SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. FARAHAT

Espaces de Banach contenant l^1, d'après H. P. Rosenthal

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 26, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A26_0>

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

ESPACES DE BANACH CONTENANT ℓ^1, D'APRES H.P. ROSENTHAL

par J. FARAHAT

Exposé n° XXVI   5 Juin 1974

Définition : Soit S un ensemble, (A_n,B_n) $n\in\mathbb{N}$ une suite de sous-ensembles de S vérifiant $A_n\cap B_n=\emptyset$ et X un sous-ensemble de S.
On dira que (A_n,B_n) converge sur X si pour tout $x\in X$, x appartient à un nombre fini de A_n ou x appartient a un nombre fini de B_n (c'est-à-dire $\lim 1_{A_n}(x)=0$ ou $\lim 1_{B_n}(x)=0$).
Lorsque $X=S$, on dit simplement que (A_n,B_n) converge.

Définition : La suite (A_n,B_n) $n\in\mathbb{N}$ est Booleenement indépendante si pour tous sous-ensembles finis disjoints K et L de $\mathbb{N}$, on a

$$\left(\bigcap_{n\in K} A_n\right)\cap\left(\bigcap_{n\in L} B_n\right)\neq\emptyset .$$

Notation : On note $\mathcal{P}_\infty(X)$ l'ensemble des parties de X de cardinal infini (identifié à une partie de $\{0,1\}^X$).

Définition : Soit $\mathcal{X}\subset\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$. $\mathcal{X}$ est dit Ramsey s'il vérifie :

$$\forall X\in\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}),\ \exists\, Y\in P_\infty(X) \text{ tel que } \quad P_\infty(Y)\subset\mathcal{X} \text{ ou } P_\infty(Y)\subset\complement\mathcal{X} .$$

Théorème 1 : (Silver) Soit $\mathcal{X}\subset P_\infty(\mathbb{N})$, $\mathcal{X}$ analytique pour la topologie produit sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$; alors $\mathcal{X}$ est Ramsey.
(En réalité nous n'avons besoin que du théorème de Williams qui énonce le même résultat pour $\mathcal{X}$ ouvert).

Théorème 2 : (Rosenthal) Soit (A_n,B_n) une suite de sous-ensembles de S telle que, pour tout n, $A_n\cap B_n=\emptyset$.
Si (A_n,B_n) n'admet pas de sous-suite convergente, il existe une sous-suite (A_n,B_n) $n\in M$ booleenement indépendante.

Démonstration : Nous poserons $\varepsilon_n A_n = A_n$ si $\varepsilon_n=+1$,

et $\varepsilon_n A_n = B_n$ si $\varepsilon_n=-1$.

Soit $p_o\in\mathbb{N}$. Nous définirons un ensemble $F_{p_o}\subset\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ de la façon suivante soit $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, et soit (n_j) la suite des éléments de M rangée en ordre croissant. Nous dirons que $M \in F_{p_o}$ si :

$$\bigcap_{p=1}^{p_o} (-1)^p A_{n_p} \neq \emptyset .$$

L'ensemble F_{p_o} est ouvert.

En effet, si $M = \{n_1, n_2, \dots\} \in F_{p_o}$, le voisinage V_M de M défini par :

$$V_M = \{ M' \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \; ; \; \forall\, m \leq n_{p_o} , \; m \in M' \Leftrightarrow m \in M \}$$

vérifie $V_M \subset F_{p_o}$.

On voit pour la même raison que $\complement F_{p_o}$ est ouvert, donc F_{p_o} est aussi fermé. Posons

$$\mathcal{X} = \bigcap_{n \geq 1} F_n .$$

C'est un fermé, donc un ensemble de Ramsey (théorème de Silver ou de Williams). Par conséquent :

$$\exists\, M_o \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) , \qquad \mathcal{P}_\infty(M_o) \subset \mathcal{X} \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_\infty(M_o) \subset \complement \mathcal{X}$$

Mais, puisque par hypothèse (A_n, B_n) n'admet pas de sous-suite convergente, on peut trouver un point $x_o \in S$ tel que :

$$\{n \in M_o \; ; \; x_o \in A_n\} \quad \text{et} \quad \{n \in M_o \; ; \; x_o \in B_n\}$$

soient deux ensembles infinis.

