Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel

Nicu Boboc
Aurel Cornea

Balayage des mesures par rapport à un cône de fonctions inférieurement semi-continues sur un espace localement compact

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. n° 22, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A12_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
11e année, 1966/67, n° 22

22 juin 1967

BALAYAGE DES MESURES PAR RAPPORT À UN CÔNE DE FONCTIONS INFÉRIEUREMENT SEMI-CONTINUES SUR UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

par Nicu BOBOC et Aurel CORNEA

Soient X un espace localement compact à base dénombrable, $\mathcal{P}$ un cône convexe de fonctions non négatives, inférieurement semi-continues et localement bornées sur X, et $\mathcal{P}_c$ le sous-cône d'éléments continus de $\mathcal{P}$.

Pour toute partie A de X et tout $p \in \mathcal{P}_c$, nous désignerons par p_A la régularisée inférieurement semi-continue de l'enveloppe inférieure de la famille d'éléments de $\mathcal{P}$ qui dominent p sur A. Si l'application

$$p \to p_A$$

est linéaire, et si $\mathcal{P}$ satisfait à quelques conditions assez générales, on associe à toute mesure μ $\mathcal{P}_c$-intégrable (c'est-à-dire $\int p \, d\mu < \infty$ pour tout $p \in \mathcal{P}_c$) une mesure μ^A telle que

$$\int p \, d\mu^A = \int p_A \, d\mu \quad .$$

Le résultat principal obtenu est le suivant : Si A est une partie de X qui satisfait à la condition (ß) (page 22-03), et si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre de mesures $\mathcal{P}_c$-intégrables qui converge vaguement vers une mesure μ telle que

$$\lim_{\mathcal{U}} \int p \, d\nu = \int p \, d\mu < \infty \quad ,$$

alors il existe une fonction θ mesurable-Borel sur X, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, telle que, pour tout $f \in \mathcal{K}(X)$, on a

$$\lim_{\mathcal{U}} \int f \, d\nu = \int f\theta \, d\mu + \int [(1 - \theta(x)) \int f \, d\lambda_{x,A}] \, d\mu(x) \quad ,$$

où, pour tout $x \in X$, $\lambda_{x,A}$ est une certaine mesure associée au point x et à l'ensemble A.

La théorie développée ici peut s'appliquer au balayage sur un espace harmonique, et on obtient ainsi une généralisation d'un théorème classique de O. FROSTMAN [3] concernant le comportement de la solution du problème de Dirichlet aux points irréguliers.

1. - Dans tout ce qui suit, X sera un espace localement compact à base dénombrable, et $\mathcal{P}$ sera un cône convexe de fonctions non négatives inférieurement semi-continues et localement bornées sur X. Nous désignerons par $\mathcal{P}_c$ le cône convexe d'éléments continus de $\mathcal{P}$. On suppose que les conditions suivantes sont remplies :

($\mathcal{P}_1$) L'enveloppe inférieure de tout ensemble fini d'éléments de $\mathcal{P}$ est un élément de $\mathcal{P}$;

($\mathcal{P}_2$) Tout élément de $\mathcal{P}$ est la limite d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{P}_c$;

($\mathcal{P}_3$) Le cône $\mathcal{P}_c$ est linéairement séparant (c'est-à-dire que pour deux points différents x, $y \in X$, il existe deux éléments p, $q \in \mathcal{P}_c$ tels que

$$p(x)\, q(y) \neq p(y)\, q(x) \quad) ;$$

($\mathcal{P}_4$) Le cône $\mathcal{P}_c$ est adapté (c'est-à-dire que pour tout $p \in \mathcal{P}_c$, il existe $q \in \mathcal{P}_c$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\{x \in X \mid p(x) \geqslant \varepsilon q(x)\}$$

est compact).

De ces deux dernières conditions, il résulte ([4]) que l'ensemble de fonctions à support compact sur X de la forme $p - q$, où p, $q \in \mathcal{P}_c$, est un ensemble positivement riche ; il en résulte aussi que, pour toute forme linéaire et monotone ℓ définie sur $\mathcal{P}_c$, il existe une mesure de Radon μ, et une seule, telle qu'on ait

$$\int p \, d\mu = \ell(p)$$

pour tout $p \in \mathcal{P}_c$.

