

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Quelques résultats concernant l'inconditionnalité

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 16, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976___A12_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

QUELQUES RESULTATS CONCERNANT L'INCONDITIONNALITE

par B. MAUREY

Cet exposé est dans une certaine mesure la suite de l'exposé IX. Nous y verrons quelques résultats positifs concernant l'extraction de sous-suites inconditionnelles, résultats dus à H.P. Rosenthal. Le premier résultat s'énonce ainsi (en notant 1_A la fonction indicatrice d'un ensemble A).

Théorème 1 : Soient S un ensemble, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de S . Si la suite (1_{A_n}) tend faiblement vers zéro dans $\ell^\infty(S)$, on peut extraire une sous-suite $(1_{A_{n_k}})_k$ 1-inconditionnelle dans $\ell^\infty(S)$.

(On se reportera à l'exposé IX pour la définition d'une suite C-inconditionnelle.)

En considérant $\ell^\infty(S)$ comme un espace $C(K)$, on voit que le théorème 1 résulte de l'énoncé suivant :

Théorème 1 bis : Soient K un espace topologique compact, et (A_n) une suite d'ensembles ouverts et fermés de K . Si la suite de fonctions (continues sur K !) (1_{A_n}) converge simplement vers zéro sur K , il existe une sous-suite $(1_{A_{n_k}})_k$ 1-inconditionnelle dans $C(K)$.

On voit en fait que les deux énoncés sont équivalents, en considérant $C(K)$ comme un sous-espace de $\ell^\infty(K)$. Avant de commencer la démonstration, il est intéressant de savoir caractériser le fait que (1_{A_n}) converge faiblement vers zéro dans $\ell^\infty(S)$. A cet effet nous dirons qu'une suite (A_n) de parties d'un ensemble S converge fortement vers $\emptyset$ si la condition suivante est réalisée : pour toute suite croissante d'entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, il existe un entier k_0 tel que :

$$\bigcap_{j=1}^{k_0} A_{n_j} = \emptyset .$$

Lemme 1 : Soit (A_n) une suite de parties de S . La suite (1_{A_n}) converge faiblement vers zéro dans $\ell^\infty(S)$ si et seulement si la suite (A_n) converge fortement vers $\emptyset$.

Nous ne nous attarderons pas sur la démonstration du lemme : il faut seulement remarquer que les points extrémaux de la boule unité du dual

de $\ell^\infty(S)$ correspondent aux ultrafiltres sur S , et que la convergence forte vers $\emptyset$ de la suite (A_n) signifie qu'il n'existe pas d'ultrafiltre $\mathcal{U}$ qui contienne une infinité d'ensembles A_n .

Dans la deuxième partie de l'exposé nous nous intéresserons aux espaces $C(H)$, lorsque H est un compact dénombrable "pas trop gros", en ce sens que $H^{(\omega^2)} = \emptyset$ (rappelons que $H^{(\alpha)}$ désigne le dérivé d'ordre α du compact H).

Théorème 2 : Soit k un entier ≥ 1 et soit H un compact dénombrable tel que $H^{(\omega \cdot k)} = \emptyset$. Toute suite (f_n) de $C(H)$ qui tend simplement vers zéro sur H possède, pour tout $\varepsilon > 0$, des sous-suites (f_{n_k}) $(k+\varepsilon)$ -inconditionnelles.

Ce résultat, rapproché des contre-exemples de l'exposé IX, montre que les constantes trouvées sont (à ε près) les meilleures possibles. Si l'on préfère parler en termes de $C(\alpha+1)$, α étant un ordinal, le théorème 2 s'énonce ainsi : si $\alpha < \omega^{k \cdot \omega}$, toute suite qui tend faiblement vers zéro dans $C(\alpha+1)$ possède des sous-suites $(k+\varepsilon)$ -inconditionnelles. Dans [1], le théorème 2 est énoncé seulement pour $k=1$ et $k=2$. La généralisation présentée ici est assez longue à rédiger, mais pas plus difficile.

Commençons la démonstration des théorèmes 1 et 1 bis. Nous nous placerons dans le cadre du théorème 1 bis. Nous supposons donnés un espace compact K , une suite (f_n) de fonctions continues sur K , ne prenant que les valeurs 0 ou 1, et convergeant simplement vers zéro sur K . Commençons par expliquer le principe de la démonstration : il s'agira de trouver une sous-suite possédant certaines propriétés d'"indépendance". Si la suite (f_n) est **booléennement** indépendante (cf. [2]), il est clair qu'elle est 1-inconditionnelle, car alors :

$$\|\sum \alpha_n f_n\|_{C(K)} = \sup_{F \subset \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in F} \alpha_n \right| = \max \left\{ \sum_n \alpha_n^+, \sum_n \alpha_n^- \right\}.$$

Nous utiliserons ici une notion d'indépendance plus faible :

Définition : Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble S et ne prenant que les valeurs 0 et 1. On dira que la suite (f_n) est faiblement indépendante si la condition suivante est réalisée : pour tous sous-ensembles finis F et G disjoints dans $\mathbb{N}$, on a :

s'il existe $x \in F$ tel que $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in F$, il existe $y \in G$ tel

que $f_n(y) = 1$ pour tout $n \in F$, et $f_n(y) = 0$ pour tout $m \in G$.

