SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

« Type » des espaces normés

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A4_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE MAUREY - SCHWARTZ 1973 - 1974

"TYPE" DES ESPACES NORMES

par G PISIER

Exposé N°III   14 Novembre 1973

L'objet de cet exposé est de comparer les différentes notions de "type" d'un espace normé introduites par plusieurs auteurs (cf. [1], [2], [4]).

On appelle suite stable d'ordre p sur un espace de probabilité (Ω,P) une suite de v.a sur (Ω,P) indépendantes, équidistribuées suivant une loi dont la transformée de Fourier est $e^{-|t|^p}$.

Soit $p \in]0,2]$, on note $p^* = \begin{cases} p & \text{si } p < 2 \\ +\infty & \text{si } p = 2 \end{cases}$.

<u>Définition</u> : Soient E, F deux espaces quasi-normés et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Nous dirons que u est de type p-Rademacher [resp. de type p-stable] s'il existe $r \in]0,\infty[$ (resp. $r \in]0,p^*[$) et une constante C vérifiant : pour toute famille finie (x_n) dans E

$$\left(\int \|\Sigma\, \varepsilon_n(t)\; u(x_n)\|^r\, dt\right)^{1/r} \leq C\, \left(\Sigma\, \|x_n\|^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\text{resp. } \left(\int \|\Sigma\, f_n(t)\; u(x_n)\|^r\, dt\right)^{1/r} \leq C\, \left(\Sigma\, \|x_n\|^p\right)^{1/p}\right)$$

où (ε_n) est la suite des variables de Rademacher sur $([0,1],dt)$ (resp. où (f_n) est une suite stable d'ordre p sur $([0,1], dt)$.) Nous dirons qu'un espace quasi-normé est de type p-Rademacher (resp. stable) si l'identité de cet espace est de type p-Rademacher (resp. stable).

Il est évident que la restriction d'un opérateur de type p-Rademacher (resp. stable) est de type p-Rademacher (resp. stable). On peut vérifier également (cf. [4], exposés X,XI, proposition 1) que tout quotient d'un espace de type p-Rademacher (resp. stable) est de type p-Rademacher (resp. stable).

De plus il est trivial que si un opérateur est de type p-Rademacher, il est a fortiori de type q-Rademacher quand q est inférieur à p.

La définition précédente est simplifiée par les deux résultats suivants (cf. [4], exposé VI) :

<u>Théorème (Kahane)</u> : Soit α tel que $0<\alpha\leq 1$, p et q deux réels positifs ; il existe des constantes universelles $R^{\alpha}_{p,q}$ telles que l'on ait : pour tout espace α-normé E et toute famille finie (x_n) dans E,

$$\text{(K)} \qquad \left(\int \|\Sigma\, \varepsilon_n(t)\, x_n\|^p\, dt\right)^{1/p} \leq R^{\alpha}_{p,q} \left(\int \|\Sigma\, \varepsilon_n(t)\, x_n\|^q\, dt\right)^{1/q} .$$

L'analogue pour les lois stables de ce théorème est du à Hoffmann-Jørgensen :

<u>Théorème</u> : Soit $p\in]0,2]$, soit $\alpha\in]0,1]$ et soi ent r, q deux réels dans $]0,p^*[$; il existe des constantes universelles $S^{\alpha,p}_{r,q}$ telles que l'on ait :

pour tout espace α-normé E et toute famille finie (x_n) dans E,

$$\text{(H)} \qquad \left(\int \|\Sigma\, f_n(t)\, x_n\|^r\, dt\right)^{1/r} \leq S^{\alpha,p}_{r,q} \left(\int \|\Sigma\, f_n(t)\, x_n\|^q\, dt\right)^{1/q}$$

où (f_n) est une suite stable d'ordre p sur $([0,1],dt)$.

<u>Rappel</u> : Soit E un e.v.t. Une suite de v.a sur (Ω,P) à valeurs dans E est une suite symétrique si, pour toute suite (ξ_n) de nombres égaux à +1 ou -1, la suite $(\xi_n \varphi_n)$ a même loi sur $E^{\mathbb{N}}$ que la suite (φ_n).

Toute suite de v.a indépendantes suivant chacune une loi symétrique est une suite symétrique. En particulier (ε_n) est une suite symétrique, de même que toute suite stable.

Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant :

<u>Lemme 1</u> : a) Soit (X_n) une suite de v.a sur (Ω,P) à valeurs dans E, la suite de v.a (Y_n) définie sur $(\Omega,P) \times ([0,1]\, dt)$ par $Y_n(\omega,t) = X_n(\omega)\ \varepsilon_n(t)$ est une suite symétrique. De plus, si (X_n) est une suite symétrique, (Y_n) a la même loi sur $E^{\mathbb{N}}$ que (X_n).

b) Si (φ_n) est une suite symétrique de v.a.r sur (Ω,P) la suite de v.a.r $(\varepsilon_n \otimes |\varphi_n|)$ sur $([0,1]dt)\times(\Omega,P)$ a la même loi (sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) que la suite (φ_n).

<u>Démonstration</u> : Soit $P_{(X_n)}$ la loi sur $E^{\mathbb{N}}$ de la suite (X_n). On vérifie aisément que :

$$\forall\ (\xi_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$P_{(Y_n)} = \int dt\ \ P_{(\varepsilon_n(t)\ X_n)} = \int dt\ P_{(\xi_n\ \varepsilon_n(t)\ X_n)} = P_{(\xi_n Y_n)}\ .$$

De plus si (X_n) est une suite symétrique :

$$P_{(Y_n)} = \int dt\ P_{(\varepsilon_n(t)\ X_n)} = \int dt\ P_{(X_n)} = P_{(X_n)}\ ,$$

ce qui démontre l'assertion a).

La deuxième partie résulte des égalités :

$$P_{(\varepsilon_n \otimes |\varphi_n|)} = \int dP(\omega)\ P_{(\varepsilon_n |\varphi_n(\omega)|)} = \int dP(\omega)\ P_{(\varepsilon_n \varphi_n(\omega))} = P_{(\varphi_n)} .$$

<u>Proposition 1</u> : Soit (φ_n) une suite symétrique de v.a.r intégrables sur (Ω,P), soit E un espace normé et (x_n) une suite finie dans E ; on a :

$$\forall\ p \in [1,\infty[,\ \inf_n \|\varphi_n\|_{L^1} \left(\int \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\, x_n\|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int \|\Sigma\ \varphi_n(\omega)\, x_n\|^p\, dP(\omega)\right)^{1/p}.$$

<u>Démonstration</u> : Si t est fixé :

$$\left\| \int dP(\omega)\ [\Sigma\ \varepsilon_n(t)\ |\varphi_n(\omega)|\, x_n] \right\| \leq \int dP(\omega)\ \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\ |\varphi_n(\omega)|\ x_n\|$$

d'où :

$$\|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\, x_n \|\varphi_n\|_{L^1}\|^p \leq \int dP(\omega)\ \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\ |\varphi_n(\omega)|\, x_n\|^p$$

soit en intégrant :

$$\left(\int \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\, x_n \|\varphi_n\|_{L^1}\|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int dt\, dP(\omega)\ \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)|\varphi_n(\omega)|\, x_n\|^p\right)^{1/p} .$$

D'après le principe de contraction (cf. par exemple [4], exposé VII, lemme 1) :

$$\inf \|\varphi_n\|_{L^1} \left(\int \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\, x_n\|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\, x_n \|\varphi_n\|_{L^1}\|^p dt\right)^{1/p} .$$

On conclut alors aisément puisque, par le lemme 1.b,

$$\left(\int dt\ dP(\omega)\ \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)|\varphi_n(\omega)|x_n\|^p\right)^{1/p} = \left(\int dP(\omega)\ \|\Sigma\ \varphi_n(\omega)x_n\|^p\right)^{1/p}.$$

Soit (φ_n) une suite de v.a.r sur (Ω,P), soit E,F deux espaces quasi-normés et $u \in \mathcal{L}(E,F)$; nous dirons que u est de type $p - [\varphi_n]$ s'il existe une constante C telle que pour toute famille finie (x_n) dans E on ait

$$\int \|\Sigma\, u(x_n)\varphi_n(\omega)\|\ dP(\omega) \leq C\ (\Sigma\ \|x_n\|^p)^{1/p} .$$

<u>Proposition 2</u> : Soit E un espace quasi-normé, F un espace normé et $u \in \mathcal{L}(E,F)$; soit p un réel dans $]1,2]$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une suite de v.a.r (φ_n) sur (Ω,P) vérifiant $\inf_n \|\varphi_n\|_{L^1} > 0$ et telle que u soit de type $p-[\varphi_n]$.

ii) u est de type p-Rademacher.

iii) u est de type $p-[\varphi_n]$ pour toute suite symétrique (φ_n) de v.a.r sur (Ω,P) vérifiant $\sup_n \|\varphi_n\|_{L^p} < +\infty$.