On peut donc déterminer une sous-suite (n_j), formée d'éléments de M_o, et telle que :

$$\forall\, j \geq 1 , \quad x_o \in \varepsilon_j A_{n_j} .$$

On voit alors que le sous-ensemble infini M' de M_o formé des éléments (n_j) appartient à $\mathcal{X}$. D'après la propriété de M_o, on aura donc nécessairement :

$$\mathcal{P}_\infty(M_o) \subset \mathcal{X}.$$

Rangeons les éléments de M_o dans une suite croissante $(n_p)_{p\geq 1}$, et posons :

$$M_1 = \{n_2, n_4, n_6, \ldots, n_{2p}, \ldots\} .$$

Nous allons montrer que la sous-suite $(A_n, B_n)_{n\in M_1}$ est Booleenement indépendante.

En effet, on va montrer que

$$\forall\, p,\ \forall\, (\varepsilon_i)_{1\leq i\leq p} \quad , \quad \bigcap_{i=1}^{p} \varepsilon_i\, A_{n_{2i}} \neq 0 .$$

Soit (ε_i) $i=1$ à p donné.

Considérons M_3 défini par

$$\begin{array}{ll} n_1 \in M_3 & \text{si } \varepsilon_1 = +1 \\ n_1 \notin M_3 & \text{si } \varepsilon_1 = -1 \\ n_{2i} \in M_3 & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ n_{2i+1} \in M_3 & \text{si } \varepsilon_i\, \varepsilon_{i+1} = +1 \quad 1 \leq i \leq p \\ n_{2i+1} \notin M_3 & \text{si } \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = -1 \\ n_j \in M_3 & j > 2p . \end{array}$$

Alors $M_3 \in \mathcal{P}_\infty(M_o)$, donc si $M_3 = \{m_1, m_2, \ldots\}$

$$\bigcap_{i=1}^{2p} (-1)^i A_{m_i} \neq \emptyset .$$

Mais par construction

$$\bigcap_{i=1}^{p} \varepsilon_i\, A_{n_{2i}} \supset \bigcap_{i=1 \text{ à } 2p} (-1)^i A_{m_i} \neq \emptyset .$$

C.Q.F.D.

Théorème 3 : Soit S un convexe symétrique d'un espace vectoriel. Soit (j_n) une suite de fonctions affines uniformément bornées $\in \mathbb{C}^S$. Alors il existe une sous-suite vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

i) f_{n_i} converge simplement.

ii) f_{n_i} est équivalente à la base canonique de ℓ_1 si l'on munit $\mathbb{C}^S$ de la norme sup.

Démonstration : Supposons que (f_n) n'admet pas de sous-suite convergente. Soient $\mathcal{D} = \{(D_1,D_2)$; des disques ouverts de centre et de rayon rationnels vérifiant :

$$\text{diam } D_1 = \text{diam } D_2 < 1/2\ d(D_1,D_2)\}$$

Soit (D_1^k,D_2^k) une énumération de $\mathcal{D}$. Nous allons voir que :

$$(*)\begin{cases} \exists\ k_o \in \mathbb{N} \text{ et } M \subset \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ L \subset M \\ \exists\ s \in S \text{ tel que } (f_n(s))_{n \in L} \text{ a des points d'accumulation dans } D_1^{k_o} \text{ et } D_2^{k_o}. \end{cases}$$

Sinon $\exists\ \mathbb{N} \supset M_1 \supset M_2 \ldots$ tel que $\forall\ k \in \mathbb{N}\ \forall\ s \in S\quad (f_n(s))_{n \in M_K}$ a ses points d'accumulation en dehors de D_1^K ou en dehors de D_2^K.

Choisissons une suite croissante $m_1 < m_2 < \ldots < m_K \ldots$, telle que $m_K \in M_K$.

Posons :

$$L = \{m_i\}.$$

Puisque $(f_n)_{n \in L}$ ne converge pas, on peut trouver p et q, $p \neq q$ tels que :

$$p,q \in \overline{(f_n(s))}.$$

On peut alors trouver un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $p \in D_1^k$, $q \in D_2^k$, ce qui fournit la contradiction cherchée car $(m_i) \in M_K$ pour $i \geq k$.

Alors soit k_o et $M = (n_j)$ tel que $(*)$ soit vérifiée.