Si les (f_n) sont des fonctions continues non nulles sur un espace compact K , on peut interpréter la définition de la façon suivante. Posons pour chaque $x \in E$:

$$U(x) = \{n \in \mathbf{N} ; f_n(x) = 1\} ,$$

puis :

$$\mathfrak{F} = \{U(x) ; x \in K\} .$$

Alors, dire que la suite (f_n) est faiblement indépendante équivaut à dire que la famille d'ensembles $\mathfrak{F}$ est héréditaire (c'est-à-dire que $U \in \mathfrak{F}$, $V \subset U \Rightarrow V \in \mathfrak{F}$). En effet, supposons $U \in \mathfrak{F}$, $V \subset U$ avec V non vide. Posons pour chaque entier $k \geq \inf V$:

$$F_k = V \cap \{1, \dots, k\} ; G_k = \{1, \dots, k\} \setminus V .$$

D'après la propriété d'indépendance faible, il existe $y_k \in K$ tel que $f_n(y_k) = 1$ pour $n \in F_k$ et $f_n(y_k) = 0$ pour $n \in G_k$. Si y est un point adhérent à la suite (y_k) , on aura $U(y) = V$.

Si $V = \emptyset$, il faut raisonner un peu différemment. Pour chaque entier k , il existe y_k tel que $f_k(y_k) = 1$, et $f_n(y_k) = 0$ si $n < k$. Si y est un point adhérent à la suite (y_k) , on aura $U(y) = \emptyset$.

L'intérêt de la notion d'indépendance faible réside dans le lemme suivant :

Lemme 2 : Soient K un espace compact, et (f_n) une suite de fonctions continues sur K ne prenant que les valeurs 0 et 1. Si la suite (f_n) est faiblement indépendante, elle est 1-inconditionnelle dans $C(K)$.

Démonstration : Soient (α_n) une suite de scalaires dont un nombre fini seulement est non nul, et F un sous-ensemble de $\mathbf{N}$. Nous devons montrer que :

$$\left\| \sum_{n \in F} \alpha_n f_n \right\| \leq \left\| \sum_n \alpha_n f_n \right\| .$$

Soit $y \in K$ tel que $\left\| \sum_{n \in F} \alpha_n f_n \right\| = \left| \sum_{n \in F} \alpha_n f_n(y) \right|$.

Puisque $\mathfrak{F}$ est héréditaire, il existe $z \in K$ tel que $U(z) = F \cap U(y)$. Alors :

$$\left| \sum_{n \in F} \alpha_n f_n(y) \right| = \left| \sum_n \alpha_n f_n(z) \right| \leq \left\| \sum_n \alpha_n f_n \right\| ,$$

ce qui démontre le lemme.

Le théorème 1 bis apparaîtra alors comme une conséquence de l'énoncé plus précis suivant :

Théorème 1 ter : Soient K un espace compact, et (f_n) une suite de fonctions continues non nulles sur K , ne prenant que les valeurs 0 et 1. Si la suite (f_n) tend simplement vers zéro sur K , elle possède des sous-suites (f_{n_k}) faiblement indépendantes.

Dans une première étape de la démonstration, nous chercherons une sous-suite vérifiant l'indépendance lorsque les sous-ensembles F et G de la définition sont tels que $G < F$. L'outil sera le théorème de Galvin-Prikry, que nous rappelons maintenant. On considérera l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$, noté $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, comme un sous-ensemble de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et on le munira de la topologie induite par la topologie produit. Si $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}_\infty(M)$ désignera l'ensemble des parties infinies de M . Le théorème de Galvin-Prikry s'énonce ainsi : si $\mathcal{X}$ est une partie ouverte (ou fermée) de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, il existe une partie $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ telle que :

$$\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{X} \text{ ou } \mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{X}^c \text{ (complémentaire de } \mathcal{X} \text{)} .$$

Ce théorème est une sorte de "Ramsey infini". Il a été ensuite généralisé à $\mathcal{X}$ borélien, puis analytique.

Si F est un ensemble fini d'entiers, m un entier et A une partie de K , nous dirons que m est indépendant de $F \pmod{A}$ si la condition suivante est réalisée : s'il existe $x \in A$ tel que $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in F$, il existe $y \in A$ tel que $f_n(y) = 1$ pour tout $n \in F$, et $f_m(y) = 0$.

Lemme 3 : Soit A une partie fermée de K . Si la suite (f_n) tend simplement vers zéro sur A , il existe une partie infinie M de $\mathbb{N}$ telle que $M = \{m_1, m_2, \dots\}$ et que : $\forall F \subset M$, F fini et $F > m_1$, m_1 est indépendant de $F \pmod{A}$.

Démonstration : Définissons $\mathfrak{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ par : $\mathfrak{X} = \{M = \{m_1, m_2, \dots\} : \text{il existe } k > 2 \text{ tel que } m_1 \text{ ne soit pas indépendant de } \{m_2, \dots, m_k\} \pmod{A}\}$.

Il est clair que $\mathfrak{X}$ est ouvert. On peut donc trouver $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tel que $\mathcal{P}_\infty(M) \subseteq \mathfrak{X}$ ou $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathfrak{X}^c$. Notons que si $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathfrak{X}^c$, l'ensemble M vérifie l'énoncé du lemme 3 (on considère $M' \in \mathcal{P}_\infty(M)$, $M' = \{m'_1, m'_2, \dots\}$, avec $m'_1 = m_1$ et $F = \{m'_2, \dots, m'_k\}$ pour un certain k). Il suffit donc de montrer que l'éventualité $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathfrak{X}$ est impossible. En posant $M = \{m_1, m_2, \dots\}$, on pourra déterminer dans le cas $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathfrak{X}$ une suite d'entiers (k_n) telle que $k_n \geq n+1$ et que m_n n'est pas indépendant de $\{m_{n+1}, \dots, m_{k_n}\} \pmod{A}$. Puisque la suite (f_n) tend vers zéro sur A , il existe un entier N tel que la relation :

$$f_{m_1}(x) = f_{m_2}(x) = \dots = f_{m_N}(x) = 1$$

soit impossible pour $x \in A$.

