

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. T. LAPRESTE

**Sous-espaces l_n^p complétés dans un espace à base
inconditionnelle, d'après L. Tzafriri**

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 19, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A21_0>

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

S O U S - E S P A C E S 1_n^p C O M P L E M E N T E S D A N S U N E S P A C E

A B A S E I N C O N D I T I O N N E L L E , D ' A P R E S L . T Z A F R I R I

par J. T. LAPRESTE

Exposé N° XIX

10 Avril 1974

Donnons dès à présent le résultat principal de cet exposé :

Théorème 1 : Soit X un espace de Banach à base inconditionnelle. Alors, il existe une constante M et une suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de projections de rang n sur X , telles que :

$$1) \quad \sup_n \|P_n\| \leq M .$$

2) Pour au moins un p appartenant à $\{1, 2, \infty\}$

$$d(P_n X, l_p^n) \leq M .$$

Rappelons diverses définitions pour clarifier cet énoncé.

Un espace de Banach X étant donné, une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de vecteurs de X sera dite **basique inconditionnelle** de constante d'inconditionnalité K , si pour toute partie finie J de \mathbf{N} , on a :

$$\left\| \sum_{\substack{i \in J \\ i \leq n}} t_i X_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i \leq n} t_i X_i \right\| ,$$

et cela pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et toute famille de scalaires $(t_i)_{i \leq n}$.

D'autre part, une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments non nuls sera dite **basique monotone (à droite)** si pour tous entiers n, p :

$$\left\| \sum_1^n t_i X_i \right\| \leq \left\| \sum_1^{n+p} t_i X_i \right\| ,$$

pour toute suite de scalaires $(t_i)_{i \leq n+p}$.

Remarquons que le théorème 1 n'est pas un énoncé presque isométrique (hélas !) et que nous pourrions toujours remplacer la norme initiale sur X par une norme équivalente "judicieuse", au cours de la démonstration.

Nous supposons (et c'est possible en toute généralité) que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base (resp. une base inconditionnelle) dans X , la norme dans X en fait une suite monotone (resp. une base inconditionnelle de constante $K=1$), (cf. par exemple *Singer Bases in Banach spaces*, Springer Verlag).

Soit donc X un espace de Banach muni d'une base monotone normalisée (pour tout $n \quad \|x_n\| = 1$), alors une modification aisée de l'argument de Brunel (exposé XV) donne le résultat suivant :

Proposition 1 : Pour tout ε positif, il existe une suite croissante de réels positifs $(\lambda(j))_{j \in \mathbb{N}}$ et une sous suite basique de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, soit $z_j = x_{k_j}$ telle que :

$$0 \leq \lambda(j) - \|z_{k_1} + z_{k_2} + \dots + z_{k_j}\| \leq \varepsilon ,$$

pour toute suite d'entiers (k_1, \dots, k_j) telle que $j < k_1 < \dots < k_j$.

□ D'après le théorème de Brunel-Sucheston, exposé XV, proposition 1, il existe une suite (e_n) extraite de (x_n) et une suite de réels $L(j)$ tels que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists v \in \mathbb{N}, v < n_1 < n_2 < \dots < n_j \Rightarrow \left| \left\| \sum_{i=1}^j e_{n_i} \right\| - L(j) \right| \leq \varepsilon .$$

La base (x_n) étant monotone, on voit immédiatement que la suite $(L(j))$ est croissante. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On peut trouver une suite (v_j) , que l'on peut supposer croissante, telle que :

$$v_j < n_1 < \dots < n_j \quad \Rightarrow \quad \left| \left\| \sum_{i=1}^j e_{n_i} \right\| - L(j) \right| \leq \varepsilon/2 .$$

La sous suite $z_j = e_{v_j}$ convient alors, en posant $\lambda(j) = L(j) + \varepsilon/2$. ■

Proposition 2 : Fixons $0 < \varepsilon < 1$ dans la proposition 1 et soient $(\lambda(j))_{j \in \mathbb{N}}$ et $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$, les deux suites définies plus haut.

