

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. T. LAPRESTÉ

Sur une propriété des suites asymptotiquement inconditionnelles

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 30, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979___A26_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 P

S E M I N A I R E
D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E
1978-1979

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES
=====

SUITES ASYMPTOTIQUEMENT INCONDITIONNELLES
=====

J.T. LAPRESTÉ¹
(Université de Clermont-Ferrand)

On démontre dans cet exposé que de toute suite normalisée convergeant faiblement vers 0, d'un espace de Banach, on peut extraire une sous-suite "presque inconditionnelle" et on utilise ce résultat pour obtenir en termes de modèles étalés (cf. [B]) une caractérisation des espaces de Banach dont le dual a la propriété de Banach-Saks.

On se propose de montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite semi-normalisée^{*} tendant faiblement vers 0 d'un espace de Banach E , si $\varepsilon > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ sont donnés, on peut trouver une partie infinie N_0 de $\mathbb{N}$ telle que la suite $(x_n)_{n \in N_0}$ soit basique et que pour chaque partie A à d éléments de N_0 la projection naturelle de $[(x_n)_{n \in N_0}]$ sur $[(x_n)_{n \in A}]$ soit de norme inférieure à $1 + \varepsilon$.

La clé de la démonstration est le lemme suivant dû à Bourgain :

Lemme : Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite tendant faiblement vers 0 dans un espace de Banach E . Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier D , il existe un ensemble fini $S \subset \mathbb{N}$ tel que pour tout D -uplet $(y_k)_{k \leq D}$ d'éléments de la boule unité du dual E' de E , il existe $p \in S$ avec :

$$\sup_{1 \leq k \leq D} |y_k(x_p)| \leq \varepsilon .$$

Démonstration : Soit $B_{E'}$, la boule unité de E' (compacte pour la topologie $\sigma(E', E)$) et sur $B_{E'}^D$, considérons la suite de fonctions :

$$f_i : B_{E'}^D \longrightarrow \mathbb{R}^+ : (y_k)_{k \leq D} \longrightarrow \sum_{k=1}^D |x_i(y_k)| .$$

Considérons $K_i = \{f_i \geq \varepsilon\} \cap B_{E'}^D$, c'est un compact et on a évidemment $\bigcap_i K_i = \emptyset$ ce qui implique le résultat.

De ce lemme, on déduit dans un premier temps la proposition suivante :

Proposition 1 : Soient $d \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement

^{*} $0 < \delta < \inf_{i \in \mathbb{N}} \|x_i\| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \|x_i\| \leq \gamma < +\infty$.

ment vers 0 d'un espace de Banach E et $(F_A)_{A \in [\mathbb{N}]_d}$ une famille de parties finies de la boule unité du dual E' de E ^{*}.

Si il existe un entier D , tel que pour tout $A \in [\mathbb{N}]_d$, $\text{card } F_A \leq D$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $N_0 \in [\mathbb{N}]$, $N_0 = (p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (où la suite p_i est rangée dans l'ordre croissant) tel que :

si $A \in [\mathbb{N}_0]_d$, si $p_k \in N_0 \setminus A$,

on a :

$$\forall y \in F_A \quad |y(x_{p_k})| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Démonstration : La preuve se déroule par récurrence sur l'entier d .
Commençons par établir le résultat pour $d = 1$.

① Amorce de la récurrence : $d = 1$.

Soit donc $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$, une famille de sous-ensembles de $B_{E'}$, indexée par les entiers (en fait, les parties de $\mathbb{N}$ à un élément) telle que :

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} (\text{card } F_i) \leq D < +\infty.$$

Pour ε donné, à l'aide du lemme, on peut trouver un ensemble fini d'indices S_1 tel que $\forall j \in \mathbb{N} \exists p(j) \in S_1$ avec $\sup_{y \in F_j} |y(x_{p(j)})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Evidemment il existe un même indice p_1 de S_1 qui convient pour une infinité d'éléments de $\mathbb{N}$. Soit donc N_1 l'ensemble infini des entiers j strictement supérieurs à p_1 tels que :

$$\sup_{y \in F_j} |y(x_{p_1})| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

A présent comme F_{p_1} est fini et que la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 faiblement, on peut extraire de N_1 une sous-suite $N'_1 = (n_q^1)_{q \in \mathbb{N}}$, telle que :

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad \sup_{y \in F_{p_1}} |y(x_{n_q^1})| \leq \frac{\varepsilon}{2^{q+1}}.$$

* Dans ce qui suit $[\mathbb{N}]_d$ désignera l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ à d éléments et $[\mathbb{N}]$ l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$.