Soit n le premier entier tel que $k_n \geq N$. D'après la propriété de k_n , il existe un point $x \in A$ tel que :

$$f_{m_{n+1}}(x) = \dots = f_{k_n}(x) = 1$$

et de plus, pour tout $y \in A$ tel que :

$$f_{m_{n+1}}(y) = \dots = f_{k_n}(y) = 1 \quad ,$$

on a aussi $f_{m_n}(y) = 1$.

Puisque $k_{n-1} < k_n$, on aura donc :

$$f_{m_n}(x) = \dots = f_{m_{k_{n-1}}}(x) = 1 \quad ,$$

ce qui implique d'après la propriété de k_{n-1} que $f_{m_{n-1}}(x) = 1$, et de proche en proche, on déduit que :

$$f_{m_1}(x) = \dots = f_{m_n}(x) = 1 \quad ,$$

d'où une contradiction qui achève la démonstration du lemme 3.

Lemme 4 : Si (f_n) tend vers zéro sur K , on peut trouver une partie infinie $M = \{m_1, m_2, \dots\}$ telle que : pour tout entier $j \geq 1$, et pour tout ensemble fini $F \subset M$, $F > m_j$, s'il existe x tel que :

$$f_n(x) = 1 \text{ pour tout } n \in F,$$

il existe $y \in K$ tel que :

$$f_n(y) = 1 \text{ pour tout } n \in F \text{ et } f_{m_1}(y) = \dots = f_{m_j}(y) = 0.$$

Démonstration : On applique d'abord le lemme 3 avec $A = K$, pour trouver $M_1 \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ satisfaisant la propriété du lemme 3, $M_1 = \{m_1, \dots\}$. On pose ensuite :

$$K_2 = \{f_{m_1} = 0\},$$

et on applique à nouveau le lemme 3 avec $A = K_2$, trouvant ainsi $M_2 \in \mathcal{P}_\infty(M_1)$. On procède ainsi par récurrence : si M_n a été déterminé, avec $m_n = \inf M_n$, on pose $K_{n+1} = \{f_{m_1} = f_{m_2} = \dots = f_{m_n} = 0\}$ et on applique le lemme 3 avec $A = K_{n+1}$ pour trouver $M_{n+1} \in \mathcal{P}_\infty(M_n)$.

(Remarquons qu'à chaque étape $\{f_{m_1} = f_{m_2} = \dots = f_{m_n} = 0\}$ est non vide. Cela résulte de proche en proche de ce que m_n est indépendant de $\{m_{n+1}\} \pmod{K_n}$.)

On construit pour finir l'ensemble "diagonal" $M = \{m_1, m_2, \dots\}$. Soit alors $j \geq 1$ et $F \subset M$, F fini $> m_j$. Soit x tel que $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in F$. Puisque m_1 est indépendant de $F \pmod{K}$, il existe x_1 tel que : $f_n(x_1) = 1$ pour tout $n \in F$, et $f_{m_1}(x_1) = 0$, c'est-à-dire $x_1 \in K_2$. A nouveau puisque m_2 est indépendant de $F \pmod{K_2}$, il existe $x_2 \in K_2$ tel que : $f_n(x_2) = 1$ pour tout $n \in F$, et $f_{m_2}(x_2) = 0$, donc $x_2 \in K_3$. On continue ainsi de proche en proche jusqu'à K_j , et le lemme 4 se trouve démontré.

Avant de poursuivre, nous allons remarquer qu'il est possible de se ramener au cas où le compact K est dénombrable. A cet effet considérons l'application continue φ de K dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\varphi(x) = (f_n(x))_n .$$

Pour chaque x , la suite $\varphi(x)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, $\text{car } f_n(x) \xrightarrow{n} 0$. Le compact image $H = \varphi(K)$ est donc contenu dans l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$, donc H est dénombrable. Par ailleurs, les fonctions coordonnées $\tilde{f}_n$ (définies sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ par $\tilde{f}_n((\alpha_m)_m) = \alpha_n$) définissent sur H une suite de fonctions continues qui tend vers zéro. On a en fait :

$$f_n = \tilde{f}_n \circ \varphi ,$$

ce qui implique pour toute suite (α_n) :

$$\|\sum \alpha_n f_n\|_{C(K)} = \|\sum \alpha_n \tilde{f}_n\|_{C(H)} .$$

On voit aussi immédiatement que l'ensemble $\mathfrak{K} = \{U(x) ; x \in K\}$ coïncide avec $\tilde{\mathfrak{K}}$, défini pour les $(\tilde{f}_n)$ sur H . (En fait, $\mathfrak{K} = \tilde{\mathfrak{K}} = H$ si on considère les éléments de H comme des parties de $\mathbf{N}$.) On peut donc ramener le problème de l'extraction d'une sous-suite faiblement indépendante des (f_n) au même problème pour les $(\tilde{f}_n)$ sur H .

A partir de maintenant, nous pourrions supposer le compact K dénombrable, et nous achèverons la démonstration par une récurrence ordinale sur le premier ordinal α tel que le dérivé $K^{(\alpha)}$ soit un ensemble fini.

Si $\alpha = 1$, le dérivé K' est un ensemble fini. Puisque $f_n \rightarrow 0$, on peut supposer, quitte à supprimer un nombre fini des (f_n) , que l'on a $\{f_n = 1\} \cap K' = \emptyset$ pour tout entier n . Mais cela signifie que pour tout n , $\{f_n = 1\}$ est un ensemble fini. Il est alors clair que l'on peut construire de proche en proche une sous-suite (f_{n_k}) telle que les ensembles $\{f_{n_k} = 1\}$ soient deux à deux disjoints. Il est également clair que la sous-suite (f_{n_k}) est faiblement indépendante. (L'ensemble $\mathfrak{K} = \{U(x) ; x \in K\}$ correspondant à la sous-suite est simplement formé de $\emptyset$ et des singletons $\{k\}$. Par ailleurs on a simplement :

$$\|\sum_k \alpha_k f_{n_k}\|_{C(K)} = \sup |\alpha_k| .)$$

Supposons donc le théorème démontré pour les ordinaux $< \alpha$, c'est-à-dire lorsque la suite (f_n) est définie sur un compact dénombrable K tel

que $K^{(\alpha)} = \emptyset$.

