

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. TURPIN

Convergences de séries dans les espaces d'Orlicz

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 6 bis, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974__A8_0>

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

CONVERGENCES DE SERIES DANS LES ESPACES D'ORLICZ

par P. TURPIN

Exposé N° VI bis

Soit (Ω, μ) un espace mesuré quelconque (μ est une mesure positive) et soit une fonction $\varphi : [0, \infty[\times \Omega \rightarrow [0, \infty[$, $\varphi(t, \cdot)$ étant mesurable sur Ω pour tout $t \geq 0$ et $\varphi(\cdot, \omega) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ étant, pour tout $\omega \in \Omega$, croissante, continue à gauche, nulle et continue en 0, non identiquement nulle.

Si G est un espace de Banach, on pose

$$L^\varphi(\Omega, \mu, G) = \left\{ X \mid \exists u > 0 : \int_{\Omega} \varphi(\|uX(\omega)\|, \omega) d\mu(\omega) < \infty \right\},$$

où les $X : \Omega \rightarrow G$ sont mesurables. $L^\varphi(\Omega, \mu, G)$ est un espace vectoriel topologique métrisable complet avec comme système fondamental de voisinages de 0 l'ensemble des

$$aB(\alpha) = \left\{ X \in L^\varphi(\Omega, \mu, G) \mid \int_{\Omega} \varphi\left(\left\|\frac{X(\omega)}{a}\right\|, \omega\right) d\mu(\omega) \leq \alpha \right\}, \quad \alpha > 0, a > 0.$$

Dire que $X_n \rightarrow 0$ dans $L^\varphi(\Omega, \mu, G)$, c'est dire que, pour tout scalaire u , $\int_{\Omega} \varphi(\|uX_n(\omega)\|, \omega) d\mu(\omega) \rightarrow 0$.

On a la généralisation suivante du corollaire 3, p. VI.8, avec essentiellement la même démonstration (quand μ est une probabilité, on obtient $L^0(\Omega, \mu, G)$ en prenant φ bornée et indépendante de ω).

Théorème. Si (X_n) est une suite de points de $L^\varphi(\Omega, \mu, G)$ et si la série $\sum \varepsilon_n X_n$ converge dans $L^\varphi(\Omega, \mu, G)$ pour tout $(\varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, alors $\sum c_n X_n$ converge dans $L^\varphi(\Omega, \mu, G)$ pour toute suite scalaire bornée (c_n) .

On utilise le lemme suivant, qui est une forme d'inégalité de Fubini.

Lemme. Soit (K, ν) un espace de probabilité et soit $\beta > 0$. Si (Ω, μ) est σ -fini, on a, pour toute fonction f positive et mesurable sur $(\Omega \times K, \mu \otimes \nu)$,

$$\int_{\Omega} \varphi(J_\beta(f(\omega, y), d\nu(y)), \omega) d\mu(\omega) \leq \frac{1}{\beta} \iint_{\Omega \times K} \varphi(f(\omega, y), \omega) d\mu(\omega) d\nu(y).$$

Démonstration. ① Supposons que φ ne dépende que de la variable t :

$\varphi(t, \omega) = \varphi(t)$. $d\varphi$ étant la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à φ , on connaît la formule

$$\int_{\Omega} \varphi(g(\omega)) d\mu(\omega) = \int_0^{\infty} \mu(\{\omega \mid g(\omega) > \xi\}) d\varphi(\xi)$$

où $g \geq 0$ est mesurable (écrire $\varphi(g(\omega)) = \int_{[0, g(\omega)[} d\varphi(\xi)$ et appliquer Fubini):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(J_{\beta}(f(\omega, y), d\nu(y))) d\mu(\omega) &= \int_0^{\infty} \mu(\{\omega \mid \nu(\{y \mid f(\omega, y) > \xi\}) > \beta\}) d\varphi(\xi) \\ &\leq \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} d\varphi(\xi) \int_{\Omega} \nu(\{y \mid f(\omega, y) > \xi\}) d\mu(\omega) \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \mu \otimes \nu(\{(\omega, y) \mid f(\omega, y) > \xi\}) d\varphi(\xi) = \frac{1}{\beta} \iint_{\Omega \times K} \varphi(f(\omega, y)) d\mu(\omega) d\nu(y). \end{aligned}$$

② Supposons que $\varphi(t, \omega) = \sum_{i \in I} \varphi_i(t) \chi_{A_i}(\omega)$ où I est fini ou

dénombrable, les $A_i \subset \Omega$ mesurables et deux à deux disjoints (les χ_{A_i} sont les fonctions caractéristiques), les φ_i croissantes, continues à gauche, nulles et continues en 0 :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(J_{\beta}(f(\omega, y), d\nu(y)), \omega) d\mu(\omega) &= \sum_i \int_{A_i} \varphi_i(J_{\beta}(f(\omega, y), d\nu(y))) d\mu(\omega) \\ &\leq \frac{1}{\beta} \sum_i \iint_{A_i \times K} \varphi_i(f(\omega, y)) d\mu(\omega) d\nu(y) = \frac{1}{\beta} \iint_{\Omega \times K} \varphi(f(\omega, y), \omega) d\mu(\omega) d\nu(y). \end{aligned}$$

③ Cas général : il suffit d'observer que $\varphi(t, \omega)$ est partout limite d'une suite croissante de fonctions $\varphi_n(t, \omega) = \sum_i \varphi_{n,i}(t) \chi_{A_{n,i}}(\omega)$ telles qu'en

② ci-dessus.