Soient α le centre de $\overset{\circ}{D_1^k}$ et β le centre de $\overset{\circ}{D_2^k}$; $2\delta = \text{dist}(\overset{\circ}{D_1^k}, \overset{\circ}{D_2^k})$.
En multipliant tous les f_n par $\frac{|\beta-\alpha|}{\beta-\alpha}$, on peut supposer $\beta-\alpha > 0$.

Alors soient $A_p = \{ s \; ; \; f_{n_p}(s) \in \overset{\circ}{D_1^K} \}$ et $B_p = \{ s \; ; \; f_{n_p}(s) \in \overset{\circ}{D_2^K} \}$.

D'après le théorème 2, il existe un sous-ensemble $L \subset M$ tel que $(A_n, B_n \; ;$ $n \in L$ est Booleenement indépendante.

Il nous reste à montrer que la sous-suite $(f_n)_{n\in L}$ est équivalente à la base canonique de ℓ_1.

Il suffit de montrer que $\| \Sigma \, c_K \, f_K \| > \frac{\delta}{4} \Sigma \, |c_K|$, pour toute suite $c_K = a_K + ib_K$ de nombres complexes.

On peut supposer $\Sigma \, |a_K| \geq \Sigma \, |b_K|$.

Soit $s \in \bigcap_{a_K \geq 0} B_K \cap \bigcap_{a_K < 0} A_K$ et soit $t \in \bigcap_{a_K \geq 0} A_K \cap \bigcap_{a_K < 0} B_K$

$$\begin{aligned}
\| \Sigma \, c_K \, f_K \| &\geq \text{Re} \; \Sigma \, c_K \, f_K \left(\tfrac{s-t}{2}\right) \\
&\geq \Sigma \, a_K \; \text{Re} \, f_K \left(\tfrac{s-t}{2}\right) - \Sigma \, \left| b_K \, \text{Im} \, f_K \left(\tfrac{s-t}{2}\right) \right| \\
&\geq \delta \, \Sigma \, |a_K| - \frac{\delta}{2} \Sigma \, |b_K| \\
&\geq \frac{\delta}{2} \Sigma \, |a_K| \\
&\geq \frac{\delta}{4} \Sigma \, |c_K| \, .
\end{aligned}$$

car $u \in \overset{\circ}{D_1^K}$, $v \in \overset{\circ}{D_2^K}$ $\Rightarrow$ Re $(v-u) \geq 2\delta$, Im $(v-u) \leq \text{diam} \, \overset{\circ}{D_1^K} < \delta$.)

<u>Corollaire</u> : Soit (x_n) une suite bornée dans un Banach E.
Il existe alors une sous-suite (x'_n) qui vérifie l'une des deux conditions suivantes :

i) (x'_n) est de Cauchy faible,

ii) (x'_n) est équivalente à la base de ℓ_1.

En effet, on identifie (x_n) à une suite de fonctions affines uniformément bornées sur $B_{E'}$: $x_n(f) = f(x_n)$, $\forall f \in B_{E'}$ et on applique le théorème 3.

Corollaire 2 : Si E est faiblement séquentiellement complet , alors E est réflexif ou E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_1.

En effet, si E ne contient pas ℓ_1 toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente et l'espace est donc réflexif (Eberlein).

Corollaire 3 : Si E a la propriété de Schuur, alors tout sous-espace de dimension infinie contient un sous-espace isomorphe à ℓ_1.

En effet, si M est de dimension infinie, on choisit une suite bornée (x_n) vérifiant $d(x_n ; [x_1,\dots,x_{n-1}]) > 1$.
(x_n) ne peut admettre de sous-suite de Cauchy faible (x_{n_i}), car sinon $(x_{n_{i+1}} - x_{n_i})$ converge faiblement vers 0 donc fortement en contradiction avec $\|x_{n_{i+1}} - x_{n_i}\| \geq 1$.

*
***

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.P. ROSENTHAL : Banach spaces containing ℓ^1 (à paraître).

[2] L.E. DOR : On sequences spanning a complex l^1 space (à paraître).

[3] E.M. KLEINBERG : Infinitary combinatorics . Cambridge summer school in Mathematic logic ; p 361-418 ; Berlin ; Springer Verlag 1973 (Lecture notes in Mathematics 337).

****