Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

Rappels sur les opérateurs sommants et radonifiants

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1973-1974

RAPPELS SUR LES OPERATEURS SOMMANTS ET RADONIFIANTS

par B. MAUREY

1. OPERATEURS p-SOMMANTS ET (p,G)-SOMMANTS.

Soient E et F deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire de E dans F, et $p \in]0,+\infty[$. Nous dirons que u est p-sommant s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E :

$$\left(\sum \|u(x_i)\|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\|\xi\|_{E'} \leq 1} \left(\sum |<x_i,\xi>|^p\right)^{1/p} .$$

On désigne par $\pi_p(u)$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Soit maintenant G un autre espace de Banach. Si $z \in E \otimes G$ et si $\xi \in E'$, on désignera par $<z,\xi>$ l'élément $\tilde{z}(\xi) \in G$, où $\tilde{z}$ est l'application linéaire de E' dans G définie par z (si $\eta \in G'$, $<z,\eta>$ est défini de façon analogue comme élément de E).

Soit u un opérateur linéaire de $E \otimes G$ dans F. (Pour l'instant, il est inutile de préciser une topologie sur $E \otimes G$). Nous dirons que u est (p,G)-sommant s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(z_1,\dots,z_n)$ d'éléments de $E \otimes G$:

$$\left(\sum \|u(z_i)\|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\|\xi\|_{E'} \leq 1} \left(\sum \|<z_i,\xi>\|_G^p\right)^{1/p} .$$

On désignera par $\pi_{p,G}(u)$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

D'une certaine manière, la notion d'opérateur (p,G)-sommant est comprise entre la notion d'opérateur continu (si $E = \mathbb{R}$), et la notion d'opérateur p-sommant ordinaire (si $G = \mathbb{R}$).

Notons une propriété évidente :

Proposition 1 : Soient E,F,H,K et G cinq espaces de Banach, u un opérateur linéaire continu de E dans F, $\tilde{u} = u \otimes Id_G$ opérateur de $E \otimes G$

dans $F \otimes G$, v un opérateur de $F \otimes G$ dans H, et w un opérateur linéaire continu de H dans K.

On a :

$$\pi_{p,G}(w \circ v \circ \tilde{u}) \leq \|w\| . \pi_{p,G}(v) . \|u\| \quad .$$

2. THEOREME DE PIETSCH

Théorème 1 : Soient E, F, G trois espaces de Banach, u linéaire de $E \otimes G$ dans F, C une constante positive et $p \in]0,+\infty[$.
Pour que l'opérateur u soit (p,G)-sommant, avec $\pi_{p,G}(u) \leq C$, il faut et il suffit qu'il existe une probabilité de Radon μ sur la boule unité B' de E', munie de la topologie $\sigma(E',E)$, telle que l'on ait pour tout $z \in E \otimes G$:

$$\|u(z)\| \leq C \left(\int \| < z, \xi > \|_G^p \, d\mu(\xi)\right)^{1/p} .$$

De plus dans le cas $p \geq 1$, on peut supposer que μ est portée par l'adhérence (pour $\sigma(E',E)$) des points extrémaux de la boule unité de E'.

Démonstration : Supposons tout d'abord qu'il existe une probabilité μ avec la propriété de l'énoncé, et soit $(z_1, \dots, z_n)$ une suite d'éléments de $E \otimes G$. On peut écrire pour chaque i :

$$\|u(z_i)\|^p \leq C^p \int \| < z_i, \xi > \|^p \, d\mu(\xi) \ ,$$

donc :

$$\Sigma \|u(z_i)\|^p \leq C^p \int \Sigma \| < z_i, \xi > \|^p \, d\mu(\xi) \leq C^p \sup_{\|\xi\|_{E'} \leq 1} \Sigma \| < z_i, \xi > \|^p \ ,$$

ce qui montre que $\pi_{p,G}(u) \leq C$.