EXEMPLE 1. - Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace harmonique de Brelot (axiomes 1, 2, 3, existence d'un potentiel positif sur X) [2], ou de Bauer (axiomes 1, 2, (K_1), (T^+)) [1], tel que X a une base dénombrable. Le cône $\mathcal{P}$ de potentiels localement bornés sur X satisfait les conditions ($\mathcal{P}_1$)-($\mathcal{P}_4$).

EXEMPLE 2. - Soient X l'espace euclidien à n-dimensions, $n > 2$, et α un nombre réel, $0 < \alpha \leqslant 2$. Alors, le cône $\mathcal{P}$ de potentiels de Riesz d'ordre α et localement bornés, satisfait aux conditions ($\mathcal{P}_1$)-($\mathcal{P}_4$).

EXEMPLE 3. - Soient X un espace localement compact à base dénombrable, et $(P_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe de Feller, sous-markovien, tel que, pour tout $f \in \mathcal{K}^+(X)$, la fonction

$$x \to \int_0^\infty P_t f(x) \, dt$$

soit continue. Alors, le cône $\mathcal{P}$, de fonctions excessives bornées p pour lesquelles

$$\lim_{t\to 0} P_t\, p(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in X ,$$

satisfait aux conditions $(\mathcal{P}_1)$-$(\mathcal{P}_4)$.

2. - Pour tout ensemble A de X et tout $p \in \mathcal{P}$, nous désignerons par p_A la régularisée inférieurement semi-continue de l'enveloppe inférieure de la famille d'éléments de $\mathcal{P}$ qui dominent p sur A, et nous l'appellerons <u>la balayée de</u> p <u>sur</u> A (par rapport au cône $\mathcal{P}$). Si A est tel que l'application

$$p \to p_A$$

de $\mathcal{P}_c$ dans le cône des fonctions non négatives et inférieurement semi-continues sur X est linéaire, alors, pour toute mesure μ sur X, $\mathcal{P}_c$-intégrable (c'est-à-dire $\int p\, d\mu < \infty$ pour tout $p \in \mathcal{P}_c$), il existe une mesure μ^A uniquement déterminée par la relation

$$\int p\, d\mu^A = \int p_A\, d\mu ,$$

appelée la <u>balayée de</u> μ <u>sur</u> A. Dans ce cas, on voit tout-de-suite que la balayée d'une mesure $\mathcal{P}_c$-intégrable sur A est portée par l'ensemble $\bar{A}$. De même, pour tout ensemble mesurable-Borel B de X, la fonction

$$x \to \varepsilon_x^A(B) \quad (1)$$

est mesurable-Borel, et, pour toute mesure μ, $\mathcal{P}_c$-intégrable, on a

$$\mu^A(B) = \int \varepsilon_x^A(B)\, d\mu(x) .$$

Si ρ est une métrique sur X, nous désignerons par U_x^r, pour tout $r > 0$ et tout $x \in X$, la boule ouverte de centre x et de rayon r.

DÉFINITION. - <u>Un ensemble</u> A <u>de</u> X <u>satisfait à la condition</u> (ß) s'il existe une métrique ρ sur X compatible avec la topologie de X telle que, pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, les conditions suivantes soient remplies :

(a) <u>Les applications</u>

$$p \to p_{A-U_x^r} \qquad \text{et} \qquad p \to p_A$$

<u>sont linéaires sur</u> $\mathcal{P}_c$;

---

(1) Pour $x \in X$, ε_x est la mesure unité concentrée dans le point x.

(b) Pour tout $p \in \mathcal{P}_c$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathcal{P}$ tel que $q \geqslant p$ sur $A - U_x^r$ et

$$\limsup_{y \to x} q(y) < p_{A-U_x^r}(x) + \varepsilon \ ;$$

(c) La restriction de la mesure ε_x^A à l'ensemble $X - \overline{U}_x^r$ est dominée par la mesure $\varepsilon_x^{A-U_x^r}$;

(d) Pour tout $p \in \mathcal{P}_c$ et tout $q \in \mathcal{P}$, tel que $p = q$ sur $A - U_x^r$, $q \leqslant p$ sur X, on a

$$\int p \, d\varepsilon_x^{A-U_x^r} = \int q \, d\varepsilon_x^{A-U_x^r} \ .$$

REMARQUE. - Dans l'exemple 1, toute partie A de X satisfait à la condition (ß). Dans l'exemple 2, toute partie fermée de X satisfait à la condition (ß). Dans l'exemple 3, pour toute partie A presque borélienne, les points (a), (c), (d) sont vrais.