<u>Démonstration</u> : i) $\Rightarrow$ ii) : i) entraîne trivialement que u est de type $p-[\varepsilon_n \otimes \varphi_n]$; alors, le lemme 1, la proposition 1 et la condition $\inf_n \|\varepsilon_n \otimes \varphi_n\|_{L^1} = \inf_n \|\varphi_n\|_{L^1}$ montrent que u est de type p-Rademacher.

ii) $\Rightarrow$ iii) : D'après (K), si ii) est vérifiée il existe $C > 0$ tel que : $\forall\ (x_n) \in E^{(\mathbb{N})}$,

$$\int \|\sum \varepsilon_n(t)\, u(x_n)\|\, dt \le C \left(\sum \|x_n\|^p\right)^{1/p} ;$$

d'où si ω est fixé :

$$\int \|\sum \varepsilon_n(t)\, \varphi_n(\omega)\, u(x_n)\|\, dt \le C \left(\sum \|x_n\|^p\, |\varphi_n(\omega)|^p\right)^{1/p}$$

d'où en intégrant :

$$\begin{aligned}\int \|\sum \varepsilon_n(t)\ \varphi_n(\omega)\ u(x_n)\|\ dt\ dP(\omega) &\le C \int \left(\sum \|x_n\|^p |\varphi_n(\omega)|^p\right)^{1/p} dP(\omega)\\ &\le C\left(\sum_n \|x_n\|^p \|\varphi_n\|^p_{L^p}\right)^{1/p}\\ &\le C \sup_n \|\varphi_n\|_{L^p} \left(\sum \|x_n\|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

on conclut alors par le lemme 1.a.

Enfin iii) $\Rightarrow$ i) est trivial. (c.q.f.d.)

Corollaire 1 : Avec les hypothèses de la proposition, si u est de type p-stable il est de type p-Rademacher.

Démonstration : En effet, u est de type p-stable ssi il est de type p-$[f_n]$ où (f_n) est une suite stable d'ordre p ; de plus, on a :

$$\inf_n \|f_n\|_{L^1} = \|f_1\|_{L^1} > 0$$

puisque la suite (f_n) est équidistribuée.

Remarque : La réciproque du corollaire précédent est fausse car l'identité de l^p est de type p-Rademacher mais n'est pas de type p-stable (cf. par exemple [4], exposé XVIII, proposition 3).
Néanmoins, on a la :

Proposition 3 : Soit E, F deux espaces quasi-normés, soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $p \in]0,2]$. Si u est de type p-Rademacher il est de type q-stable pour tout $q < p$.

Démonstration : Soit $r \in]0,q[$, l'hypothèse (et (K)) entraîne l'existence de C telle que

$$(\int \| \Sigma\, \varepsilon_n(t)\, u(x_n)\|^r\, dt)^{1/r} \leq C\, (\Sigma \|x_n\|^p)^{1/p} \quad ;$$

d'où si θ est fixé

$$(\| \Sigma\, \varepsilon_n(t)\, f_n(\theta)\, u(x_n)\|^r\, dt \quad \leq \quad C^r (\Sigma \|x_n\|^p |f_n(\theta)|^p)^{r/p}$$

où (f_n) est une suite stable d'ordre q sur ([0,1] dt), d'où en intégrant :

$$(\int \|\Sigma\, \varepsilon_n(t)\, f_n(\theta)\, u(x_n)\|^r dt d\theta)^{1/r} \leq (\int (\Sigma\, |f_n(\theta)|^p\, \|x_n\|^p)^{r/p} d\theta)^{1/r} \quad ;$$

comme (f_n) est une suite symétrique, le premier membre vaut (cf. lemme 1.a) $(\int \|\Sigma\ |f_n(\theta)\ u(x_n)\|^r\ d\theta)^{1/r}$; il suffit pour conclure d'appliquer le :

<u>Lemme 2</u> : Soit (α_n) une suite de réels, soient r,q,p des réels tels que $0 < r < q < p \leq 2$, soit (f_n) une suite stable d'ordre q. On a :

$$\|f_1\|_r\ (\Sigma\ |\alpha_n|^q)^{1/q} \leq (\int\ (\Sigma\ |\alpha_n|^p |f_n(\theta)|^p)^{r/p}\ d\theta)^{1/r} \leq \frac{\|f_1\|_r\ \|g_1\|_q}{\|g_1\|_r}\ (\Sigma\ |\alpha_n|^q)^{1/q}$$

où g_1 est une v.a.r. dont la loi est stable d'ordre p.