Supposons l'existence d'un entier h strictement supérieur à 1, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda(hn) \geq (1 + \varepsilon) \lambda(n) .$$

Alors il existe une constante A et un réel q tels que :

$$\frac{\left\| \sum_{j=1}^n a_j z_{m+K_j} \right\|}{\lambda(n)} \leq A \frac{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^q \right)^{1/q}}{n^{1/q}} ,$$

cela pour $n \in \mathbb{N}$, $m > n$; $0 < K_1 < K_2 < \dots < K_n$ et pour toute famille $(a_i)_{i \leq n}$ de scalaires.

□ Choisissons tout d'abord un nombre réel r tel que l'on ait $1 < h^{1/r} \leq 1 + \varepsilon$.
On aura :

$$\lambda(hn) \geq h^{1/r} \lambda(n)$$

et donc :

$$\lambda(h^s n) \geq (h^s)^{1/r} \lambda(n)$$

pour tout entier s . On en déduit immédiatement, si α et β sont deux entiers tels que $\alpha \geq \beta$:

$$\frac{\lambda(\alpha)}{\lambda(\beta)} \geq h^{-1/r} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/r} .$$

(Considérer un entier s tel que $h^s \beta \leq \alpha < h^{s+1} \beta$).

Fixons à présent $n < m$, et $k_1 < k_2 < \dots < k_n$.

Alors pour toute suite $(a_i)_{i \leq n}$ de scalaires, on peut écrire :

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j z_{m+K_j} \right\| \leq \sum_{s=1}^4 \left\| \sum_{j=1}^n b_j^{(s)} z_{m+K_j} \right\|$$

où $a_j = (b_j^{(1)} - b_j^{(2)}) + i(b_j^{(3)} - b_j^{(4)})$, $1 \leq j \leq n$, et $0 \leq b_j^{(s)} \leq |a_j|$, $s = 1, 2, 3, 4$;

$j = 1, \dots, n.$

Soient donc $\sum_{j=1}^n b_j z_{m+K_j}$ une des quatre sommes avec $0 \leq b_j \leq |a_j|$, et π

une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que :

$$b_{\pi(1)} \geq b_{\pi(2)} \geq \dots \geq b_{\pi(n)} .$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n b_j z_{m+K_j} \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^n b_{\pi(j)} z_{m+K_{\pi(j)}} \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} (b_{\pi(j)} - b_{\pi(j+1)}) \left\| \sum_{j=1}^j z_{m+K_{\pi(j)}} \right\| + \\ &\quad + b_{\pi(n)} \left\| \sum_{j=1}^n z_{m+K_j} \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} (b_{\pi(j)} - b_{\pi(j+1)}) \lambda(j) + b_{\pi(n)} \lambda(n) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } [\lambda(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^n b_j z_{m+K_j} \right\| &\leq h^{1/r} \left[\sum_{j=1}^{n-1} (b_{\pi(j)} - b_{\pi(j+1)}) \left(\frac{j}{n}\right)^{1/r} + b_{\pi(n)} \right] \\ &\leq h^{1/r} \sum_{j=1}^n b_{\pi(j)} \left[\left(\frac{j}{n}\right)^{1/r} - \frac{j-1}{n}^{1/r} \right] . \end{aligned}$$

Soit r' tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

En remarquant que l'on a $j^{1/r} - (j-1)^{1/r} \leq j^{-1/r'}$, puis en appliquant l'inégalité de Hölder à un couple conjugué (q, q') , $q > r$, on a successivement

$$\begin{aligned} [\lambda(n)] \left\| \sum_{j=1}^n b_j z_{m+K_j} \right\| &\leq \frac{h^{1/r}}{n^{1/r}} \sum_{j=1}^n \frac{b_{\pi(j)}}{j^{1/r'}} \\ &\leq \frac{h^{1/r}}{n^{1/r}} \left[\sum_{j=1}^n |b_{\pi(j)}|^q \right]^{1/q} \left[\sum_{j=1}^n j^{-q'/r'} \right]^{1/q'} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{h^{1/r}}{n^{1/r}} \left[\sum_{j=1}^n |a_j|^q \right]^{1/q} n^{\frac{1}{q'} - \frac{1}{r}} \left(1 - \frac{q'}{r}\right)^{-1/q'}$$