A chaque fois que nous écrirons $M = (m_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [\mathbb{N}]$, on supposera

$m_1 < m_2 < \dots$.

Supposons qu'au rang k on ait construit des entiers $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ et des parties infinies de $\mathbb{N}$, $(N'_i)_{i \leq k}$ ($N'_i = (n_q^i)_{q \in \mathbb{N}}$, q est le rang de n_q^i dans N'_i) décroissantes pour l'inclusion avec $p_i \in N'_{i-1} \setminus N'_i$ $i = 1, \dots, k$ ($N'_0 = \mathbb{N}$); et tels que :

$$(\alpha) \quad \forall i \leq k \quad \forall j \in N'_i \quad \sup_{y \in F_j} |y(x_{p_i})| \leq \frac{\varepsilon}{2^i},$$

$$(\beta) \quad \forall i \leq k \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad \sup_{y \in F_{p_i}} |y(x_{n_q^i})| \leq \frac{\varepsilon}{2^{q+i}};$$

alors en réitérant le procédé initial à l'ensemble N'_k , il est facile de trouver un entier $p_{k+1} \in N'_k$ et une partie infinie N'_{k+1} de N'_k tels que :

$$\forall j \in N'_{k+1} \quad \sup_{y \in F_j} |y(x_{p_{k+1}})| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

et d'en extraire une nouvelle sous-suite $N'_{k+1} = (n_q^{k+1})_{q \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad \sup_{y \in F_{p_{k+1}}} |y(x_{n_q^{k+1}})| \leq \frac{\varepsilon}{2^{q+k+1}}.$$

En définitive, on a trouvé un ensemble infini d'entiers $N_0 = (p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que si on considère un de ses éléments p_{k_0} , on a :

$$\text{si } j < k_0 : \quad \sup_{y \in F_{p_{k_0}}} |y(x_{p_j})| \leq \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad \text{car } p_{k_0} \in N'_j;$$

$$\text{si } j > k_0 : \quad \sup_{y \in F_{p_{k_0}}} |y(x_{p_j})| \leq \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad \text{car } p_j \in N'_{k_0}$$

et l'entier $j - k_0$ est certainement inférieur au rang de p_j dans N'_{k_0} .

② Achéons la récurrence en supposant la construction effectuée au rang d et en passant au rang $d+1$.

Soit donc $(F_A)_{A \in [\mathbb{N}]_{d+1}}$ une famille de parties de B_E , avec $\sup_A (\text{card } F_A) \leq D < +\infty$.

A l'aide du lemme, on peut encore choisir un ensemble fini $S_1 \subset \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall A \in [\mathbb{N}]_{d+1} \quad \exists p(A) \in S_1 \quad \text{avec} :$$

$$\sup_{y \in F_A} |y(x_{p(A)})| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

- Tout d'abord, il est facile, à l'aide du théorème de Ramsey [R], de trouver une sous-suite N_1 de $\mathbb{N}$ telle que le même indice $p_1 \in S_1$ convienne pour tous les $d+1$ -uples d'éléments de N_1 et on peut évidemment supposer que les éléments de N_1 sont tous strictement plus grands que p_1 .

- A présent, à chaque $A \in [N_1]_d$, on peut associer l'ensemble $A_{p_1} = A \cup \{p_1\} \in [N_1 \cup \{p_1\}]_{d+1}$; on peut selon l'hypothèse de récurrence trouver une partie infinie N'_1 de N_1 , telle que :
si $N'_1 = (n_q^1)_{q \in \mathbb{N}}$ et si $n_q^1 \in N'_1 \setminus A$ alors :

$$\sup_{y \in F_{A_{p_1}}} |y(x_{n_q^1})| \leq \frac{\varepsilon}{2^q} .$$

- Enfin une récurrence en tout point analogue à celle effectuée dans la première partie de la preuve permet d'obtenir une suite d'entiers $N_0 = (p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et des parties infinies de $\mathbb{N} : (N'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ($N'_i = (n_q^i)_{q \in \mathbb{N}}$) décroissantes pour l'inclusion avec :

$\forall i \quad p_i \in N'_{i-1} \setminus N'_i$ et :

$$(\alpha) \quad \forall i \quad \forall A \in [N'_i]_{d+1} \quad \sup_{y \in F_A} |y(x_{p_i})| \leq \frac{\varepsilon}{2^i} ,$$

$$(\beta) \quad \forall i \quad \forall B \in [N'_i]_d \quad \forall n_q^i \in N'_i \setminus B \quad \sup_{y \in F_{B_{p_i}}} |y(x_{n_q^i})| \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+q}} .$$

Pour terminer, soit $A \in [N_0]_{d+1}$ et $y \in F_A$.

