

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

N. VAROPOULOS

Sous-espaces de $\mathbb{C}(G)$ invariants par translation et de type $\mathcal{L}_1$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 12, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976__A9_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

S O U S - E S P A C E S D E $\mathbb{C}(G)$ I N V A R I A N T S P A R T R A N S L A T I O N

E T D E T Y P E $\mathfrak{L}_1$

par N. VAROPOULOS

Dans cette note on traite une question posée par G. Pisier.

Soit Λ un ensemble d'entiers $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et $E \subset \mathbb{T}$ un sous-ensemble fermé du tore $\mathbb{T} = \mathbb{R} \pmod{2\pi}$.

On note alors

$$\mathbf{C}_{\Lambda}(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathbf{C}(\mathbb{T}) ; f(\theta) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda} e^{i\lambda\theta} \right\}$$

l'espace des fonctions continues à spectre dans Λ . On note par $A(\mathbb{T})$ l'algèbre des séries de Fourier absolument sommables et par $A^+(\mathbb{T})$ l'algèbre des séries de Taylor absolument sommables (i. e. $f \in A^+(\mathbb{T}) \Leftrightarrow f \in A(\mathbb{T})$ $\text{Sp } f \subset \mathbb{Z}^+$). On note aussi par

$I(E) = \{ f \in A(E) ; f^{-1}(0) \supset E \}$; $I^+(E) = I(E) \cap A^+(\mathbb{T})$ les idéaux associés à E et par

$$A(E) = A(\mathbb{T})/I(E) \quad ; \quad A^+(E) = A^+(\mathbb{T})/I^+(E)$$

les algèbres restrictions. Tous ces espaces et algèbres sont munis de leurs normes naturelles.

Pour une étude approfondie de ces espaces, cf. [1]. On a alors :

THEOREME 1. Supposons que l'espace de Banach $\mathbf{C}_{\Lambda}(\mathbb{T})$ soit isomorphe (en tant qu'espace de Banach) à ℓ^1 , alors, Λ est une suite de Sidon, c'est-à-dire, il existe C une constante telle que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda| \leq C \|f\|_\infty$$

pour tout

$$f \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda e^{i\lambda \theta} \in \mathbf{C}_\Lambda(\mathbf{T}).$$

THEOREME 2. Supposons que $E \subset \mathbf{T}$ est tel que $A(E)$ (resp. $A^+(E)$), en tant qu'espace de Banach, soit isomorphe à un espace de la forme $\mathbf{C}(X)$ où X est un espace topologique compact ; alors $A(E) = \mathbf{C}(E)$ (resp. $A^+(E) = \mathbf{C}(E)$), c'est-à-dire E est un ensemble de Helson.

L'hypothèse des deux théorèmes peut s'affaiblir. Il suffit par exemple de supposer dans le théorème 2 que $A(E)$ est un espace de type $\mathcal{L}_\infty$ dans le sens de [2].

Les théorèmes 1 et 2 se généralisent dans le cadre de groupes localement compacts.

La preuve des deux théorèmes est basée sur le théorème suivant [3].

THEOREME (de représentation). Soit R une algèbre de Banach. Supposons que R , en tant qu'espace de Banach, soit isomorphe à $\mathbf{C}(X)$ où X est un espace compact. Alors, il existe un espace de Hilbert H et une sous algèbre fermée $\tilde{R}$ de $\mathcal{L}(H)$ (l'algèbre des opérateurs de H) telle que R soit isomorphe en tant qu'algèbre de Banach à $\tilde{R}$.

Preuve du théorème 1 et du théorème 2 pour $A(E)$.

Il suffit de démontrer le théorème 2 pour $A(E)$. Le théorème 1, après une dualisation évidente, se démontre de la même manière.

D'après le théorème de représentation, l'hypothèse du théorème 2 entraînent qu'on peut identifier $A(E)$ à une algèbre d'opérateurs $\mathcal{L}(H)$ sur H (un Hilbert) ;

l'identification n'est pas isométrique mais elle est topologique. Cette identification induit une représentation bornée r du groupe $\mathbf{Z}$ sur H ; c'est-à-dire

$$r : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$

où $r(n) = L_n = e^{in\theta} \in A(E)$

est la fonction $e^{in\theta}$ de $A(E)$ considérée comme opérateur. En outre $A(E)$ est engendrée par les opérateurs $\{L_n ; n \in \mathbf{Z}\}$. En utilisant un théorème bien connu sur les représentations de groupes [Toute représentation bornée d'un groupe abélien est équivalente à une représentation unitaire], on voit qu'il existe un opérateur borné T sur H avec un inverse borné T^{-1} tel que tous les opérateurs

$$T L_n T^{-1} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

soient des opérateurs unitaires.

Mais alors l'algèbre d'opérateurs

$$T A(E) = \{ T L T^{-1} \in \mathcal{L}(H) ; L \in A(E) \}$$

qui est isomorphe à l'algèbre $A(E)$, est engendrée par des opérateurs unitaires et est une C^* -algèbre. Ceci entraîne que $A(E)$ est isomorphe en tant qu'algèbre à $\mathbf{C}(E)$ et que E est un ensemble de Helson.