(cette dernière inégalité obtenue en intégrant $X \rightarrow X^{-q'/r'}$ de 0 à n)

$$\leq \frac{h^{1/r}}{n^{1/q}} \left(1 - \frac{q'}{r}\right)^{-1/q'} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^q \right)^{1/q}$$

et enfin

$$[\lambda(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^n a_j z_{m+K_j} \right\| \leq 4 h^{1/r} \left(1 - \frac{q'}{r}\right)^{-1/q'} \frac{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^q \right)^{1/q}}{n^{1/q}}$$

ce qui est le résultat désiré avec $A \geq 4 h \left(1 - \frac{q'}{r}\right)^{-1/q'}$. ■

Proposition 3 : Soit V un espace vectoriel de dimension 2^n engendré par $(v_1, v_2, \dots, v_{2^n})$. S'il existe une constante K et un réel $p \geq 2$ tels que :

$$K^{-1} 2^{-n/p'} \left[\sum_{j=1}^{2^n} |a_j|^{p'} \right]^{1/p'} \leq \frac{\left\| \sum_{j=1}^{2^n} a_j v_j \right\|}{\left\| \sum_{j=1}^{2^n} v_j \right\|} \leq K 2^{-n/p} \left[\sum_{j=1}^{2^n} |a_j|^p \right]^{1/p},$$

pour toute famille $(a_j)_{j=1,2,\dots,2^n}$ de scalaires $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$; il existe une constante M ne dépendant que de K et p (i.e. indépendante de V et n) et une projection P de V dans lui-même telle que $\|P\| \leq M$ et $d(PV, 1_2^n) \leq M$.

□ Soit $r_n(t)$ la $n^{\text{ième}}$ fonction de Rademacher sur $[0,1]$ (i.e. $r_n(t) = \text{sgn}(\sin(2^n \pi t))$) ; posons :

$$\varepsilon_k^{(j)} = r_k \left(\frac{j-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

On a évidemment pour $K \leq n$:

$$r_K = \sum_{j=1}^{2^n} \varepsilon_K^j \mathbb{1}_{\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]}$$

Considérons $w_K = \sum_{j=1}^{2^n} \varepsilon_K^j v_j$; suivant la terminologie classique, nous appellerons $(w_K)_{K=1,2,\dots,n}$ le système de Rademacher associé à $(v_j)_{j=1,\dots,2^n}$ dans V .

A présent, par l'inégalité bien connue de Khintchin, il existe pour tout réel $r \geq 1$ une constante K_r telle que :

$$K_r^{-1} (\sum |a_K|^2)^{1/2} \leq \left\| \sum_{K=1}^n a_K r_K \right\|_r \leq K_r (\sum |a_K|^2)^{1/2}$$

pour toute famille $(a_K)_{K=1,\dots,n}$ de scalaires. ($\|F\|_r$ désigne ici la norme dans $L^r([0,1], dt)$ de la fonction F).

Par conséquent, on a successivement :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{K=1}^n a_K w_K \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^n a_K \sum_{j=1}^{2^n} \varepsilon_K^{(j)} v_j \right\|, \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{2^n} \left(\sum_{K=1}^n a_K \varepsilon_K^{(j)} \right) v_j \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^{2^n} v_j \right\| K \cdot 2^{-n/p} \left[\sum_{j=1}^{2^n} \left| \sum_{n=1}^n a_K \varepsilon_K^{(j)} \right|^p \right]^{1/p} \end{aligned}$$

par hypothèse

$$\leq \left\| \sum_{j=1}^{2^n} v_j \right\| K \left\| \sum_{K=1}^n a_K r_K \right\|_p$$

d'après la définition des fonctions de Rademacher

$$\leq \left\| \sum_{j=1}^{2^n} v_j \right\| K K_p \left(\sum_{K=1}^n |a_K|^2 \right)^{1/2}$$

par l'inégalité de Khintchin.

De même, on voit facilement que l'on a :

$$\left\| \sum_{j=1}^{2^n} v_j \right\| K^{-1} K_{p'}^{-1} \left(\sum_{K=1}^n |a_K|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{K=1}^n a_K w_K \right\| ;$$

ce qui montre que $d(W, l_2^n) \leq K^2 K_p K_{p'}$, si $W = [(w_K)_{K=1, \dots, n}]$.