Supposons maintenant donnés un compact dénombrable K tel que $K^{(\alpha)}$ soit un ensemble fini non vide, et une suite (f_n) de fonctions continues sur K , à valeurs 0 ou 1, tendant simplement vers zéro sur K . Comme précédemment on peut supposer que $K^{(\alpha)} \cap \{f_n = 1\}$ est vide pour tout entier n . Cela implique que pour tout n , $\{f_n = 1\}$ est un compact tel que $\{f_n = 1\}^{(\alpha)} = \emptyset$.

Commençons par sélectionner un $M_1 \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ possédant la propriété du lemme 4. Posons $m_1 = \inf M_1$. Puisque $\{f_{m_1} = 1\}^{(\alpha)} = \emptyset$, on peut trouver d'après l'hypothèse de récurrence une partie infinie $M_2 \subset M_1$, $M_2 > m_1$, telle que les restrictions à $K_1 = \{f_{m_1} = 1\}$ des fonctions $(f_m)_{m \in M_2}$ forment une suite faiblement indépendante. En supposant $M_1, M_2, \dots, M_n$ définis avec $m_j = \inf M_j$, nous poserons :

$$K_n = \{f_{m_1} = f_{m_2} = \dots = f_{m_{n-1}} = 0 ; f_{m_n} = 1\}.$$

Puisque $K_n^{(\alpha)} = \emptyset$, on peut trouver un sous-ensemble infini $M_{n+1} \subset M_n$, $M_{n+1} > m_n$, tel que les restrictions à K_n des fonctions $(f_m)_{m \in M_{n+1}}$ forment une suite faiblement indépendante.

Nous formons à nouveau l'ensemble "diagonal" $M = \{m_1, m_2, \dots\}$, et nous allons vérifier que la suite $(f_m)_{m \in M}$ est faiblement indépendante sur K . Notons d'abord que M satisfait la propriété du lemme 4 (simplement parce que $M \subset M_1$).

Pour montrer que l'ensemble des $U(x)$ est héréditaire, considérons un ensemble $F \subset M$ et un $x \in K$ tel que $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in F$. Nous devons trouver un $y \in K$ tel que :

$$F = \{n \in M ; f_n(y) = 1\}.$$

Tout d'abord, d'après la propriété du lemme 4, on a en posant $\inf F = m_k \in M$:

$$\exists z \in K \text{ tel que } f_n(z) = 1 \text{ pour tout } n \in F,$$

$$\text{et : } f_{m_1}(z) = f_{m_2}(z) = \dots = f_{m_{k-1}}(z) = 0,$$

* Si $F = \emptyset$, on choisit $y_n \in K_n$ et on prend y adhérent à la suite (y_n) .

c'est-à-dire que $z \in K_k$. D'après l'indépendance faible des $(f_n)_{n \in M_{k+1}}$ sur K_k , il existe $y \in K_k$ tel qu'en posant $F' = F \setminus \{m_k\}$, on ait :

$$F' = \{m \in M_{k+1} ; f_m(y) = 1\} = \{m \in M ; m > m_k, f_m(y) = 1\} .$$

Mais puisque $y \in K_k$, on a finalement :

$$\{m \in M ; f_m(y) = 1\} = F ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1 ter.

Nous allons maintenant passer à la démonstration du théorème 2. La situation sera la suivante : H désignera un compact dénombrable, (tel que $H^{(\omega^2)} = \emptyset$), et (f_n) une suite de fonctions continues sur H , telle que $\|f_n\| = 1$ pour tout n , et telle que f_n tende simplement vers zéro sur H . Nous commencerons par une première réduction du problème :

Lemme 5 : On peut supposer que la suite $\{|f_n| > 0\}$ est une suite d'ensembles ouverts et fermés, tendant fortement vers $\emptyset$.

Démonstration : L'ensemble des $(f_n(x))_n$, pour x variant dans H , constitue une famille dénombrable de suites numériques qui tendent vers zéro. D'après un lemme classique, on peut trouver une suite strictement croissante λ_n , telle que $\lim_n \lambda_n = +\infty$, et telle que :

$$\forall x \in H , \quad \lim_n \lambda_n f_n(x) = 0 .$$

En extrayant une sous-suite convenable, on peut supposer que $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\lambda_n \leq \varepsilon < 1$. Le compact H étant totalement discontinu, on peut trouver pour tout n un ensemble ouvert et fermé E_n tel que :

$$\{|f_n| \geq 1/\lambda_{n-1}\} \subset E_n \subset \{|f_n| > 1/\lambda_n\} .$$

En posant $\tilde{f}_n = 1_{E_n} \cdot f_n$, on aura $\|\tilde{f}_n - f_n\| \leq 1/\lambda_{n-1}$, donc

$\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{f}_n - f_n\| \leq \varepsilon$. On en déduit facilement que l'extraction d'une sous-suite

C-inconditionnelle des $(\tilde{f}_n)$ fournit une sous-suite $\left(C + \varepsilon \cdot \frac{C(1+C)}{1-\varepsilon C}\right)$ -inconditionnelle des (f_n) . Par ailleurs, $1_{E_n} \leq \lambda_n |f_n|$, donc la suite (1_{E_n}) tend simplement vers zéro (c'est-à-dire, si on préfère, que la suite (E_n) tend fortement vers $\emptyset$) et $\{|\tilde{f}_n| > 0\} \subset E_n$. Le lemme 5 est démontré.