Soit p_{k_0} le premier élément de A et $B = A \setminus \{p_{k_0}\}$:

- si $j < k_0$ $|y(x_{p_j})| \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$, puisque $A \in [N'_j]_{d+1}$,

- si $j > k_0$ et $p_j \in N_0 \setminus A$, alors $p_j \in N'_{k_0} \setminus B$ et donc : $|y(x_{p_j})| \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$,
puisque $j - k_0$ est certainement inférieur au rang de p_j dans N'_{k_0} . $\square$

On en déduit immédiatement :

Proposition 2 : Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite basique, semi-normalisée, convergeant faiblement vers 0, d'un espace de Banach E . Pour tout entier d et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite N_0 des entiers,

telle que si $A \in [N_o]_d$ et si P_A désigne l'application linéaire :

$$P_A : [(x_i)_{i \in N_o}] \longrightarrow [(x_i)_{i \in A}] ,$$

$$\sum_{i \in N_o} a_i x_i \longrightarrow \sum_{i \in A} a_i x_i ,$$

on ait :

$$\forall A \in [N_o]_d \quad \|P_A\| \leq 1 + \varepsilon .$$

Démonstration : Soit δ tel que $0 < \delta < \inf_i \|x_i\|$, et k la constante de basicité de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Donnons-nous ε tel que :

$$(1 + \varepsilon')(1 + \frac{2k\varepsilon'}{\delta}) \leq 1 + \varepsilon .$$

Il existe alors un entier D et une famille $(F_A)_{A \in [\mathbb{N}]_d}$ de parties finies de $B_{E'}$, avec :

$$\textcircled{1} \quad \forall A \in [\mathbb{N}]_d \quad \text{card } F_A \leq D .$$

$\textcircled{2}$ La partie F_A de $B_{E'}$, norme à ε' -près l'espace $[(x_i)_{i \in A}]$, ou en d'autres termes :

$$\forall x \in [(x_i)_{i \in A}] \quad \exists y \in F_A \quad \|x\| \leq (1 + \varepsilon') |y(x)| .$$

Par la proposition 1, on peut trouver $N_o \in [\mathbb{N}]$, $N_o = (p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que si $A \in [N_o]_d$ et $p_k \in N_o/A$ alors :

$$\forall y \in F_A \quad |y(x_{p_k})| \leq \frac{\varepsilon'}{2^k} .$$

On a successivement, si $(a_i) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in A} a_i x_i \right\| &\leq (1 + \varepsilon') |y(\sum_{i \in A} a_i x_i)| , \quad \text{pour un } y \in F_A , \\ &\leq (1 + \varepsilon') (\left\| \sum_{i \in N_o} a_i x_i \right\| + |y(\sum_{i \in N_o \setminus A} a_i x_i)|) , \\ &\leq (1 + \varepsilon') (\left\| \sum_{i \in N_o} a_i x_i \right\| + \sum_{i \in N_o \setminus A} \frac{|a_i| \varepsilon'}{2^i}) , \\ &\leq (1 + \varepsilon') (1 + \frac{2k\varepsilon'}{\delta}) \left\| \sum_{i \in N_o} a_i x_i \right\| , \end{aligned}$$

car la basicité de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ implique :

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 \quad |a_i| \leq \frac{2k}{\delta} \left\| \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i x_i \right\|.$$

En définitive, on a :

$$\left\| \sum_{i \in A} a_i x_i \right\| \leq (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i x_i \right\| \quad \square$$

Corollaire 1 : Soit $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Si (x_n) est une suite basique, semi-normalisée, convergeant faiblement vers 0 d'un espace de Banach E, alors la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall k, \forall n_1 \dots n_k$, si $k < n_1 < \dots < n_k$ alors l'espace $[(x'_{n_i})_{i \leq k}]$ est $1 + \varepsilon_k$ -complémenté dans $[(x'_i)_{i \in \mathbb{N}}]$ et cela par la projection naturelle.