D'autre part, soit Q la projection orthogonale de $L^2([0, 1], dt)$ sur $[r_1, r_2, \dots, r_n]$. On sait que Q est alors une projection continue dans tous les $L^r([0, 1], dt)$ $1 < r < +\infty$ et que la norme $\|Q\|_r$ dans $L^r([0, 1], dt)$ est majorée par une constante indépendante de n .

$$\text{Si } Q \left(\sum_{j=1}^{2^n} a_j 1_{\left] \frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right]} \right) = \sum_{K=1}^n b_K r_K, \text{ alors posons :}$$

$$P \left(\sum_{j=1}^{2^n} a_j v_j \right) = \sum_{K=1}^n b_K w_K ;$$

il est alors facile de voir que P est une projection de V sur W .

De plus

$$\begin{aligned} \left\| P \left(\sum_{j=1}^{2^n} a_j v_j \right) \right\| &= \left\| \sum_{K=1}^n b_K w_K \right\| \\ &\leq K K_p \left\| \sum_{j=1}^{2^n} v_j \right\| \left(\sum_{K=1}^n |b_K|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq K K_p K_{p'} \left\| \sum_{j=1}^{2^n} v_j \right\| \left\| \sum_{K=1}^n b_K r_K \right\|_{p'} \\ &\leq K K_p K_{p'} \|Q\|_{p'} \left\| \sum_{j=1}^{2^n} v_j \right\| 2^{-n/p'} \left(\sum_{j=1}^{2^n} |a_j|^{p'} \right)^{1/p'} \\ &\leq K^2 K_p K_{p'} \|Q\|_{p'} \left\| \sum_{j=1}^{2^n} a_j v_j \right\| ; \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat avec $M = \|Q\|_{p'} K^2 K_p K_{p'}$. ■

Nous sommes à présent en mesure d'attaquer la démonstration du théorème 1.

Soit donc $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ base inconditionnelle normalisée d'un espace de Banach X , base dont on pourra sans restreindre la généralité supposer la constante d'inconditionnalité égale à 1, et soit $0 < \varepsilon < 1$.

Par la proposition 1, on associe à $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et à sa suite biorthogonale $(X_n^*)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites croissantes de réels $(\lambda(j))_{j \in \mathbf{N}}$, $(\mu(j))_{j \in \mathbf{N}}$ et deux sous suites $z_i = X_{n_i}$, $z_i^* = X_{n_i}^*$, $i \in \mathbf{N}$.

$$0 < \lambda(j) - \|z_{K_1} + z_{K_2} + \dots + z_{K_j}\| < \varepsilon$$

$$0 < \mu(j) - \|z_{K_1}^* + z_{K_2}^* + \dots + z_{K_j}^*\| < \varepsilon$$

pour toutes familles d'indices telles que :

$$j < K_1 < K_2 < \dots < K_j, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Nous allons à présent distinguer 3 cas.

Cas I : Pour tout entier $h > 1$, il existe un entier $n = n(h)$ tel que $\lambda(hn) < (1+\varepsilon)\lambda(n)$.

Fixons h et $n = n(h)$; posons

$$u_K = [\lambda(n)]^{-1} \left(\sum_{j=1}^n z_{hn+(K-1)n+j} \right), \quad K = 1, \dots, h.$$

On a :

$$\begin{aligned} \|u_K\| &= [\lambda(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^n z_{hn+(K-1)n+j} \right\| \\ &\geq \frac{\lambda(n) - \varepsilon}{\lambda(n)} \\ &\geq 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \\ &\geq \frac{1}{1+\varepsilon} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, pour toute famille $(a_i)_{i=1, \dots, n}$ de scalaires :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| &\leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i u_i \right\| \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\| \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| [\lambda(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{hn} z_{n+j} \right\| \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \frac{\lambda(hn)}{\lambda(n)} \\
 &\leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|
 \end{aligned}$$

ce qui montre que $d(F_n, l_\infty^h) \leq 4$ si F_h désigne $[(u_i)_{1 \leq i \leq h}]$. Comme l_∞ est un P_1 espace il existe alors automatiquement une projection P telle que

$$PX = F_h \text{ et } \|P\| \leq 4 .$$

Cas II : Pour tout entier h il existe un entier $n(h) = n$ tel que

$$\mu(hn) < (1+\varepsilon) \mu(n) .$$

Par le même argument que dans le cas I, on construit alors une famille (y_1^*, \dots, y_h^*) de vecteurs de X' à supports disjoints (sur $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$) et tels que

$$\frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^h a_i y_i^* \right\| \leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| .$$

Soient y_i , $i = 1, \dots, h$ des vecteurs de X tels que

$$1) \quad \|y_i\| = 1,$$

$$2) \quad 2 \geq \langle y_i^*, y_i \rangle \geq \frac{1}{2},$$

et tels que le support de y_i soit contenu dans celui de y_i^* .