Nous supposons dorénavant que la réduction du lemme 5 a été faite, et nous posons $E_n = \{|f_n| > 0\}$.

Nous commencerons par détailler la démonstration du cas le plus simple, c'est-à-dire du cas où $H^{(\omega)} = \emptyset$. Dans ce cas, nous devons extraire des sous-suites $(1+\varepsilon)$ -inconditionnelles de la suite (f_n) .

Lemme 6 : Soient H un compact dénombrable et (F_n) une suite d'ensembles ouverts et fermés de H telle que (1_{F_n}) tend vers zéro sur H . S'il existe un entier k tel que $\forall j_1 < j_2 < \dots < j_k$, $F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap \dots \cap F_{j_k}$ soit non vide, le dérivé $K^{(k)}$ est non vide.

Démonstration : Raisonnons par récurrence : si $k=1$, on a une suite (F_n) d'ouverts et fermés non vides telle que $1_{F_n} \rightarrow 0$: cela implique que l'ensemble H est infini, soit H' non vide.

Supposons le résultat démontré pour $k-1$, et soit (F_n) une suite possédant la propriété de l'énoncé du lemme 6. Sur le compact F_1 , la famille des $(F_1 \cap F_n)_{n>1}$ vérifie la propriété de l'énoncé pour $k-1$. On en déduit que $F_1^{(k-1)}$ est non vide, c'est-à-dire que $F_1 \cap H^{(k-1)}$ est non vide. Bien entendu le même raisonnement montre que $F_n \cap H^{(k-1)}$ est non vide pour tout n , et cette suite d'ensembles tend fortement vers $\emptyset$ sur $H^{(k-1)}$. On en déduit que $H^{(k-1)}$ est infini, donc $H^{(k)}$ est non vide.

Lemme 7 : Soient H un compact dénombrable tel que $H^{(\omega)} = \emptyset$, et (F_n) une suite d'ensembles ouverts et fermés de H tendant fortement vers $\emptyset$. Il existe un entier k et une sous-suite (F'_n) de F_n telle que :

$$\forall j_1 < j_2 < \dots < j_k, \quad F'_{j_1} \cap F'_{j_2} \cap \dots \cap F'_{j_k} = \emptyset.$$

Démonstration : Puisque $H^{(\omega)} = \emptyset$, il existe un entier k tel que $H^{(k)} = \emptyset$. Réalisons une partition de l'ensemble des k -uples d'entiers $j_1 < j_2 < \dots < j_k$

en posant :

$$A = \{j_1 < j_2 < \dots < j_k ; F_{j_1} \cap F_{j_2} \cap \dots \cap F_{j_k} = \emptyset\} ,$$

et en prenant pour B le complémentaire de A.

D'après le théorème combinatoire de Ramsey, il existe une partie infinie M de $\mathbb{N}$ telle que :

- ou bien tous les k-uples d'éléments de M sont dans A
- ou bien tous les k-uples d'éléments de M sont dans B.

Mais la deuxième éventualité impliquerait d'après le lemme 6 que $K^{(k)} \neq \emptyset$. On est donc dans le premier cas, et l'ensemble M fournit la sous-suite (F'_n) voulue.

Supposons donc donnés maintenant H, avec $H^{(w)} = \emptyset$, et (f_n) une suite tendant simplement vers zéro telle que $E_n = \{|f_n| > 0\}$ tende fortement vers $\emptyset$.

D'après le lemme 7, on peut aussi supposer, quitte à passer à une nouvelle sous-suite, qu'il existe un entier $(k+1)$ tel que :

$$\forall j_1 < j_2 < \dots < j_{k+1} , \quad E_{j_1} \cap E_{j_2} \cap \dots \cap E_{j_{k+1}} = \emptyset .$$

L'intérêt de cette réduction est de limiter (à k) le nombre des valeurs non nulles des $f_n(x)$, pour un x fixé dans H. Cela va permettre une nouvelle réduction du problème :

Lemme 8 : Dans le cas $H^{(w)} = \emptyset$, on peut supposer que les (f_n) prennent leurs valeurs dans un ensemble fini $F \subset [-1, +1]$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ donné. Découpons $[-1, +1]$ en intervalles disjoints de longueur $\leq \varepsilon/k$, soient $I_1, \dots, I_m$, tels que les $f_n^{-1}(I_j)$ soient ouverts et fermés. (Il suffit pour cela que les extrémités de I_j n'appartiennent pas à l'ensemble dénombrable $\bigcup_n f_n(H)$.) Choisissons une valeur $y_j \in I_j$ (pour l'intervalle I_j qui contient 0, on choisira $y_j = 0$) et posons :

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_j y_j \cdot 1_{I_j}(f_n(x)) .$$

On aura alors, pour tous scalaires (c_n) :

$$\left| \left\| \sum c_n f_n \right\| - \left\| \sum c_n \tilde{f}_n \right\| \right| \leq \varepsilon \sup |c_j| .$$

En effet, pour chaque $x \in H$, il y a au plus k indices n tels que $f_n(x) \neq 0$. Pour ces indices :

$$|f_n(x) - \tilde{f}_n(x)| \leq \varepsilon/k .$$

Pour les indices n tels que $f_n(x) = 0$, on a aussi $\tilde{f}_n(x) = 0$, donc finalement :

$$\left| \sum c_n (f_n(x) - \tilde{f}_n(x)) \right| \leq \varepsilon \cdot \sup |c_n| .$$

Comme précédemment, il en résulte que l'extraction d'une sous-suite C -inconditionnelle des $(\tilde{f}_n)$ fournit une sous-suite $\left(C + \varepsilon \frac{C(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon C} \right)$ -inconditionnelle des (f_n) et le lemme 8 est démontré.