LEMME 1. - Soient Y un espace localement compact, μ une mesure de Radon sur Y, et f une fonction bornée, à support compact, et continue μ-presque-partout sur Y. Alors, pour tout filtre $\mathfrak{B}$ de mesures de Radon sur Y qui converge vaguement vers μ, on a

$$\lim_{\mathfrak{B}} \int \hat{f} \, d\nu = \lim_{\mathfrak{B}} \int \check{f} \, d\nu = \int f \, d\mu \ ,$$

où $\hat{f}$ (resp. $\check{f}$) est la régularisée inférieurement (resp. supérieurement) semi-continue de f.

Nous avons

$$\int f \, d\mu = \int \hat{f} \, d\mu \leqslant \liminf_{\mathfrak{B}} \int \hat{f} \, d\nu \ ,$$
$$\int f \, d\mu = \int \check{f} \, d\mu \geqslant \limsup_{\mathfrak{B}} \int \check{f} \, d\nu \ .$$

LEMME 2. - Soient A un ensemble de X satisfaisant à la condition (ß) par rapport à une métrique ρ, et μ une mesure $\mathcal{P}_c$-intégrable sur X. Alors il existe un ensemble au plus dénombrable T, de nombres réels positifs, tel que, pour tout $r \notin T$, $r > 0$, et tout $f \in \mathcal{K}^+(X \times X)$, la fonction

$$x \longrightarrow \int f(x, y) \, d\varepsilon_x^{A-U_x^r}(y)$$

est continue μ-presque-partout.

Puisque l'ensemble de fonctions de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, g_k(y) \quad ,$$

où f_k , $g_k \in \mathcal{K}^+(X)$ est dense, par rapport à la convergence uniforme, dans $\mathcal{K}^+(X \times X)$, et puisque $\mathcal{P}$ satisfait aux conditions $(\mathcal{P}_1)$-$(\mathcal{P}_4)$, il suffit de démontrer que, pour tout $p \in \mathcal{P}_c$, il existe un ensemble au plus dénombrable T , de nombres réels positifs, tel que, pour tout $r > 0$, $r \notin T$, la fonction

$$x \to p_{A\text{-}U_x^r}(x)$$

est continue μ-presque-partout. En effet, soit $p \in \mathcal{P}_c$. Pour tout $r > 0$, nous désignerons par p_r la fonction

$$x \to p_{A\text{-}U_x^r}(x) \quad .$$

De la condition (ß)-(b), il résulte que, pour tout $r' < r < r''$, on a

$$p_{r'} \geqslant \check{p}_r \geqslant \hat{p}_r \geqslant p_{r''} \quad (2) \ .$$

Puisque la fonction

$$r \to \int^* p_r \, d\mu$$

est monotone, il existe un ensemble au plus dénombrable T , de nombres réels positifs, tel que cette fonction soit continue dans tout point $r > 0$, $r \notin T$. Donc, pour tout $r > 0$, $r \notin T$, on a

$$\check{p}_r = \hat{p}_r \quad \mu\text{-presque-partout} \ .$$

3. - Soit A un ensemble de X satisfaisant à la condition (ß) par rapport à une métrique ρ . Pour toute mesure ν sur X , $\mathcal{P}_c$-intégrable, nous désignerons par ν' la mesure sur l'espace produit $X \times X$ définie par la relation

$$\int f \, d\nu' = \int \left(\int f(x , y) \, d\varepsilon_x^A(y) \right) d\nu(x) \ .$$

On voit tout-de-suite que, pour tout $f \in \mathcal{K}^+(X)$, et $p \in \mathcal{P}$, on a

$$\int f(x)\, p(y) \, d\nu'(x , y) \leqslant \int f(x)\, p(x) \, d\nu(x) \ .$$

---

(2) $\hat{p}_r$ ($\check{p}_r$) est la régularisée inférieurement (supérieurement) semi-continue de p_r .

Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre de mesure $\mathcal{P}_c$-intégrables sur X qui converge vaguement vers une mesure $\mathcal{P}_c$-intégrable μ, nous désignerons par $\mathcal{U}'$ l'image de $\mathcal{U}$ par l'application

$$\nu \to \nu' \quad ,$$

définie ci-dessus, et par μ'' la limite vague suivant $\mathcal{U}'$.

PROPOSITION 1. - Pour tout $f \in \mathcal{K}^+(X)$, et tout $p \in \mathcal{P}$, on a

$$\int f(x)\, p(y)\, d\mu''(x , y) \leqslant \int f(x)\, p(x)\, d\mu(x) \quad .$$

Si $p \in \mathcal{P}_c$, on a

$$\int f(x)\, p(y)\, d\mu''(x , y) \leqslant \lim_{\mathcal{U}'} \int f(x)\, p(y)\, d\nu'(x , y)$$

$$\leqslant \lim_{\mathcal{U}} \int f(x)\, p(x)\, d\nu(x) = \int f(x)\, p(x)\, d\mu(x) \quad .$$

La proposition en résulte, en utilisant la propriété $(\mathcal{P}_2)$.

REMARQUE. - Si i est l'application de X dans $X \times X$ définie par

$$i(x) = (x , x) \quad ,$$

il résulte, de la proposition précédente, que la restriction de μ'' à la diagonale Δ de $X \times X$ est dominée par la mesure $\mu \circ i^{-1}$. Donc il existe une fonction θ sur X, mesurable-Borel, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, telle qu'on ait

$$\int_\Delta f(x , y)\, d\mu''(x , y) = \int_X f(x , x)\, \theta(x)\, d\mu(x)$$

pour tout $f \in \mathcal{K}(X \times X)$.

LEMME 3. - Il existe un ensemble au plus dénombrable T, de nombres réels positifs, tel que, pour tout $r > 0$, $r \notin T$, et toute fonction $g \in \mathcal{K}^+(X \times X)$ égale à zéro sur l'ensemble $\{(x , y) \mid \rho(x , y) \leqslant r\}$, on a

$$\int g\, d\mu'' \leqslant \int \left(\int g(x , y)\, d\varepsilon_x^{A-U_x^r}(y) \right) d\mu(x) \quad .$$

L'assertion en résulte en utilisant les lemmes 1 et 2 et la condition (B)-(c).

PROPOSITION 2. - Pour tout $x \in X$ et tout $p \in \mathcal{P}_c$, soit $\ell_x(p)$ le nombre, défini par la relation

$$\ell_x(p) = \sup_{r>0} p_{A-U_x^r}(x) \quad .$$

Alors :

(a) Pour tout $p \in \mathcal{P}_c$, la fonction $x \to \ell_x(p)$ est inférieurement semi-continue;

(b) Pour tout $x \in X$, l'application $p \to \ell_x(p)$ est une forme linéaire et monotone croissante sur $\mathcal{P}_c$.

Soit $x_0 \in X$, $r > 0$ et $x \in U^r_{x_0}$. Alors, pour tout $p \in \mathcal{P}_c$, on a

$$\ell_x(p) \geqslant p_{A-U^r_{x_0}}(x) \quad ,$$

$$\liminf_{x \to x_0} \ell_x(p) \geqslant p_{A-U^r_{x_0}}(x_0) \quad ,$$

$$\liminf_{x \to x_0} \ell_x(p) \geqslant \ell_{x_0}(p) \quad .$$

L'assertion (b) résulte de la condition (ß)-(a) et du fait que la fonction

$$r \to p_{A-U^r_x}(x)$$

est monotone.

REMARQUE. - Du point (b) de cette proposition, on déduit, en utilisant les propriétés $(\mathcal{P}_1)$-$(\mathcal{P}_4)$ que, pour chaque $x \in X$, il existe une mesure $\lambda_x = \lambda_{x,A}$ telle que, pour tout $p \in \mathcal{P}_c$,

$$\int p \, d\lambda_x = \ell_x(p) \quad .$$

De plus, en utilisant le point (a) de la proposition 2, on voit que la fonction $x \to \lambda_x(B)$ est mesurable-Borel, quel que soit l'ensemble B mesurable-Borel.

Il est facile de vérifier que la mesure λ_x est la limite vague des mesures $\varepsilon_x^{A-U^r_x}$ pour $\mathcal{U}$.

