Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Beauzamy

Projections contractantes dans les espaces de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 16, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

PROJECTIONS CONTRACTANTES DANS LES ESPACES DE BANACH

B. BEAUZAMY

Exposé No XVI

24 Février 1978

Nous nous intéressons à la question suivante : quels sont, dans un espace de Banach donné E, les convexes C qui sont l'image d'une projection contractante, c'est-à-dire vérifiant :

$$(1)\quad \begin{cases} \|Px - Py\| \leq \|x - y\| & \forall x, y \in E \\ Px \in C\ ,\ \forall x \in E\ ,\ \text{et } P^2 = P\ . \end{cases}$$

On sait (voir [2]) que la boule unité ne peut avoir cette propriété si l'espace n'est pas un espace de Hilbert.

L'outil essentiel pour l'étude de cette question est la notion de point minimal pour un ensemble, qui a été étudiée dans [1] : un point x est minimal pour un ensemble C si les conditions $\|y - m\| \leq \|x - m\|\ \forall m \in C$ impliquent $y = x$.

Un ensemble est dit optimal s'il contient tous ses points minimaux; c'est alors un convexe fermé. Si l'espace E est réflexif et strictement convexe, on peut (voir [1],chap.1,prop 2), si C est optimal, trouver une multi-application $\mathcal{P}$, de E dans les sous-ensembles non vides de C, avec la propriété suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} \forall x \in E,\quad \forall y \in \mathcal{P}x\ ,\quad \forall m \in C\ , \\ \qquad \|y - m\| \leq \|x - m\|\ . \end{cases}$$

Si de plus E est lisse, et si C est un sous-espace vectoriel fermé, cette multi-application est une application, et c'est même une projection linéaire de norme 1 ([1],chap.II,prop.6).

Il est clair que si un convexe fermé C est l'image d'une projection du type (1), il est optimal. Nous allons, sous certaines hypothèses, démontrer la réciproque :

Théorème:

Soit E un espace de Banach réel, réflexif, lisse et strictement convexe, séparable. Soit C un convexe fermé contenant l'origine.

On suppose :
a) C est optimal
b) La jauge de C est continue sur son domaine de définition.

Alors C est l'image d'une projection contractante.

Remarque :

L'hypothèse b) signifie que, si F est le sous-espace vectoriel engendré par C, C est d'intérieur non vide dans F. Le sous-espace F est fermé dans E : si $x \in \overline{F}$, $\exists\, x_n \in F$ avec $x_n \to x$; les x_n sont de norme bornée donc appartiennent tous à un même homothétique λC, et $x \in \lambda C$.

Démonstration du théorème :

Il résulte de l'hypothèse b) que $F = \overline{\cup\, nC}$, et donc que F est un ensemble optimal ([1],chap II,prop.4 bis, corollaire 1), et donc l'image d'une projection linéaire de norme 1. Il suffit donc, pour démontrer le théorème, de construire sur F la projection sur C. Dans tout ce qui suit, nous nous restreignons donc à l'espace F.

Sur F, la jauge de C est une fonction continue convexe, partout finie. D'après Asplund, elle est Gâteaux différentiable sur un sous-ensemble dense de F : il en résulte que C est l'intersection des demi-espaces limités par des hyperplans tangents en des points de lissité de C. Soit x_0 un point de lissité de C; on vérifie facilement que le demi-espace fermé contenant C limité par l'hyperplan tangent en x_0 est un ensemble optimal : c'est l'adhérence de la réunion des homothétiques de C dans des homothéties de centre x_o et de rapport positif (voir [1], lemme 6). Il existe donc une famille de formes linéaires f_i telles que :

(3) $$C = \bigcap_i \{f_i \leq 1\} \text{ , et les ensembles } \{f_i = 1\} \text{ sont optimaux.}$$

Lemme 1 :

F étant séparable, on peut extraire de la famille f_i une famille dénombrable ayant la propriété (3).

Démonstration :

Elle est analogue à la démonstration du lemme 7 de [1]. La jauge j de C est définie par $j(x) = \sup_i f_i(x)$, au vu de (3). Soit (e_n) une suite dense dans F ; pour chaque n on choisit une suite $f_{n,m}$ dans la famille f_i, avec $j(e_n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} f_{n,m}(e_n)$, et on a

(4) $$C = \bigcap_{n,m \in \mathbb{N}} \{f_{n,m} \leq 1\} .$$

Nous rangeons en une suite f_n la famille dénombrable ainsi obtenue. Nous notons H_n l'hyperplan $\{f_n = 1\}$, et p_n la projection contractante qui existe de F sur H_n . Nous notons $\mathcal{E}_n$ le demi-espace fermé limité par H_n et contenant C. Chacune des applications p_n possède la propriété suivante :

Lemme 2 :

$\forall x \in E$, $p_n(x) \in H_n$, et, si $x \notin \mathcal{E}_n$, on a :

(5) $$\|p_n(x) - y\| \leq \|x - y\| \qquad \forall y \in \mathcal{E}_n$$

(et donc a fortiori $\forall y \in C$).

Démonstration :

On a $p_n(x) \in H_n$ par construction. Soit $x \notin \mathcal{E}_n$ et $y \in \mathcal{E}_n$. Soit x' le point de H_n appartenant au segment $]x,y]$. On a :

$$\|p_n(x) - y\| \leq \|p_n(x) - x'\| + \|x' - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\| = \|x - y\| ,$$

ce qui prouve le lemme.

Nous allons définir par récurrence une application π de F dans lui-même de la façon suivante :

Pour n = 1,2,..., notons p'_n l'application de F sur $\mathcal{E}_n$ définie par $p'_n(x) = p_n(x)$ si $x \notin \mathcal{E}_n$

$= x$ si $\in \mathcal{E}_n$.