Inversement supposons $\pi_{p,G}(u) \leq C$. Désignons par K la boule unité de E' si $p \in]0,1[$, l'adhérence des points extremaux pour $\sigma(E',E)$ pour $p \geq 1$. L'espace K est compact pour la topologie $\sigma(E',E)$. Pour chaque suite finie $z = (z_1,\dots,z_n)$ d'éléments de $E \otimes G$, définissons une fonction F_z sur K par :

$$F_z(\xi) = C^p \Sigma \| < z_i, \xi > \|^p - \Sigma \| u(z_i) \|^p .$$

On vérifie que chaque fonction F_z est continue sur K (car $z_k \in E \otimes G$ définit une application linéaire continue de $\sigma(E',E)$ dans G). Quand z varie, les F_z constituent un cône convexe $\mathcal{C}$. Remarquons que chaque fonction F_z a un maximum ≥ 0 sur K (pour $p \in]0,1[$ cela résulte simplement de la définition de $\pi_{p,G}$. Pour $p \geq 1$, il faut remarquer que l'on a par raison de convexité :

$$\sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\Sigma \| < z_i, \xi > \|^p \right)^{1/p} = \sup_{\xi \text{ extrémal}} \left(\Sigma \| < z_i, \xi > \|^p \right)^{1/p}$$

On a donc $\mathcal{C} \cap \Omega = \emptyset$, où Ω est le cône ouvert convexe des fonctions continues < 0 sur K. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure de Radon μ sur K, telle que :

$$\mu(f) \geq 0 \quad \text{si } f \in \mathcal{C} \quad ; \quad \mu(f) < 0 \quad \text{si } f \in \Omega .$$

On voit donc que μ est une mesure positive non nulle, que l'on peut supposer de masse 1. On obtient le résultat voulu en écrivant que $\mu(F_z) \geq 0$, où z est une suite dans $E \otimes G$ réduite à un seul élément.

<u>Corollaire 1</u> : Si u est (p,G)-sommant de $E \otimes G$ dans F, u se prolonge en opérateur continu de $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$ dans F, et l'inégalité des opérateurs (p,G)-sommants reste vraie pour les suites $(z_1,\dots,z_n)$ d'éléments de $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$.

[Rappelons que :

$$\|z\|_\varepsilon = \sup_{\|\xi\|_{E'} \leq 1} \| < z, \xi > \|_G = \sup_{\|\eta\|_{G'} \leq 1} \| < z, \eta > \|_E \Bigg]$$

<u>Démonstration</u> : Considérons la mesure μ fournie par le théorème 1. Considérons l'opérateur $j : z \to \{\tilde{z} : \xi \to < z,\xi >\}$ de $E \otimes G$ dans $L^p(K,\mu,G)$ (où K est comme dans la démonstration du théorème). Désignons par S l'image $j(E \otimes G)$, munie de la norme induite par $L^p(K,\mu,G)$. D'après la propriété de μ, on a un diagramme aux flèches continues :

$$\begin{tikzcd} & L^p(K,\mu,G) \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\ E \underset{\varepsilon}{\otimes} G \arrow[r] & S \arrow[r, "v"] & F \end{tikzcd}$$

(où v est défini par $v(j(z)) = u(z)$, ce qui a un sens d'après la propriété de μ).

En passant au complété, on obtient :

$$\begin{tikzcd} & L^p(K,\mu,G) \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\ E \underset{\varepsilon}{\hat{\otimes}} G \arrow[r] & \overline{S} \arrow[r] & F \end{tikzcd} ,$$

ce qui signifie que l'inégalité $\|u(z)\| \leq (\int \| < z,\xi > \|^p \, d\mu(\xi))^{1/p}$ reste vraie si $z \in E \underset{\varepsilon}{\hat{\otimes}} G$, d'où l'on déduit facilement le corollaire 1.

L'argument précédent démontre pratiquement le résultat que voici :

<u>Corollaire 2</u> : Soit u un opérateur linéaire de $E \otimes G$ dans F. Pour que u soit (p,G)-sommant, il faut et il suffit qu'il existe un espace compact K, une application continue j de E dans C(K), et une probabilité μ sur K tels que u admette la factorisation :

$$\begin{tikzcd} & C(K,G) \arrow[r] & L^p(K,\mu,G) \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\ E \otimes G \arrow[ur, "\tilde{j}"] \arrow[rr] & & S \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

où $\tilde{j} = j \otimes Id_G$, où S est un sous-espace fermé de $L^p(K,\mu,G)$, et où toutes les flèches sont continues.

