

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

ARNAUD DE LA PRADELLE

Sur la quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. n° 10, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A6_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA QUASI-ANALYTICITÉ DANS LA THÉORIE AXIOMATIQUE
DES FONCTIONS HARMONIQUES,
par Arnaud de LA PRADELLE

Sommaire

Nous nous plaçons dans le cadre de l'axiomatic de M. BRELOT [1]. L'espace de base Ω est localement compact, à base dénombrable, non compact, connexe et localement connexe, muni des axiomes 1, 2, 3. On suppose l'existence d'un potentiel $P > 0$ dans Ω , ainsi que celle d'une base d'ouverts complètement déterminants (voir [3], p. 37). On note $p_y(x)$ le potentiel à support ponctuel $\{y\}$ situé dans une base compacte du cône S^+ muni de la topologie T de Mme HERVÉ [3], et on suppose que, pour tout $y \in \Omega$, les potentiels p_y sont proportionnels. Ces hypothèses sont celles qui permettent à Mme HERVÉ d'associer au premier faisceau, un second faisceau, dit faisceau des fonctions harmoniques adjointes. On note avec un astérisque les notions relatives aux fonctions adjointes, et $p_x^*(y)$ désigne le potentiel adjoint à support ponctuel $\{x\}$, défini par la relation

$$p_x^*(y) = p_y(x) .$$

Il est important de noter que les fonctions adjointes dépendent du choix de p_y . Cependant, les systèmes de fonctions adjointes correspondant à deux potentiels p_y et p'_y se déduisent l'un de l'autre par multiplication par une fonction continue > 0 dans Ω .

On ajoute l'hypothèse que les potentiels adjoints à support ponctuel sont proportionnels.

Dans ces conditions, et en s'inspirant d'un travail de J. DENY [2], on peut caractériser la propriété de quasi-analyticité, notée A , relative aux fonctions harmoniques (A^* pour les fonctions harmoniques adjointes) :

Une fonction harmonique, dans un domaine ω , est nulle dès qu'elle est nulle au voisinage d'un point, quel que soit le domaine ω .

A (resp. A^*) est équivalente à une propriété d'approximation dans le faisceau adjoint.

Soit E un fermé de Ω , à frontière compacte ∂E , tel que $\mathbb{C}E$ ne soit effilé en aucun point de ∂E . Nous dirons qu'un tel fermé est stable. $\mathbb{C}E$ est réunion finie ou dénombrable de domaines composants ω_p ($\mathbb{C}E = \bigcup \omega_p$). Soit ω'_p un sous-ouvert arbitraire de chaque ω_p , et $\omega' = \bigcup \omega'_p$. On note alors α_E la propriété suivante relative au fermé précédent :

L'ensemble $\{p_y\}_{y \in \omega}$ est total dans l'espace $C(\partial E)$ des fonctions finies continues sur ∂E muni de la topologie de la convergence uniforme.

α_E^* désignera la même propriété pour un fermé stable^{*} (relativement à l'effilement adjoint), en remplaçant les p_y par les p_y^* .

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME ([4], [5]).

$$A^* \iff \alpha_E \text{ pour tout fermé stable } E$$

$$(\text{resp. } A \iff \alpha_E^* \text{ pour tout fermé stable}^* E).$$

La démonstration utilise l'existence d'une base d'ouverts non effilés en leurs points-frontière, résultat de G. MOKOBODZKI et D. SIBONY.

L'étude précédente permet de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME de Runge ([4], [5]). - Si A^* est vérifié, pour pouvoir approcher à ε près, sur tout compact contenu dans l'ouvert $\omega \subset \Omega$, toute fonction harmonique dans ω , par une fonction harmonique dans Ω , il est nécessaire et suffisant que $\mathbb{C}\omega$ n'ait pas de composante connexe compacte.

Ce dernier théorème s'applique, en particulier, aux solutions d'un opérateur différentiel du second ordre, de type elliptique, défini dans $\mathbb{R}^n$ et à coefficients assez réguliers. Voir à ce sujet B. MALGRANGE [6].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).
- [2] DENY (Jacques). - Systèmes totaux de fonctions harmoniques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 1, 1949, p. 103-113.
- [3] HERVÉ (Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

- [4] LA PRADELLE (Arnaud de). - Approximation et caractère de quasi-analyticité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 19-21.
 - [5] LA PRADELLE (Arnaud de). - Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique de fonctions harmoniques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).
 - [6] MALGRANGE (Bernard). - Sur les systèmes d'équations elliptiques, Colloques internationaux du C. N. R. S., 71 : La théorie des équations aux dérivées partielles [1956, Nancy], p. 139-142. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1956.
-