcal{A}_1$ à $\mathcal{A}(F_1)$, et $\mathcal{A}_2$ à $\mathcal{A}(F_2)$.

Comme h est affine et continue, il suffit de montrer que, $\forall x \in \mathcal{E}(X)$, on a $h(x) = x$. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathcal{E}(X)$ tel que $h(x_0) \neq x_0$. Alors, il existe un voisinage G de x_0 tel que $G \cap h(G) = \emptyset$. Puisque x_0 est un point extrémal de X , les tranches contenant x_0 forment un système fondamental de voisinages de x_0 , par suite on peut prendre G de la forme $G = \{x \in X; g(x) > \alpha\}$, pour une fonction g de $\mathcal{A}$ et un réel α , et l'on peut supposer g positive

vérifiant $\|g\| = 1$ et $0 < \alpha < g(x_0) \leq \|g\|$. Soit $g = g_1 + g_2$ la décomposition de g où $g_1 \in \mathcal{A}_1$. Comme $\|g\| = \sup(\|g_1\|, \|g_2\|)$, supposons que $\|g_1\| = \|g\| = 1$. D'après le principe du minimum de Bauer, il existe $x_1 \in \mathcal{E}(X)$ tel que $|g_1(x_1)| = 1$. Or

$$|g(x_1)| = |g_1(x_1) + g_2(x_1)| \leq 1,$$

et

$$|Tg(x_1)| = |g_1(x_1) - g_2(x_1)| \leq 1.$$

Par suite

$$|g_2(x_1)| = 0,$$

et donc

$$|g(x_1)| = |g_1(x_1)| = 1.$$

Puisque g est supposée positive, il en résulte que $g(x_1) = g_1(x_1) = 1$. Par suite, $x_1 \in G$. Or $g[h(x_1)] = Tg(x_1) = g_1(x_1) = 1$, et donc $h(x_1) \in G$. Il en résulte que $G \cap h(G) \neq \emptyset$. Ce qui est en contradiction avec la définition de G . On obtient un résultat analogue en supposant que $\|g\| = \|g_2\| = 1$. On peut donc en déduire que $h(x) = x$ pour tout x appartenant à X , et de plus, $\forall f \in \mathcal{A}$, $Tf = f \iff f \in \mathcal{A}_1 \iff f(x) = 0, \forall x \in F_2$. Il en résultera donc que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(F_1)$. De même $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(F_2)$. Le théorème est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUER (H.). - Konvexität in topologischen Vektorräumen. Vorlesung an der Universität Hamburg, 1965.
- [2] DIXMIER (Jacques). - Les C^* -algèbres et leurs représentations. - Paris, Gauthier-Villars, 1964 (Cahiers scientifiques, 29).
- [3] EDWARDS (David Albert). - On the homeomorphic affine embedding of a locally compact cone into a Banach dual space, Proc. London math. Soc., 3rd Series, t. 14, 1964, p. 399-414.
- [4] EDWARDS (David Albert). - Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 2798-2800.
- [5] EILENBERG (Samuel). - Banach space methods in topology, Annals of Math., Series 2, t. 43, 1942, p. 568-579.
- [6] JELLETT (F.). - On the direct sum decomposition of the affine space of a Choquet simplex, Quart. J. of Math., Series 2, t. 18, 1967, p. 233-237.
- [7] LAZAR (A. J.). - Affine functions on simplexes (Thèse, Hebrew University, Jerusalem, 1966).