Le programme annoncé est donc rempli, cependant on peut se demander si les résultats précédents subsistent sous d'autres hypothèses sur la suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, que la convergence faible vers 0.

Considérons par exemple l'énoncé suivant qui est sensiblement plus faible que la conclusion du corollaire précédent :

(*) $\exists M < +\infty \exists (x'_i) \subset (x_i)$ tels que : $\forall k \forall n_1 \dots n_k$, si $k < n_1 < \dots < n_k$ alors l'espace $[(x'_{n_i})_{i \leq k}]$ est M-complémenté dans $[(x'_i)_{i \in \mathbb{N}}]$ et cela par la projection naturelle.

Il est clair que si la condition (*) est vérifiée, tout modèle étalé sur $(x'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aura une suite fondamentale inconditionnelle de constante inférieure ou égale à M. On conjecture le résultat suivant :

Conjecture : Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée d'un espace de Banach admettant un modèle étalé non trivial ayant une suite fondamentale K-inconditionnelle, alors $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vérifie (*) pour $\forall M > K$.

De ce qui précède il est facile de déduire le résultat suivant qui avait été conjecturé dans [GL].

Proposition 3 : Si E est réflexif ou séparable, alors E' a ℓ_1 pour modèle étalé si et seulement si un quotient de E a c_0 pour modèle étalé.

* On renvoie à [B] ou [GL] pour la définition d'un modèle étalé.

Rappelons (cf. [B] et [GL]) sans entrer dans les détails qu'avoir c_0 (resp. ℓ_1) pour modèle étalé de E signifie qu'il existe une suite de vecteurs $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E et une constante $M > 0$ telles que pour tout entier k , tout système de k vecteurs choisis parmi les $(x_n)_{n \geq k}$ soit M -équivalent à la base canonique de ℓ_∞^k (resp. ℓ_1^k).

Démonstration de la proposition 3 : Nous nous contenterons de démontrer la partie nécessaire, et renvoyons à [GL] pour la réciproque.

Soit donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite étalant ℓ_1 dans E' . Si (y_n) possède une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ_1 , par hypothèse E est séparable, un résultat classique ([LT] p. 104) affirme alors que E a un quotient isomorphe à c_0 ...

Sinon (y_n) admet une sous-suite de Cauchy faible (y'_n) ; la suite $z_n = y'_{2n} - y'_{2n+1}$ est alors faiblement convergente vers 0 ; on peut donc en extraire une sous-suite (z'_n) vérifiant les conclusions du Corollaire 1 et qui soit également ω^* -basique (cf. [LT] p. 10), c'est-à-dire qu'il existe un quotient de E muni d'une base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad z'_n(x_m) = \delta_{mn} \quad \text{et} \quad [(x_n)]' = [(z'_n)] \quad .$$

Donc à présent, on sait qu'il existe deux constantes M_1 et M_2 telles que si $k < n_1 < \dots < n_k$ la famille $(z'_{n_i})_{i \leq k}$ est M_1 -équivalente à la base canonique de ℓ_1^k et l'espace $[(z'_{n_i})_{i \leq k}]$ est M_2 complémenté dans $[(z'_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ par la projection naturelle. Cela implique que $(x_{n_i})_{i \leq k}$ est $M_1 \cdot M_2$ -équivalente à la base canonique de ℓ_∞^k , ce qui achève la preuve[♦]. $\square$

Corollaire 2 : Un espace de Banach E a la propriété de Banach-Saks si et seulement si E est réflexif et aucun quotient de E' n'a c_0 pour modèle étalé.

Démonstration : En effet (cf. [B]) E a la propriété de Banach-Saks si et seulement s'il est réflexif et n'a pas ℓ_1 pour modèle étalé.

[♦] Une considération plus attentive des modèles étalés permettrait de remplacer M_1 et M_2 par $1 + \varepsilon_k$ où ε_k décroît vers 0 avec k .

BIBLIOGRAPHIE

- [B] B. Beauzamy : Banach-Saks property and spreading models, à paraître dans Maths. Scand.
- [GL] S. Guerre et J.T. Lapresté : Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach, preprint.
- [LT] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri : Classical Banach spaces I, Springer Verlag.
- [R] F.P. Ramsey : On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1929), 264-286.