Alors :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n b_i y_i \right\| &\leq \sum_{i=1}^n |b_i| \\ &\leq 2 \left\langle \left[\sum_{i=1}^h \operatorname{sgn}(b_i) y_i^* \right], \left[\sum_{i=1}^h b_i y_i \right] \right\rangle \\ &\leq 4 \left\| \sum_{i=1}^h b_i y_i \right\|. \end{aligned}$$

Définissons ensuite

$$P_h(X) = \sum_{i=1}^h \frac{\langle y_i^*, X \rangle}{\langle y_i^*, y_i \rangle} y_i.$$

On vérifie facilement que P_h est une projection de X sur G_h , où $G_h = [(y_i)_{1 \leq i \leq h}]$; et

$$\begin{aligned} \|P_h(X)\| &\leq \sum_{i=1}^h \frac{|\langle y_i^*, X \rangle|}{\langle y_i^*, y_i \rangle} \\ &= \sum_{i=1}^h \frac{\operatorname{sgn}(\langle y_i^*, X \rangle)}{\langle y_i^*, y_i \rangle} \langle y_i^*, X \rangle \end{aligned}$$

$$\leq 4 \|X\|$$

$$\text{i.e.} \quad \|P_h\| \leq 4.$$

Cas III : Supposons que nous ne sommes dans aucun des cas I et II ; alors la proposition 2 s'applique à la fois à X et X' et on obtient une constante $B > 1$ et un réel $p > 2$ avec simultanément :

$$[\lambda(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^n a_j z_{n+j} \right\| \leq B n^{-1/p} \left[\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right]^{1/p} \quad (*)$$

$$[\mu(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^n a_j z_{n+j}^* \right\| \leq B n^{-1/p} \left[\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right]^{1/p} \quad (**)$$

pour tout entier n , et toute famille $(a_j)_{j=1, \dots, n}$ de scalaires.

Si nous réussissons à trouver une constante K indépendante de n telle que l'on ait :

$$\mu(n) \lambda(n) \leq K n ,$$

alors si p' est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on aura :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n a_j z_{n+j} \right\| &\geq \frac{\sum_{j=1}^n |a_j|^{p'}}{\left\| \sum_{j=1}^n |a_j|^{p'-1} \operatorname{sgn}(a_j) z_{n+j}^* \right\|} \\ &\geq B^{-1} \left[\sum_{j=1}^n |a_j|^{p'} \right] \frac{n^{1/p}}{\mu(n) \left[\sum_{j=1}^n |a_j|^{(p'-1)p} \right]^{1/p}} \\ &\geq B^{-1} K^{-1} \lambda(n) n^{-1/p'} \left[\sum_{j=1}^n |a_j|^{p'} \right]^{1/p'} ; \end{aligned}$$

et une application de la proposition 3 achèvera la démonstration puisque B, K, p seront indépendants de n .

Démontrons donc le

Lemme : Dans les conditions du cas III, il existe une constante C indépendante de n , tel que $\mu(n) \lambda(n) \leq Cn$ pour tout entier naturel n .

Fixons n et soit $z_0 = \sum_{j=1}^n b_j z_{n+j}$ un vecteur de X tel que

$$1) \quad \|z_0\| = 1 ,$$

$$2) \quad \left\| \sum_{j=1}^n z_{n+j}^* \right\| = \sum_{j=1}^n b_j .$$

Cette construction est toujours possible en remarquant que

$$\left\| \sum_{j=1}^n z_{n+j}^* \right\| = \sup \{ \langle \sum_{j=1}^n z_{n+j}^*, z \rangle , z \in [(z_{n+j})_{i \leq j \leq n}], \|z\| \leq 1 \} .$$

Evidemment, alors on peut choisir un z_0 de norme 1 réalisant la borne supérieure (en profitant du fait que $[(z_{n+j})_{i \leq j \leq n}]$ est de dimension finie).