Supposons donc que les (f_n) sont à valeurs dans un ensemble fini F , et posons pour tout k -uplet $j_1 < j_2 < \dots < j_k$,

$$A(j_1, \dots, j_k) = \{ (f_{j_1}(x), \dots, f_{j_k}(x)) ; x \in H \} \in \mathcal{P}(F^k) .$$

La prochaine réduction consistera à se ramener à une sous-suite $(f_n)_{n \in M}$ "homogène" en ce sens que l'ensemble $A(j_1, \dots, j_k)$ sera indépendant du k -uplet $(j_1, \dots, j_k)$ choisi dans M . La possibilité de cette réduction résulte immédiatement du théorème de Ramsey : en effet, on associe à chaque k -uplet $j_1 < \dots < j_k$ l'élément $A(j_1, \dots, j_k)$ de l'ensemble fini $\mathcal{P}(F^k)$. On réalise donc une partition finie de l'ensemble des k -uplets, et d'après le théorème de Ramsey on peut trouver une partie infinie $M \subset \mathbb{N}$ telle que $A(j_1, \dots, j_k)$ soit constant pour tous les k -uplets dans M .

Une suite "homogène" n'est pas directement 1-inconditionnelle, mais il est très facile de trouver une sous-suite 1-inconditionnelle, comme nous allons voir.

Lemme 9 : Supposons que la suite (f_n) soit telle que l'ensemble $A(j_1, \dots, j_k)$ soit indépendant du k -uplet d'entiers $j_1 < j_2 < \dots < j_k$. Désignons par M l'en-

semble des multiples de k . Pour tout $x \in H$, et pour tout sous-ensemble fini G de M , il existe un point $y \in H$ tel que :

$$f_m(y) = f_m(x) \quad \text{pour tout } m \in G,$$

$$f_m(y) = 0 \quad \text{pour tout } m \in M \setminus G.$$

Démonstration : Soit G fini $\subset M$ et $x \in H$. Posons :

$$L = \{m \in G ; f_m(x) \neq 0\}.$$

On a $|L| \leq k$. D'après l'invariance de $A(j_1, \dots, j_k)$ on peut trouver des points $z \in H$ tels que :

$$\forall m \in L, \quad f_m(z) = f_m(x).$$

Nous choisirons un z_0 possédant la propriété ci-dessus tel que $\text{Card}\{n \in \mathbb{N}; f_n(z) \neq 0\}$ soit maximal. Désignons par $j_1 < j_2 < \dots < j_\ell$ les entiers j tels que $f_j(z_0) \neq 0$. On a $\ell \leq k$, et un (plus ou moins long) moment de réflexion convaincra le lecteur que l'on peut trouver $j'_1 < j'_2 < \dots < j'_\ell$ tels que :

$$a) \quad j_i \in L \implies j'_i = j_i$$

$$b) \quad j_i \notin L \implies j'_i \notin M.$$

(Il s'agit simplement de déplacer en dehors de M les j_i qui sont dans $M \setminus L$. La possibilité de cette opération résulte du fait que l'on a laissé suffisamment de place en dehors de M .)

Par l'invariance de $A(j_1, \dots, j_k)$, on peut trouver un point $y \in H$ tel que :

$$f_{j'_i}(y) = f_{j_i}(z_0), \quad i = 1, \dots, \ell.$$

D'après a), on a aussi :

$$f_m(y) = f_m(x) \quad \text{pour tout } m \in L.$$

D'après le caractère maximal de l'entier ℓ , on a :

$$\{j'_1, \dots, j'_\ell\} = \{n \in \mathbb{N} ; f_n(y) \neq 0\} .$$

D'après la propriété b), cela implique :

$$f_m(y) = 0 \quad \text{pour tout } m \in M \setminus L ,$$

ce qui démontre le lemme 9.

Bien entendu le lemme 9 implique que la sous-suite $(f_m)_{m \in M}$ est 1-inconditionnelle, par un raisonnement identique à celui du lemme 2.

Nous avons donc démontré le théorème 2 pour les compacts H tels que $H^{(\omega)} = \emptyset$. Si on tient compte des réductions successives, on peut dégager l'énoncé plus précis suivant, qui nous servira dans la suite de la démonstration :

Proposition 1 : Soient H un compact tel que $H^{(\omega)} = \emptyset$, et (f_n) une suite de fonctions continues sur H , tendant simplement vers zéro sur H , et telle que $\|f_n\| \leq 1$ pour tout n . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble infini $M \subset \mathbb{N}$ possédant la propriété suivante :

pour tout sous-ensemble infini $M_0 \subset M$, pour tout $x \in H$ et tout ensemble fini $F \subset M_0$, il existe un point $y \in H$ tel que :

$$\forall (c_m) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad \left| \sum_{m \in M_0} c_m f_m(y) - \sum_{m \in F} c_m f_m(x) \right| \leq \varepsilon \sup_m |c_m| .$$

(L'intérêt de considérer $M_0 \subset M$ apparaîtra dans la récurrence qui va suivre. Il est clair que dans le lemme 9, tout sous-ensemble infini M_0 de M convient encore, ce qui permet d'énoncer la proposition 1 comme nous l'avons fait.)