<u>Démonstration</u> : Soit (g_n) une suite stable d'ordre p.
Soit $(\beta_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, on utilisera les relations bien connues (cf. [4], exposés X - XI, lemme 2) :

$$(1) \qquad (\Sigma\ |\beta_n|^p)^{1/p}\ \|g_1\|_r = (\int\ |\Sigma\ \beta_n\ g_n(t)|^r\ dt)^{1/r}$$

$$(2) \qquad (\Sigma\ |\beta_n|^q)^{1/q}\ \|f_1\|_r = (\int\ |\Sigma\ \beta_n\ f_n(t)|^r\ dt)^{1/r} .$$

On déduit de (1) :

$$(\int\ (\Sigma|\alpha_n|^p |f_n(\theta)|^p)^{r/p} d\theta)^{1/r} = \frac{1}{\|g_1\|_r}\ (\int\ |\Sigma\ \alpha_n f_n(t)\ g_n(\theta)|^r\ dt\ d\theta)^{1/r} .$$

Par (2) cette dernière intégrale vaut :

$$\frac{\|f_1\|_r}{\|g_1\|_r}\ (\int\ (\Sigma\ |\alpha_n|^q\ |g_n(\theta)|^q)^{r/q}\ d\theta)^{1/r} ;$$

mais, d'une part :

$$(\int\ (\Sigma\ |\alpha_n|^q |g_n(\theta)|^q)^{r/q} d\theta)^{1/r} \leq (\int\ d\theta\ \Sigma\ |\alpha_n|^q |g_n(\theta)|^q)^{1/q} = (\Sigma|\alpha_n|^q)^{1/q}\ \|g_1\|_q$$

d'autre part :

$$\left(\int \left(\Sigma\ |\alpha_n|^q |g_n(\theta)|^q\right)^{r/q} d\theta\right)^{1/r} \geq \left(\Sigma \left(\int |\alpha_n|^r |g_n(\theta)|^r d\theta\right)^{q/r}\right)^{1/q}$$

$$= \|g_1\|_r \left(\Sigma\ |\alpha_n|^q\right)^{1/q}$$

ce qui démontre le lemme.

<u>Corollaire 2</u> : Soit $\alpha \in]0,1]$, tout espace α-normé est de type β-stable pour tout $\beta \in]0,\alpha[$.

<u>Démonstration</u> : En effet, un tel espace est trivialement de type α-Rademacher.

<u>Corollaire 3</u> : Si $p \in]0,2]$, tout espace L^p est de type q-stable pour tout $q \in]0,p[$. Si $p \in [2,\infty[$, tout espace L^p est de type q-stable pour tout $q \in [0,2]$.

<u>Démonstration</u> : Soit (Ω,μ) un espace mesuré.

Si $p \in]0,2]$, soit $(f_1,\ldots,f_n)$ une famille finie dans $L^p(\mu)$, on a : $\forall\ \omega \in \Omega$

$$\left(\int |\Sigma\ \varepsilon_n(t) f_n(\omega)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int |\Sigma\ \varepsilon_n(t) f_n(\omega)|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\Sigma |f_n(\omega)|^2\right)^{1/2} \leq \left(\Sigma |f_n(\omega)|^p\right)^{1/p}$$

d'où en intégrant :

$$\left(\int \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\ f_n\|_p^p\ dt\right)^{1/p} \leq \left(\Sigma\ \|f_n\|_p^p\right)^{1/p} .$$

Si $p \in [2,\infty[$, d'après les inégalités de Khintchine (cf. par exemple [5], exposé XXVI, p. 7), il existe une constante B_p telle que :

$$\forall\ (\alpha_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad \left(\int |\Sigma\ \alpha_n\ \varepsilon_n(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq B_p \left(\Sigma\ |\alpha_n|^2\right)^{1/2} .$$

On a donc : $\quad \forall\ x_1,\ldots,x_n \in L^p(\Omega,\mu)$

$$\left(\int |\Sigma\ x_n(\omega)\ \varepsilon_n(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq B_p \left(\Sigma\ |x_n(\omega)|^2\right)^{1/2}$$

d'où :

$$\left(\int |\Sigma x_n(\omega)\ \varepsilon_n(t)|^p dt\ d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq B_p\left(\int (\Sigma |x_n(\omega)|^2)^{p/2} d\mu(\omega)\right)^{1/p}$$

$$\left(\int \|\Sigma x_n\ \varepsilon_n(t)\|^p_{L_p}\ dt\right)^{1/p} \leq B_p\left[\Sigma \left(\int |x_n(\omega)|^p d\mu(\omega)\right)^{2/p}\right]^{1/2}$$

$$\leq B_p\left(\Sigma \|x_n\|^2_{L^p}\right)^{1/2} ;$$

ce qui prouve que $L^p(\Omega,\mu)$ est de type 2-Rademacher.