On a

$$z_0 = \sum_{j=1}^n b_j z_{n+j}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n z_{n+j}^* \right\| &= \langle \sum_{j=1}^n z_{n+j}^*, z_0 \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n b_j . \end{aligned}$$

Considérons l'ensemble

$$\Theta_C = \left\{ j : 1 \leq j \leq n ; |b_j| \geq \frac{8C}{\lambda(n)} \right\} ,$$

en nous réservant le droit de prendre l'entier C assez grand et soit

$$s = \text{card } \Theta_C .$$

L'inégalité

$$\begin{aligned}
 1 = \|z_0\| &\geq \left\| \sum_{j \in \Theta_C} |b_j| z_{n+j} \right\| \\
 &\geq \frac{8C}{\lambda(n)} \left\| \sum_{j \in \Theta_C} z_{n+j} \right\| \\
 &\geq \frac{8C}{\lambda(n)} \frac{\lambda(s)}{2} \\
 &\geq 4C \frac{\lambda(s)}{\lambda(n)} ,
 \end{aligned}$$

implique que $n > Cs$.

Sinon, en effet, $n \leq Cs$ et

$$\begin{aligned}
 \lambda(n) &\leq 2 \left\| \sum_{j=1}^n z_{Cs+j} \right\| \\
 &\leq 2 \left\| \sum_{j=1}^{Cs} z_{Cs+j} \right\|
 \end{aligned}$$

$\leq 2C\lambda(s)$, ce qui est une contradiction.

On a donc $\frac{s}{n} < \frac{1}{C}$ et par (**):

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu(s)}{\mu(n)} &\leq 2 [\mu(n)]^{-1} \left\| \sum_{j=1}^s z_{n+j}^* \right\| \\
 &\leq 2B [\mu(n)]^{-1} \mu(n) n^{-1/p} s^{1/p} \\
 &\leq 2B C^{-1/p} .
 \end{aligned}$$

Si l'on prend $C \geq (8B)^p$, on a alors :

$$\mu(s) \leq \frac{1}{4} \mu(n) ;$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mu(n) &\leq 2 \left\| \sum_{j=1}^n z_{n+j}^* \right\| \\
&\leq 2 \left(\sum_1^n b_j \right) \\
&\leq 2 \left(\sum_{j \in \Theta_C} b_j \right) + 2 \frac{8C}{\lambda(n)} n \\
&\leq 16 C \frac{n}{\lambda(n)} + 2 \left\langle \sum_{j \in \Theta_C} z_{n+j}^*, z_0 \right\rangle \\
&\leq 16 C \frac{n}{\lambda(n)} + 2 \mu(s) \\
&\leq 16 C \frac{n}{\lambda(n)} + \frac{\mu(n)}{2} .
\end{aligned}$$

D'où $\lambda(n) \mu(n) \leq 32 C n$, ce qui achève la démonstration du lemme et du théorème 1.

Brunel a démontré sans le dire explicitement (exposé XV) le théorème suivant.

Théorème 2 : Soit E un espace de Banach, alors il existe un autre espace de Banach F finiment représentable dans E et possédant une base inconditionnelle.

Ce théorème, joint à la remarque que $l_{2^n}^\infty$ contient une copie isométrique de l_n^1 (le système de Rademacher associé à la base canonique, et que l_N^1 contient une copie K -isométrique de l_n^2 , démontre le théorème suivant qui est une version faible de celui de Dvoretzky.

Théorème 3 : Pour tout espace de Banach E , il existe une constante K et une famille F_n de sous-espaces de E , $\dim F_n = n$ tels que $d(F_n, l_2^n) < K$.

Achevons cet exposé en remarquant que les versions infinies du théorème 1 et du théorème 3 sont fausses toutes deux.

$l^2(l_n^1)$ contient des l_n^1 1-complémentés et est réflexif, donc ne peut contenir l_1 ; son dual $l^2(l_n^\infty)$ possède la même propriété vis à vis de l_n^∞ . Pour trouver enfin des l_n^2 1-complémentés sans pour autant avoir l_2 , il suffit de prendre $l^1(l_n^2)$ qui est un espace dont tout sous-espace de dimension infinie contient l_1 .

*
*
*

BIBLIOGRAPHIE

I. SINGER : Bases in Banach spaces , Springer Verlag.