THÉORÈME 1. - Soient A un ensemble de X satisfaisant à la condition (ß), μ une mesure $\mathcal{P}_c$-intégrable, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de mesures $\mathcal{P}_c$-intégrables qui converge vaguement vers μ . Alors, il existe une fonction réelle mesurable-Borel θ sur X , $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, uniquement déterminée μ-presque-partout, telle que, pour tout $f \in \mathcal{K}(X \times X)$, on ait

(a) $$\lim_{\mathcal{U}} \int \left(\int f(x , y) \, d\varepsilon_x^{A}(y) \, d\nu \right)$$

$$= \int \theta(x) \, f(x , x) \, d\mu(x) + \int \left[(1 - \theta(x)) \int f(x , y) \, d\lambda_{x,A}(y) \right] d\mu(x) \; ;$$

(b) $\int (1 - \theta(x))\, \lambda_{x,A}(\{x\})\, d\mu(x) = 0$.

Soit μ'' la limite vague sur l'espace $X \times X$ du filtre $\mathcal{U}'$, et soit θ la fonction mesurable-Borel sur X , $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, définie dans la remarque de la proposition 1. Soient $f \in \mathcal{K}^+(X)$, $p \in \mathcal{P}_c$, et Δ la diagonale de $X \times X$. Nous allons démontrer la relation suivante :

$$\int_{X\times X-\Delta} f(x)\, p(y)\, d\mu''(x\,,\,y) = \int [(1 - \theta(x))\, f(x) \int p(y)\, d\lambda_{x,A}(y)]\, d\mu(x) \quad .$$

Soit T l'ensemble au plus dénombrable de nombres réels positifs associé, dans le lemme 2, à la mesure μ . Soient $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$, et $r > 0$, $r \notin T$. De la condition (ß)-(b), on peut trouver

$$r_{\varepsilon,x_0} > 0 \ , \qquad r_{\varepsilon,x_0} < \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad q \in \mathcal{P} \ ,$$

tels que $q = p$ sur $A - U_{x_0}^{2r/3}$, $q \leqslant p$ sur X , $q \leqslant p_{A-U_{x_0}^{2r/3}} + \varepsilon$ sur $U_{x_0}^{r_{\varepsilon,x_0}}$.

Soit maintenant $f' \in \mathcal{K}^+(X)$ égale à zéro sur $X - U_{x_0}^{r_{\varepsilon,x_0}}$. En utilisant la condition (ß)-(d), on obtient que les fonctions

$$(x\,,\,y) \to f'(x)\, p(y) \ ,$$

$$(x\,,\,y) \to f'(x)\, q(y) \ ,$$

sont égales presque-partout par rapport à la mesure définie sur $X \times X$ par la relation

$$h \to \int \Big(\int h(x\,,\,y)\, d\varepsilon_x^{A-U_x^r}(y) \Big)\, d\mu(x) \quad .$$

Du lemme 3, il résulte que, pour toute fonction $g \in \mathcal{K}^+(X \times X)$, $0 \leqslant g \leqslant 1$, égale à zéro sur l'ensemble $\{(x\,,\,y) \mid \rho(x\,,\,y) \leqslant r\}$, on a

$$\int g(x\,,\,y)\, f'(x)\, p(y)\, d\mu''(x\,,\,y) = \int g(x\,,\,y)\, f'(x)\, q(y)\, d\mu''(x\,,\,y) \quad .$$

De la proposition 1, on a

$$\int g(x\,,\,y)\, f'(x)\, q(y)\, d\mu''(x\,,\,y)$$

$$\leqslant \int_{X\times X-\Delta} f'(x)\, q(y)\, d\mu''(x\,,\,y) = \int_{X\times X} f'(x)\, q(y)\, d\mu''(x\,,\,y) - \int_{\Delta} f'(x)\, q(y)\, d\mu''(x\,,\,y)$$

$$\leqslant \int_X f'(x)\, q(x)\, d\mu(x) - \int_X \theta(x)\, f'(x)\, q(x)\, d\mu(x) = \int_X (1 - \theta(x))\, f'(x)\, q(x)\, d\mu(x) \quad .$$