Proposition 4 : Soit $p \in]0,2]$, tout espace normé de type p-stable est de type q-stable pour tout $q \in]0,p]$.

Démonstration : D'après le corollaire 2, on peut supposer $p > 1$. L'énoncé est alors simplement le rapprochement de la proposition 3 et du corollaire 1.

Remarque : La proposition précédente est vraie pour un espace quasi-normé. En effet, soit (f_n) une suite stable d'ordre p, il résulte des résultats de J. Hoffmann-Jørgensen [2] que si x_n est une suite d'éléments d'un espace quasi-normé complet telle que la série $\Sigma x_n\ _n$ converge p.s, alors la série $\Sigma x_n \varepsilon_n$ converge p.s. On en déduit que si un espace quasi-normé est de type p-stable, il est de type p-Rademacher et on conclut comme ci-dessus.

J. Hoffmann-Jørgensen a remarqué l'équivalence du "type p-Rademacher" et d'une certaine forme de la loi des grands nombres:

Proposition 5 : Soit $p \in]1,2]$, soient E et F deux espaces de Banach et $u \in \mathcal{L}(E,F)$; les assertions suivantes sont équivalentes :

i) u est de type p-Rademacher.

ii) Pour toute suite (X_n) de v.a sur (Ω,P) indépendantes centrées à valeurs dans E, la condition

$$\sum_n \frac{\int \|X_n\|^p}{n^p} < \infty \quad \text{implique que } \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u(X_j)$$

converge p.s vers 0 quand $n \to \infty$.

iii) Il existe une constante C telle que :

$$\forall\ (x_n) \in E^{(\mathbb{N})}\ ,\quad \frac{1}{n}\int \|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(t)\ u(x_j)\|dt \leq C\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\|x_j\|^p}{j^p}\Big)^{1/p} .$$

iv) Il existe une constante C telle que, pour toute suite (X_n) de v.a sur (Ω,P) indépendantes centrées à valeurs dans E, on ait

$$\frac{1}{n}\int \|\sum_{j=1}^{n} u(X_j(\omega))\|\ dP(\omega) \quad \leq \quad C\ \Big(\sum_{j=1}^{n} \int \frac{\|X_j(\omega)\|^p}{j^p}\ dP(\omega)\Big)^{1/p} .$$

<u>Démonstration</u> : Soit (X_n) une suite de v.a indépendantes sur (Ω,P) à valeurs dans E, la suite symétrisée soit $(\tilde{X}_n)$ est définie sur $(\Omega,P)\times(\Omega,P)$ par :

$$\tilde{X}_n(\omega,\omega') = X_n(\omega) - X_n(\omega') .$$

Il est clair que $(\tilde{X}_n)$ est une suite symétrique.

<u>i) ⇒ ii)</u> : Supposons i) : il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall\ (x_n) \in E^{(\mathbb{N})}\ ,\qquad \Big(\int\|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\ u(x_n)\|\ dt\Big) \leq C\ \big(\Sigma\ \|x_n\|^p\big)^{1/p}$$

d'où :

$$\int \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\ \frac{u(\tilde{X}_n(\omega,\omega'))}{n}\|\ dt \quad\leq\quad C\ \Big(\Sigma\ \frac{\|\tilde{X}_n(\omega,\omega')\|^p}{n^p}\Big)^{1/p}$$

soit en intégrant :

$$\int \|\Sigma\ \varepsilon_n(t)\ \frac{u(\tilde{X}_n(\omega,\omega'))}{n}\|\ dt\ dP(\omega)\ dP(\omega') \leq C\ \Big(\Sigma\ \frac{\|\tilde{X}_n\|_p^p}{n^p}\Big)^{1/p} ;$$

on en déduit (cf. lemme 1.a) : $\|\Sigma\ \frac{u(\tilde{X}_n)}{n}\|_1 \leq C\ \Big(\Sigma\ \frac{\|\tilde{X}_n\|_p^p}{n^p}\Big)^{1/p}$; mais si les variables (X_n) sont supposées centrées :