Le théorème 2 sera démontré comme une conséquence de l'énoncé suivant :

Proposition 2 : Soient k un entier ≥ 1 , H un compact tel que $H^{(\omega, k)} = \emptyset$ et (f_n) une suite de fonctions continues sur H , tendant simplement vers zéro sur H , et telle que $\|f_n\| \leq 1$ pour tout n . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble infini $M \subset \mathbb{N}$ possédant la propriété suivante : pour tout sous-ensem-

ble infini M_0 de M , pour tout $x \in H$ et pour tout ensemble fini $F \subseteq M_0$, il existe des points $y_1, y_2, \dots, y_k \in H$, tels qu'en posant $g(y) = \sum_{m \in M_0} c_m f_m(y)$ pour $(c_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, on ait :

$$\left| \sum_{m \in F} c_m f_m(x) - g(y_1) + g(y_2) - g(y_3) + \dots + (-1)^k g(y_k) \right| \leq \varepsilon \cdot \sup |c_n| .$$

(Il est clair que la proposition 2 implique le théorème 2, car elle implique $\left\| \sum_{m \in F} c_m f_m \right\| \leq k \left\| \sum_{m \in M} c_m f_m \right\| + \varepsilon \sup |c_n|$ d'où l'on déduit facilement que la sous-suite $(f_m)_{m \in M}$ est $(k/(1-\varepsilon))$ -inconditionnelle.)

Nous allons démontrer la proposition 2 par récurrence, le cas $k=1$ étant donné par la proposition 1.

Soit donc $k \geq 2$, et supposons la proposition 2 démontrée pour tout entier $j \leq k-1$. Soient H tel que $H^{(\omega \cdot k)} = \emptyset$, et (f_n) une suite tendant simplement vers zéro sur H , telle que $\|f_n\| \leq 1$ pour tout n . Comme on l'a vu, on peut supposer que $E_n = \{|f_n| > 0\}$ est une suite d'ensembles ouverts et fermés tendant fortement vers $\emptyset$. Considérons le compact $K = H^{(\omega \cdot (k-1))}$. Il vérifie $K^{(\omega)} = \emptyset$, par conséquent on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) d'après le lemme 7 qu'il existe un entier j tel que pour tout j -uple d'entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_j$:

$$K \cap E_{n_1} \cap \dots \cap E_{n_j} = \emptyset .$$

Cela signifie que le compact $L = E_{n_1} \cap \dots \cap E_{n_j}$ vérifie $L^{(\omega \cdot (k-1))} = \emptyset$, ce qui nous permettra de lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Remarquons encore que s'il existait $M \subseteq \mathbb{N}$ infini tel que $E_{n_1} \cap \dots \cap E_{n_j} = \emptyset$ pour tout j -uple $n_1 < \dots < n_j$ d'éléments de M , on se ramènerait pour la sous-suite $(f_m)_{m \in M}$ au cas de la proposition 1, déjà connu.

D'après le théorème de Ramsey, on peut donc supposer (quitte à extraire une nouvelle sous-suite) que pour tout j -uple $n_1 < n_2 < \dots < n_j$:

$$E_{n_1} \cap E_{n_2} \cap \dots \cap E_{n_j} \neq \emptyset .$$

Considérons le compact $L = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_j$. On peut trouver une partition finie de L en ensembles ouverts et fermés $L(\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$, tels que pour chaque α et pour tout $i = 1, 2, \dots, j$, l'oscillation de f_i sur $L(\alpha)$

soit $\leq \varepsilon/jk$. Puisque $L(\alpha) \subset L$, on a encore $L(\alpha)^{(\omega \cdot (k-1))} = \emptyset$, et par conséquent on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux fonctions $(f_n)_{n \geq j}$, restreintes à $L(\alpha)$. On peut ainsi trouver un ensemble infini $M_1 \subset \mathbb{N}$, $M_1 > j$, tel que la propriété de la proposition 2 soit satisfaite à l'ordre $k-1$ pour les $(f_m)_{m \in M_1}$ sur $L(\alpha)$, pour $\alpha = 1, \dots, N$. On peut aussi supposer, quitte à prendre une nouvelle sous-suite, qu'il existe pour chaque $\alpha = 1, \dots, N$ un point x_α de $L(\alpha)$ tel que :

$$\sum_{m \in M_1} |f_m(x_\alpha)| \leq \varepsilon \quad .$$

On détermine ensuite par récurrence une suite décroissante $M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n \dots$ de la façon suivante : supposons M_n déterminé. On considère pour chaque j -uple $n_1 < n_2 < \dots < n_j$ contenu dans $\{1, 2, \dots, j+n\}$ le compact (ouvert)

$$\begin{aligned} E(n_1, \dots, n_j) &= \\ &= \{x \in H ; f_i(x) = 0 \quad \forall i \notin \{n_1, \dots, n_j\}, i \leq j+n\} \cap E_{n_1} \cap E_{n_2} \cap \dots \cap E_{n_j} \quad . \end{aligned}$$

Comme précédemment on réalise une partition finie de $E(n_1, \dots, n_j)$ en ensembles $L(\alpha, n_1, \dots, n_j)$ ouverts et fermés tels que l'oscillation de chaque f_{n_i} sur $L(\alpha, n_1, \dots, n_j)$ soit $\leq \varepsilon/jk$.

On choisit ensuite grâce à l'hypothèse de récurrence un ensemble $M_{n+1} \subset M_n$ infini tel que $M_{n+1} > n+j$ et que les fonctions $(f_m)_{m \in M_{n+1}}$ satisfassent la proposition 2 à l'ordre $k-1$ sur chaque ensemble $L(\alpha, n_1, \dots, n_j)$. On supposera aussi que pour chaque α existe un point x_α de $L(\alpha, x_1, \dots, x_j)$ tel que :

$$\sum_{m \in M_{n+1}} |f_m(x_\alpha)| \leq \varepsilon \quad .$$

Pour finir on construit l'ensemble "diagonal" $M' = \{m_1, m_2, \dots, m_n, \dots\}$ où $m_n = \inf M_n$.