Donc,

$$\int g(x\ ,\ y)\ f'(x)\ p(y)\ d\mu''(x\ ,\ y) \leqslant \int_X (1 - \theta(x))\ f'(x)(p_{A-U_{x_0}^{2r/3}}(x) + \varepsilon)\ d\mu(x)$$

$$\leqslant \int_X (1 - \theta(x))\ f'(x)(p_{A-U_x^{r/3}}(x) + \varepsilon)\ d\mu(x)$$

$$\leqslant \int_X [(1 - \theta(x))\ f'(x) \int p(y)\ d\lambda_x(y)]\ d\mu(x) + \varepsilon \int_X f'(x)\ d\mu(x)\ .$$

Puisqu'il existe un système fini de points $(x_k)_{k=1,\ldots,n}$, et un système fini $(f_k)_{k=1,\ldots,n}$ de fonctions de $\mathcal{K}^+(X)$ tel que, pour tout k, f_k est égale à zéro sur $X - U_{x_k}^{r_\varepsilon, x_k}$ et $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$, on voit que la dernière relation reste vraie en remplaçant f' par f. Les nombres ε, r et la fonction g, étant arbitraires, nous avons

$$\int_{X\times X-\Delta} f(x)\ p(y)\ d\mu''(x\ ,\ y) \leqslant \int_X [(1 - \theta(x))\ f(x) \int p(y)\ d\lambda_x(y)]\ d\mu(x)\ .$$

Puisque, pour tout $x \in U_{x_0}^{r_\varepsilon, x_0}$, les fonctions p et q sont égales presque-partout par rapport à la mesure $\varepsilon_x^{A-U_x^r}$, nous avons, pour toute fonction

$$g \in \mathcal{K}(X \times X)\ , \qquad 0 \leqslant g \leqslant 1\ ,$$

et toute mesure ν, $\mathcal{P}_c$-intégrable,

$$\int^* (f'(x) \int g(x\ ,\ y)\ p(y)\ d\varepsilon_x^{A-U_x^r}(y))\ d\nu(x)$$

$$= \int^* (f'(x) \int g(x\ ,\ y)\ q(y)\ d\varepsilon_x^{A-U_x^r}(y))\ d\nu(x)$$

$$\leqslant \int (f'(x) \int q(y)\ d\varepsilon_x^{A}(y))\ d\nu(x) \leqslant \int (f'(x) \int \check{q}(y)\ d\varepsilon_x^{A}(y))\ d\nu(x)\ ,$$

où $\check{q}$ est la régularisée supérieurement semi-continue de q. En utilisant les lemmes 1 et 2, on obtient

$$\int (f'(x) \int g(x\ ,\ y)\ p(y)\ d\varepsilon^{A-U_x^r}(y))\ d\mu(x)$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} \int^* (f'(x) \int g(x\ ,\ y)\ p(y)\ d\varepsilon^{A-U_x^r}(y))\ d\nu(x)$$

$$\leqslant \lim_{\mathcal{U}} \int (f'(x) \int \check{q}(y)\ d\varepsilon_x^{A}(y))\ d\nu(x) = \lim_{\mathcal{U}'} \int f'(x)\ \check{q}(y)\ d\nu'(x\ ,\ y)$$

$$\leqslant \int f'(x)\ \check{q}(y)\ d\mu''(x\ ,\ y) = \int_X f'(x)\ \check{q}(x)\ \theta(x)\ d\mu(x) + \int_{X\times X-\Delta} f'(x)\ \check{q}(y)\ d\mu''(x\ ,\ y)$$

$$\leqslant \int_X f'(x)(p_{A-U_{x_0}^{2r/3}} + \varepsilon)\ \theta(x)\ d\mu(x) + \int_{X\times X-\Delta} f'(x)\ p(y)\ d\mu''(x\ ,\ y)$$

$$\leqslant \int_X (f'(x)\ \theta(x) \int p\ d\lambda_x)\ d\mu(x) + \int_{X\times X-\Delta} (f'(x)\ p(y)\ d\mu''(x\ ,\ y)) + \varepsilon \int_X f'(x)\ d\mu(x)\ .$$

Comme dans la première partie de la démonstration, on peut remplacer dans l'inégalité précédente f' par f . La fonction g et les nombres r et ε étant arbitraires, on obtient

$$\int (f(x) \int p \, d\lambda_x) \, d\mu(x) \leqslant \int_X (f(x) \, \theta(x) \int p \, d\lambda_x) \, d\mu(x) + \int_{X\times X-\Delta} f(x) \, p(y) \, d\mu''(x , y) .$$

Le théorème est ainsi complètement démontré.