$$\forall\ \omega\in\Omega\ ,\qquad \|\Sigma\ \frac{u(X_n(\omega))}{n}\| = \|\int dP(\omega')\Big[\Sigma\ \frac{u(\tilde{X}_n(\omega,\omega'))}{n}\Big]\|$$

$$\leq \int dP(\omega')\ \|\Sigma\ \frac{u(\tilde{X}_n(\omega,\omega'))}{n}\| ,$$

d'où en intégrant :

$$\|\Sigma \frac{u(X_n)}{n}\|_1 \leq \|\Sigma \frac{u(\tilde{X}_n)}{n}\|_1 .$$

D'autre part :

$$\|\tilde{X}_n\|_p = \left(\int \|\tilde{X}_n(\omega,\omega')\|^p \, dP(\omega) \, dP(\omega')\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int (\|X_n(\omega)\| + \|X_n(\omega')\|)^p \, dP(\omega) \, dP(\omega')\right)^{1/p}$$

$$\leq 2 \, \|X_n\|_p \quad ;$$

on a donc établi finalement :

$$\|\Sigma \frac{u(X_n(.))}{n}\|_1 \leq 2C \left(\Sigma \frac{\|X_n\|_p^p}{n^p}\right)^{1/p} .$$

Comme les variables $u(X_n(.))$ sont indépendantes, on en déduit que $\Sigma \frac{u(X_n)}{n}$ converge presque sûrement, donc, par le lemme de Kronecker♦, que $\frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} u(X_j)\right)$ converge p.s vers 0 quand n tend vers l'infini.

<u>ii) ⇒ iii)</u> . On applique ii) aux suites de la forme $(X_n(.)) = (\varepsilon_n(.)x_n)$ où $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$:

$$\Sigma \frac{\|x_n\|^p}{n^p} < \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(t) \, u(x_j) \xrightarrow{p.s} 0 .$$

On déduit des inégalités (K) que si $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(t) \, u(x_j) \xrightarrow{p.s} 0$, alors $\frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(.) \, u(x_j)\right)$ converge vers 0 dans $L^1(E)$. On obtient alors iii) par un argument de graphe fermé.

♦ Lemme de Kronecker : Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace de Banach telle que la série $\Sigma \frac{x_n}{n}$ est convergente, alors $\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{j=n} x_j\right)$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

<u>iii) $\Rightarrow$ iv)</u> se démontre de manière analogue à i) $\Rightarrow$ ii).

<u>iv) $\Rightarrow$ iii)</u> est trivial.

<u>iii) $\Rightarrow$ i)</u> . Si iii) est vérifié, on a : $\forall\ (x_n) \in E^{(\mathbb{N})}$,

$$\int \Big\| \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(t)\ u(x_j)\ \frac{j}{n} \Big\|\ dt \ \leq\ C \Big(\sum_{j=1}^{j=n} \|x_j\|^p \Big)^{1/p} ,$$

on peut donc écrire :

$$\int \Big\| \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j(t)\ u(x_j)\ \frac{j}{2n} + \sum_{j=n+1}^{2n} \varepsilon_j(t)\ u(x_{j-n})\ \frac{j}{2n} \Big\| dt \leq C\ 2^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p \Big)^{1/p} ,$$

mais par le principe de contraction, le premier membre est plus grand que :

$$\frac{1}{2} \int \Big\| \sum_{j=n+1}^{2n} \varepsilon_j(t)\ u(x_{j-n}) \Big\|$$

qui est lui-même égal à $\frac{1}{2} \int \| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t)\ u(x_i) \|\ dt$; on obtient donc :

$$\int \|\Sigma\ \varepsilon_i(t)\ u(x_i)\|\ dt \leq C\ 2^{1+1/p} (\Sigma\ \|x_i\|^p)^{1/p} ,$$

c'est-à-dire i).

***

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. DUBINSKY, A. PELCZYNSKI et H.P. ROSENTHAL : Studia Math, 44, 1972, p. 617.

[2] J. HOFFMANN-JØRGENSEN : Sums of independent Banach space valued random variables. Aarhus Universitet. Preprint series- 1972-73 n°15.

[3] G. PISIER : Type des espaces normés. C.R.A.S. Série A, t. 276. P. 1673.

[4] Séminaire Maurey-Schwartz 1972/1973.

[5] Séminaire Schwartz 1969/1970.

****