Nous laissons la vérification complète au lecteur.

<u>Proposition 2</u> : Soient E,F,G trois espaces de Banach, u un opérateur p-sommant de E dans F. L'opérateur $\tilde{u} = u \otimes Id_G$ est (p,G)-sommant de $E \otimes G$ dans $F \hat{\otimes}_{\varepsilon} G$.

<u>Démonstration</u> : Puisque u est p-sommant, il existe d'après le théorème 1 une constante C et une probabilité de Radon μ sur la boule unité de E' telles que:

$$\forall x \in E \ , \quad \|u(x)\| \leq C \left(\int | < x,\xi > |^p \, d\mu(\xi) \right)^{1/p} .$$

Soit $z \in E \otimes G$. Notons que

$$< \tilde{u}(z),\eta > \; = \; u\,(<z,\eta>) \qquad \text{si } \eta \in G' .$$

On a alors :

$$\|\tilde{u}(z)\|_{\varepsilon} = \sup_{\|\eta\|_{G'} \leq 1} \| < \tilde{u}(z),\eta > \|_F = \sup_{\|\eta\|_{G'} \leq 1} \|u(< z,\eta >)\|_F$$

$$\leq \quad C \sup_{\|\eta\| \leq 1} \left(\int | << z,\eta >,\xi > |^p \, d\mu(\xi) \right)^{1/p} ,$$

$$\leq C \left(\int \sup_{\|\eta\| \leq 1} | << z,\xi >,\eta >|^p \, d\mu(\xi) \right)^{1/p}$$

$$= C \, . \left(\int \| < z,\xi > \|_G^p \, d\mu(\xi) \right)^{1/p} ,$$

ce qui démontre la proposition.

3. PROBABILITES CYLINDRIQUES ET G-CYLINDRIQUES.

Soit E un espace de Banach. Une probabilité cylindrique λ sur E est la donnée d'un système projectif de probabilités de Radon (λ_N) sur les quotients de dimension finie E/N.

De façon plus précise, si N est un sous-espace fermé de E, notons π_N la projection de E sur E/N. Si M est un autre sous-espace fermé de E, tel que $N \subset M$, notons $\pi_{M,N}$ la projection de E/N sur E/M. Dire que le système (λ_N) est projectif signifie que l'on a, lorsque N et M sont deux sous-espaces fermés de codimension finie, tels que $N \subset M$:

$$\pi_{M,N}(\lambda_N) = \lambda_M$$

Si maintenant G est un autre espace de Banach, on appellera probabilité G-cylindrique sur $E \otimes G$ la donnée d'un système projectif de probabilités de Radon (λ_N) sur les espaces $E/N \otimes G$, où N décrit l'ensemble des sous-espaces fermés de codimension finie de E.
Dire que le système est projectif signifie :

$$N \subset M \qquad \tilde{\pi}_{M,N}(\lambda_N) = \lambda_M \text{ , où } \tilde{\pi}_{M,N} = \pi_{M,N} \otimes Id_G \text{ .}$$

Si F est un autre espace de Banach, u un opérateur linéaire continu de E dans F, $\tilde{u} = u \otimes Id_G$, on définit l'image $\tilde{u}(\lambda)$ de la façon suivante : si N est un sous-espace fermé de codimension finie de F, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad u \quad} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E/u^{-1}(N) & \xrightarrow[\quad u_N \quad]{} & F/N \end{array}$$

On pose

$$(\tilde{u}(\lambda))_N = \tilde{u}_N\,(\lambda_{u^{-1}(N)}) \quad \text{où } \tilde{u}_N = u_N \otimes Id \text{ .}$$

Un moyen de construction de probabilités G-cylindriques peut être décrit de la façon suivante : soient Ω un espace compact, μ une probabilité de Radon sur Ω , E et G deux espaces de Banach et u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^o(\Omega,\mu,G)$, qui est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions μ-mesurables Lusin de Ω dans G.

Supposons d'abord E' de dimension finie. On voit alors aisément qu'il existe une application mesurable $\varphi_{E'}$ de Ω dans $E \otimes G$, telle que :

$$\forall\ \xi \in E' \quad , \quad u(\xi) = < \varphi_{E'}, \xi > .$$

(Pour construire $\varphi_{E'}$, soit (ξ_i) une base de E' et (x_i) la base duale dans E. Il suffit de prendre : $\varphi_{E'}(\omega) = \Sigma\ x_i \otimes u(\xi_i)(\omega)$.)