Pour chaque $x \in H$ désignons par $n(x)$ le j -ième entier n tel que $f_n(x) \neq 0$, et posons :

$$H_0 = \{x \in H ; \sum_{\substack{m \in M' \\ m > n(x)}} |f_m(x)| \leq \varepsilon\} \quad .$$

Définissons d'autre part une suite de fonctions $(h_m)_{m \in M'}$ par :

$$h_m(x) = \begin{cases} f_m(x) & \text{si } m \leq n(x) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Si x est un point du compact H_0 , on a :

$$\sum_{m \in M'} |f_m(x) - h_m(x)| \leq \varepsilon .$$

Par ailleurs, pour chaque point $x \in H_0$, il y a au plus j indices $m \in M'$ tels que $h_m(x) \neq 0$. Il est alors clair que l'on peut appliquer la proposition 1 aux fonctions $(h_m)_{m \in M'}$, restreintes à H_0 : il existe un ensemble infini $M \subseteq M'$ tel que pour tout sous-ensemble infini $M_0 \subseteq M$, pour tout $x \in H_0$ et tout ensemble fini $F \subseteq M_0$, il existe $y \in H_0$ tel que :

$$\forall (c_m) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad \left| \sum_{m \in F} c_m h_m(x) - \sum_{m \in M_0} c_m h_m(y) \right| \leq \varepsilon \sup |c_m| .$$

Nous allons montrer que ce dernier ensemble M convient pour démontrer la proposition 2. Soient donc M_0 un sous-ensemble infini de M , $x \in H$ et F un ensemble fini, $F \subseteq M_0$. Nous pouvons supposer que $f_m(x) \neq 0$ pour tout $m \in F$. Désignons par $n_1 < n_2 < \dots < n_j$ les j premiers entiers n tels que $f_n(x) \neq 0$. Le point x appartient donc à un certain ensemble $L(\alpha, n_1, \dots, n_j)$. Nous poserons $F_1 = F \cap \{n_1, \dots, n_j\}$, $F_2 = F \setminus F_1$
 $G = M_0 \cap \{n_1, \dots, n_j\}$.

D'après la construction de l'ensemble M' , il existe des points $y_1, \dots, y_{k-1} \in L(\alpha, n_1, \dots, n_j)$ tels qu'en posant $g_2(y) = \sum_{\substack{m \in M_0 \\ m > n_j}} c_m f_m(y)$ on ait :

$$\forall (c_m) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad \left| \sum_{m \in F_2} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_2(y_i) \right| \leq \varepsilon \sup |c_m| .$$

Il faut noter que d'après la propriété d'oscillation des f_{n_i} sur $L(\alpha, n_1, \dots, n_j)$, on a, en posant $g_1(y) = \sum_{\substack{m \in M_0 \\ m \leq n_j}} c_m f_m(y) = \sum_{m \in G} c_m f_m(y)$,

pour k impair :

$$\left| \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_1(y_i) \right| \leq \varepsilon \sup |c_m|$$

et pour k pair :

$$\left| \sum_{m \in G} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_1(y_i) \right| \leq \varepsilon \sup |c_m| .$$

Il existe par hypothèse un point $x_\alpha \in L(\alpha, n_1, \dots, n_j)$ tel que
 $\sum_{\substack{m \in M' \\ m \geq n_j}} |f_m(x_\alpha)| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire que $x_\alpha \in H_o$. D'après la propriété de l'ensemble M , on peut trouver un point $z \in H_o$ tel que :

pour k impair :

$$\left| \sum_{m \in F_1} c_m h_m(x_\alpha) - \sum_{m \in M_o} c_m h_m(z) \right| \leq \varepsilon \sup |c_m|$$

pour k pair :

$$\left| \sum_{m \in G \dot{-} F_1} c_m h_m(x_\alpha) - \sum_{m \in M_o} c_m h_m(z) \right| \leq \varepsilon \sup |c_m| .$$

En rappelant que $\sum_{m \in M_o} |f_m(u) - h_m(u)| \leq \varepsilon$ pour $u \in H_o$, et en utilisant à nouveau les conditions sur l'oscillation, on en déduit :

pour k impair :

$$\left| \sum_{m \in F_1} c_m f_m(x) - \sum_{m \in M_o} c_m f_m(z) \right| \leq 3\varepsilon \sup |c_m|$$

pour k pair :

$$\left| \sum_{m \in G \dot{-} F_1} c_m f_m(x) - \sum_{m \in M_o} c_m f_m(z) \right| \leq 3\varepsilon \sup |c_m| .$$

Posons $g(y) = g_1(y) + g_2(y) = \sum_{m \in M_o} c_m f_m(y)$. On déduit de ce qui précède :

cède :

pour k impair :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m \in F} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g(y_i) - g(z) \right| \\ & + \left| \sum_{m \in F_2} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_2(y_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_1(y_i) \right| \\ & + \left| \sum_{m \in F_1} c_m f_m(x) - g(z) \right| \leq 5\varepsilon \sup |c_m| \end{aligned}$$

pour k pair :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m \in F} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g(y_i) + g(z) \right| \\ & \leq \left| \sum_{m \in F_2} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_2(y_i) \right| \\ & + \left| \sum_{m \in G} c_m f_m(x) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_1(y_i) \right| + \left| \sum_{m \in G \setminus F_1} c_m f_m(x) - g(z) \right| \\ & \leq 5\varepsilon \sup |c_m| , \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration !!

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Maurey and H.P. Rosenthal, Normalized weakly null sequences with no unconditional subsequence, (à paraître dans *Studia Math.*).
- [2] H.P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing ℓ^1 , *Proc. Nat. Acad. Sc. USA* 71 (1974) p. 2411-2413.