THÉORÈME 2. - Soient A un ensemble de X satisfaisant à la condition (ß), et $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre de mesure $\mathcal{P}_c$-intégrables qui converge vaguement vers une mesure μ telle que, pour tout $p \in \mathcal{P}_c$, on ait

$$\lim_{\mathfrak{U}} \int p \, d\nu = \int p \, d\mu < \infty .$$

Alors il existe une fonction θ mesurable-Borel sur X , $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, telle que, pour toute fonction continue f , dominée en module par un élément de $\mathcal{P}_c$, on ait:

(a) $\lim_{\mathfrak{U}} \int f \, d\nu^A = \int \theta \, f \, d\mu + \int [(1 - \theta(x)) \int f \, d\lambda_{x,A}] \, d\mu(x)$;

(b) $\int (1 - \theta(x)) \, \lambda_{x,A}(\{x\}) \, d\mu(x) = 0$.

Soient f une fonction non négative continue sur X , $p \in \mathcal{P}_c$, tels que $f \leqslant p$, et $q \in \mathcal{P}_c$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$K_\varepsilon = \{x \in X \mid p(x) \geqslant \varepsilon q(x)\}$$

soit compact. On a

$$\int_X f \, d\nu^A = \int_{X\times X} f(y) \, d\nu'(x , y)$$

$$= \int_{X\times X} f(y) \, I_{K_\varepsilon}(x) \, d\nu'(x , y) + \int_{X\times X} f(y) \, I_{X-K_\varepsilon}(x) \, d\nu'(x , y) ,$$

$$\int_{X\times X} f(y) \, I_{X-K_\varepsilon}(x) \, d\nu'(x , y) \leqslant \varepsilon \int_{X\times X} q(y) \, d\nu'(x , y) = \varepsilon \int_X q \, d\nu^A \leqslant \varepsilon \int_X q \, d\nu ,$$

$$\int_{X\times X} f \, d\mu'' \leqslant \lim_{\mathfrak{U}} \int_X f \, d\nu^A \leqslant \int_{X\times X} f(y) \, d\mu''(x , y) + \varepsilon \int_X q \, d\mu .$$

ε étant arbitraire,

$$\lim_{\mathfrak{U}} \int_X f \, d\nu^A = \int_{X\times X} f \, d\mu'' .$$

L'assertion résulte maintenant de cette relation en choisissant θ , la fonction définie dans le théorème précédent.

COROLLAIRE 1. - Soit A un ensemble de X satisfaisant à la condition (ß). Alors, pour tout $x \in X$, on a la relation

$$\varepsilon_x^A = \varepsilon_x^A(\{x\})\ \varepsilon_x + (1 - \varepsilon_x^A(\{x\}))\ \lambda_{x,A} \ .$$

COROLLAIRE 2. - Soient $(X , \mathcal{H})$ un espace harmonique de Brelot [2] ou de Bauer [1], U un ouvert de X, et x_0 un point frontière irrégulier de U. Alors, pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur U, convergeant vers x_0, il existe un nombre réel θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, tel que, pour toute fonction réelle, non négative, continue, f, sur ∂U, dominée par un potentiel fini continu, on ait

$$\lim_{\mathcal{U}} H_f^U = \theta f(x_0) + (1 - \theta) \int f \, d\varepsilon_{x_0}^{X-U-\{x_0\}} \ .$$

L'assertion résulte du théorème 2, en remarquant que

$$H_f^U(x) = \int f \, d\varepsilon_x^{X-U} \ , \qquad \text{pour tout} \quad x \in U \ ,$$

et que

$$\lambda_{x_0,X-U} = \varepsilon_{x_0}^{X-U-\{x_0\}} \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heins). - Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 1-59.

[2] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).

[3] FROSTMAN (O.). - Les points irréguliers dans la théorie du potentiel et le critère de Wiener, Kungl. Fysiogr. Sällsk. Lund Forhandl., t. 9, 1939, n° 2, p. 1-10 ; Meddel. Lunds Univ. mat. Semin., t. 4, 1939, 10 p.

[4] Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 1re année, 1962. - Paris, Secrétariat mathématique, 1962.