Supposons maintenant E quelconque, et soit N un sous-espace fermé de codimension finie de E. Le dual de E/N s'identifie au polaire N^o de N dans E'. Considérons l'application φ_{N^o} de Ω dans $E/N \otimes G$, correspondant à la restriction de u à N^o. Nous pouvons définir une probabilité G-cylindrique à partir de u, en posant :

$$\lambda_N = \varphi_{N^o}(\mu) .$$

On vérifie aisément les relations de compatibilité.

Inversement, on peut montrer que toute probabilité G-cylindrique s'obtient par ce procédé :

<u>Théorème 2</u> : Soient E et G deux espaces de Banach. Pour toute probabilité G-cylindrique λ sur $E \otimes G$, il existe un espace compact Ω, une probabilité de Radon μ sur Ω et un opérateur linéaire u de E' dans $L^o(\Omega,\mu,G)$ tels que λ s'obtienne à partir de u par le procédé décrit ci-dessus.

La démonstration de ce théorème est identique à celle de la proposition (VI,3,1) de [1].
Il suffit d'y remplacer $\check{\mathbb{R}}$ par $\check{G}$ (compactifiés de Stone-Čech).

Supposons maintenant donnée sur le produit tensoriel $E \otimes G$ une norme α (pas nécessairement une norme tensorielle au sens de Grothendieck), telle que :

$$(*) \quad \forall z \in E \otimes G , \forall \xi \in E' \quad \| < z,\xi > \|_G \leq \alpha(z) \, \|\xi\| ,$$

c'est-à-dire que l'injection de $E \underset{\alpha}{\otimes} G$ dans $\mathcal{L}(E',G)$ est continue et de norme ≤ 1, et se prolonge en une application continue (non nécessairement injective !) de norme ≤ 1, de $E \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} G$ dans $\mathcal{L}(E',G)$. Nous noterons encore $< z,\xi >$, si $z \in E \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} G$, et $\xi \in E'$.

Soit μ une probabilité de Radon sur $E \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} G$. Elle définit de façon évidente une probabilité G-cylindrique sur $E \otimes G$: si N est un sous-espace fermé de codimension finie de E, l'application $\tilde{\pi}_N$ de $E \otimes G$ sur $E/N \otimes G$ se prolonge à $E \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} G$. Il suffit de définir un système projectif $\tilde{\mu} = (\mu_N)$ par $\mu_N = \tilde{\pi}_N(\mu)$.

Inversement, nous dirons qu'une probabilité G-cylindrique λ sur $E \otimes G$ "est de Radon" sur $E \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} G$ s'il existe une probabilité de Radon μ sur $E \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} G$ telle que $\tilde{\mu} = \lambda$. Cela toutefois ne sera raisonnable que si une telle μ est unique lorsqu'elle existe. D'après le théorème de Prokhorov ([1], exposé I), il suffit pour cela que les applications $\tilde{\pi}_N$ séparent les points de $E \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} G$, ce qui est vrai si et seulement si les applications $z \to < z,\xi >$ séparent les points de $E \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} G$, soit encore :

(**) L'application de $E \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} G$ dans $\mathcal{L}(E',G)$ est injective.

Dans le cas où α est la norme π de Grothendieck, et $G = E'$, nous retrouvons exactement l'hypothèse d'approximation !

Dans l'exposé suivant, nous considérerons le problème des applications G-radonifiantes : on se donne E,F,G trois espaces de Banach, u un opérateur linéaire continu de E dans F, α une norme sur $F \otimes G$ vérifiant (*) et (**), $\widetilde{u} = u \otimes Id_G$ l'opérateur de $E \otimes G$ dans $F \hat{\otimes}_\alpha G$. Etant donnée une probabilité G-cylindrique λ sur $E \otimes G$, nous chercherons à savoir si son image $\widetilde{u}(\lambda)$ "est de Radon" sur $F \hat{\otimes}_\alpha G$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Séminaire L. SCHWARTZ 1969-1970.

****