Preuve du théorème 2 pour $A^+(E)$.

La démonstration est basée sur le lemme suivant :

LEMME. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur à puissances

bornées, c'est-à-dire

$$\|T^n\|_{\text{op}} \leq C ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

où C est une constante indépendante de n . Soit aussi $p(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ un polynôme
d'une variable. On a alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m p(T)\|_{\text{op}} \leq C^2 \sup_{|z| \leq 1} |p(z)|.$$

Preuve du lemme.

Soient $h, k \in H$ deux éléments de l'espace de Hilbert H tels que $\|h\|, \|k\| \leq 1$.

Fixons $m \geq 1$ et considérons les deux fonctions à valeurs dans H

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \sum_{n=0}^m T^n h e^{in\theta}$$

$$f^*(\theta) = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \sum_{n=0}^m T^{*n} k e^{in\theta}$$

où T^* est l'opérateur adjoint de T ; f et f^* satisfont alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(\theta)\|_H^2 d\theta \leq C^2 ; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f^*(\theta)\|_H^2 d\theta \leq C^2$$

et la fonction

$$\varphi(\theta) = \langle f(\theta), f^*(\theta) \rangle_H,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est le produit scalaire dans H , satisfait

$$(1) \quad \begin{cases} \|\varphi(\theta)\|_{L^1(\mathbf{T})} \leq C^2 \\ \varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{2m} \frac{\gamma_n^{(m)}}{m+1} \langle T^n h, k \rangle e^{in\theta}. \end{cases}$$

Dans cette formule $\gamma_n^{(m)}$ est le nombre d'entiers ν qui vérifient les deux conditions suivantes

$$0 \leq \nu \leq m \quad \text{et} \quad 0 \leq n-\nu \leq m.$$

On a

$$(2) \quad \frac{\gamma_{m+n}^{(m)}}{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Soit maintenant $P(\theta) = \sum_{n=0}^N a_n e^{in\theta}$ un polynôme fixe ; (1) entraîne alors

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{\gamma_{n+m}^{(m)}}{m+1} a_n \langle T^{n+m} h, k \rangle \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} P(-\theta) \varphi(\theta) d\theta \right| \leq C^2 \|P\|_{\infty}.$$

D'autre part,

$$\langle T^m P(T) h, k \rangle = \sum_{n=0}^N a_n \langle T^{m+n} h, k \rangle.$$

En faisant tendre $m \rightarrow \infty$ et en tenant compte de (2), on obtient donc notre lemme.

Preuve du théorème.

Comme dans la preuve du théorème 1, on identifie $A^+(E)$ à une algèbre d'opérateurs sur un Hilbert. Cette identification associe à $e^{i\theta} \Big|_E \in A^+(E)$ un opérateur T qui satisfait l'hypothèse du lemme.

Fixons un polynôme trigonométrique

$$p(\theta) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta};$$

notre lemme entraîne alors que

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=-N}^N a_n T^{m+n} \right\|_{op} \leq C \|p\|_{\infty}$$

où C est une constante indépendante du polynôme. Mais ceci entraîne que

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=-N}^N a_n e^{i(m+n)\theta} \Big|_E \right\|_{A^+(E)} \leq C' \|p\|_{\infty}$$

pour une autre constante C' indépendante de p . Et ceci à son tour entraîne que

$$\left\| \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta} \Big|_E \right\|_{A(E)} \leq C' \|p\|_{\infty}.$$

C'est-à-dire que $A(E) = \mathbb{C}(E)$ et que E est un ensemble de Helson. Le théorème de

W. R. [1] (IV, 7) entraîne alors notre théorème.

REMARQUE. Une reformulation du Théorème 1 consiste à dire qu'il caractérise les sous-espaces fermés Σ de $\mathbb{C}(T)$ qui sont invariants par translation (i. e. $f \in \Sigma \Rightarrow f_t(x) = f(t+x) \in \Sigma$) et qui sont, en tant qu'espaces de Banach, de type $\mathcal{L}_1$ (dans le sens de [2]).

Dans le même esprit, on peut démontrer le théorème suivant :

THEOREME 3. Soit Γ un groupe abélien localement compact et soit $\Sigma \subset L^\infty(\Gamma)$ un sous-espace qui est faiblement fermé (pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$) et invariant par translation et qui est, en tant qu'espace de Banach, de type $\mathcal{L}_1$.
Alors il existe $E \subset \hat{\Gamma}$ un sous-ensemble fermé tel que

$$\Sigma = \left\{ \hat{\mu} ; \mu \in M(\hat{\Gamma}) \quad \text{supp } \mu \subset E \right\}.$$

- [1] KAHANE, J.-P. Séries de Fourier absolument convergentes. Springer-Verlag (Ergebnisse) 1970.
- [2] LINDENSTRAUSS, J. and PELZYNSKI, A. Absolutely summing operators in $\mathcal{L}^p$ -spaces and their applications. Studia Math. 29 (1968), 275-326.
- [3] VAROPOULOS, N. A theorem on operator algebras. Math. Scand. 37 (1975), 173-182.