Au vu du lemme 2, chaque application p'_n est une contraction :

6 $$\|p'_n(x) - p'_n(y)\| \leq \|x - y\| \qquad \forall x,y \in F$$

Il en résulte que si l'on pose

$$\pi_n = p'_n \circ p'_{n-1} \circ \cdots \circ p'_1 \quad ,$$

on obtient pour tout n une application contractante. Puisque chaque p'_k est l'identité sur C, on a bien entendu $\pi_n x = x$ si $x \in C$.

Soit U un ultrafiltre non trivial sur les entiers ; posons pour tout $x \in F$:

$$\pi(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ U}} \pi_n x \ , \qquad \text{au sens de } \sigma(E,E') \ .$$

Puisque la norme est s.c.i. pour $\sigma(E,E')$, on a :

$$\|\pi x - \pi y\| = \|\lim_U(\pi_n x - \pi_n y)\| \leq \lim_U \|\pi_n x - \pi_n y\| \leq \|x - y\| \ ,$$

et donc π est contractante. On a aussi évidemment $\pi(x) = x$ si $x \in C$. Nous allons voir qu'inversement π n'est pas l'identité hors de C:

<u>Lemme 3</u> (une remarque de J. Farahat) :

Si $\pi x = x$, $x \in C$.

Démonstration :

Il résulte du lemme 2 que l'on a, $\forall x \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in C$

(7) $$\|p'_n(x) - m\| \leq \|x - m\|$$

et donc

$$\|\pi_n(x) - m\| \leq \|x - m\| \; .$$

Pour chaque $m \in C$, les distances $(\|\pi_n x - m\|)_{n \in \mathbb{N}}$ forment donc une suite décroissante de nombres réels, et

$$\|\pi x - m\| \leq \|\pi_n x - m\| \quad \forall n \; .$$

Si $\pi x = x$, on a donc, $\forall m \in C, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|\pi_n x - m\| = \|x - m\| \; ,$$

et nous allons voir que ceci n'est possible que si $x \in C$.
Supposons $x \notin C$: au vu du lemme 1, l'un des hyperplans H_n sépare x et C. Soit n_o le premier indice tel que $x \notin \mathcal{E}_{n_o}$.
On a $\pi_{n_o}(x) = p'_{n_o} \circ p'_{n_o - 1} \circ \dots \circ p'_1(n) = p'_{n_o}(x)$,

et nous allons voir que pour l'un des points $m \in C$ au moins, on a

$$\|p'_{n_o}(x) - m\| < \|x - m\|.$$

Supposons au contraire que $\forall m$, $\|p'_{n_o}(x) - m\| = \|x - m\|$, et considérons le point $x_1 = \frac{1}{2}(x + p'_{n_o}\; x))$. On a $p'_{n_o}(x_1) = p'_{n_o}(x)$, et, $\forall m \in C$:

$$\|x_1 - m\|^2 = \|\tfrac{1}{2}\left([x-m] + [p'_{n_o}(x) - m]\right)\|^2$$
$$< \frac{1}{2}\left(\|x - m\|^2 + \|p'_{n_o}(x) - m\|^2\right) = \|p'_{n_o}(x_1) - m\|^2$$

ce qui contredit 7 pour le point x_1, et prouve le lemme.
Résumons les propriétés de l'application π :

Proposition :

L'application π est une contraction; on a $\pi x = x$ si et seulement si $x \in C$, et si $x \notin C$, il existe un $m \in C$ tel que $\|\pi x - m\| < \|x - m\|$. 9

Mais l'image de π n'est pas nécessairement égale à C. Nous allons utiliser l'axiome de Zorn pour fabriquer la projection cherchée.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications f de F dans F qui possèdent les propriétés suivantes :

a) f est contractante, i.e. $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x,y \in F$,

b) $f = I_d$ sur C.

Cet ensemble est évidemment non vide : l'identité en fait partie.
On le munit d'un ordre par :

$$f_2 \geq f_1 \quad \text{si } \|f_2(x) - m\| \leq \|f_1(x) - m\|, \ \forall x \in F, \ \forall m \in C .$$

Il s'agit bien d'un ordre car :

Lemme 4 (une remarque de A. Nahoum) :

Si $\|x - m\| = \|y - m\| \ \forall m \in C$, alors $x = y$.

Démonstration :

Puisque C contient une boule, on peut trouver deux points $m, m' \in C$, avec m, m', x alignés (et $m' \in]m,x[$), et m,m', y non alignés. Puisque F est strictement convexe, il n'est pas possible que l'on ait $\|x - m\| = \|y - m\|$ et $\|x - m'\| = \|y - m'\|$.

Muni de cet ordre, l'ensemble $\mathcal{P}$ est inductif : soit $(f_i)_{i\in I}$ un ensemble totalement ordonné, et U un ultrafiltre sur I plus fin que le filtre des sections de I; si l'on pose $f_o(x) = \lim\limits_{U} f_i(x)$ pour tout x, au sens de $\sigma(E,E')$, on obtient un majorant des $(f_i)_{i\in I}$: on a $\|f_o(x) - f_o(y)\| \leq \|f_i(x) - f_i(y)\| \leq \|x - y\|$ $\forall x,y \in F$, et f_o = Id sur C.

D'après Zorn, il existe donc des éléments maximaux : soit f un tel élément. On a $\pi \circ f \geq f$, donc $\pi \circ f = f$, et donc Imf = C.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Beauzamy et B. Maurey Points minimaux et ensembles optimaux dans les espaces de Banach.
A paraître au J. of Funct.Analysis.

[2] D. de Figueiredo et L. Karlovitz On the extension of contractions on normed spaces.
Proc.Sym.Pure Maths XVIII (1970)