Posons, pour $n \geq 1$ entier,

$$\varphi_n(t, \omega) = 0 \quad \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n}$$

$$\varphi_n(t, \omega) = \inf\left\{\frac{q}{n}, n\right\} \quad \text{si } \frac{p}{n} < t \leq \frac{p+1}{n} \quad \text{et si } \frac{q}{n} \leq \varphi\left(\frac{p}{n}, \omega\right) < \frac{q+1}{n},$$

avec $p \geq 1, q \geq 0$ entiers.

Pour tout ω et tout t , $\varphi_n(t, \omega)$ tend en croissant vers $\varphi(t, \omega)$ (car $\varphi(\cdot, \omega)$ est continue à gauche). Pour tout ω , $\varphi_n(\cdot, \omega)$ est croissante, continue à gauche, nulle et continue en 0. De plus, quand ω parcourt Ω , n fixé, l'ensemble des fonctions $\varphi_n(\cdot, \omega)$ est fini ou dénombrable, puisque chaque $\varphi_n(\cdot, \omega)$ est constante sur tout intervalle $\left]\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right]$, prend ses valeurs dans l'ensemble fini $\left\{\frac{q}{n} \mid 0 \leq q \leq n^2\right\}$ et est croissante ; on vérifie que la partition $(A_{n,i})_{i \in I}$

de Ω ainsi définie est mesurable : φ_n a donc la forme voulue.

Démonstration du théorème. Soit $c = (c_n)$ une suite scalaire telle que $|c_n| \leq 1$ et soit $u \geq 0$. Il faut montrer que $\int_{\Omega} \varphi(u \|\sum_{n=1}^M c_n X_n(\omega)\|, \omega) d\mu(\omega) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$ et $M \rightarrow \infty$.

On peut supposer (Ω, μ) σ -fini. En effet, pour N et M assez grands, et pour tout $\varepsilon \in H = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\int_{\Omega} \varphi(u \|\sum_{n=1}^M \varepsilon_n X_n(\omega)\|, \omega) d\mu(\omega) < \infty$, donc

$\varphi(u \|\sum_{n=1}^M \varepsilon_n X_n(\omega)\|, \omega) > 0$ sur un ensemble σ -fini Ω_{ε} de valeurs de ω ;

c appartenant à l'enveloppe convexe fermée d'une partie dénombrable de H ,

$\varphi(u \|\sum_{n=1}^M c_n X_n(\omega)\|, \omega) > 0$ sur un ensemble σ -fini.

Il existe (p. VI.8) une probabilité \mathcal{L} sur H , $\beta > 0$, $\beta > 0$ vérifiant

$$\forall \omega \in \Omega, \forall N, \forall M, \|\sum_{n=1}^M c_n X_n(\omega)\| \leq \beta J_{\beta}(\|\sum_{n=1}^M \varepsilon_n X_n(\omega)\|, d\mathcal{L}(\varepsilon)),$$

d'où, d'après le lemme,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(u \|\sum_{n=1}^M c_n X_n(\omega)\|, \omega) d\mu(\omega) &\leq \frac{1}{\beta} \int \varphi(u \|\sum_{n=1}^M \varepsilon_n X_n(\omega)\|, \omega) d\mu(\omega) d\mathcal{L}(\varepsilon) \\ &\leq \frac{1}{\beta} \sup_{\varepsilon \in H} \int_{\Omega} \varphi(\rho u \|\sum_{n=1}^M \varepsilon_n X_n(\omega)\|, \omega) d\mu(\omega), \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand N et M tendent vers ∞ .

Remarque. La propriété énoncée dans le théorème pour tout espace $L^{\varphi}(\Omega, \mu, G)$ ne passe pas au quotient.

On sait en effet qu'il existe des evt métrisables et complets ne vérifiant pas cette propriété ([1], [2]) et on établit facilement que (de même que tout Banach est un quotient d'un $l^1(I)$), tout evt métrisable complet E est le quotient d'un $l^{\varphi}(I) = \{(t_i) \mid \sum_i \varphi(\|t_i\|, i) < \infty\}$ ($I \subset E \setminus \{0\}$ est dense dans E , $\varphi(t, i) = \|t_i\|$ où $\|\cdot\|$ est une "F-norme" définissant la topologie de E).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] S. ROLEWICZ, C. RYLL-NARDZEWSKI, On unconditional convergence in linear metric spaces, Colloq. Math. 17 (1967), 327-331.
- [2] P. TURPIN, Mesures vectorielles pathologiques, C. R. Acad. Sci. Paris 275 (1972), 981-984.