B. MAUREY

Applications Λ_p-sommantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 10, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A12_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

APPLICATIONS Λ_p-SOMMANTES

par B. MAUREY

Exposé N° X

16 Janvier 1974

Si $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ est un espace mesuré (la mesure μ n'étant pas nécessairement finie) et si f est une fonction réelle μ-mesurable, nous poserons :

$$\Lambda_p(f,\mu) = \sup_{c>0} c\,(\mu\{|f|>c\})^{1/p} , \quad p \in]0,+\infty[.$$

On notera $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables réelles f telles que $\Lambda_p(f,\mu) < \infty$.

Par exemple, lorsque $\Omega = \mathbb{N}$, $\mu = \Sigma\, \delta_n$, l'espace Λ_p associé est un espace de suites numériques que nous noterons λ_p. On vérifie immédiatement qu'une suite numérique (c_n) appartient à λ_p si et seulement si :

$$\sup_n n^{1/p} \, |c_n|^* < \infty ,$$

où $|c_n|^*$ désigne la suite réarrangée décroissante associée à la suite $(|c_n|)$.

Dans tous les cas (c'est-à-dire indépendamment de la masse de μ), l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ est contenu dans $\Lambda_p(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ et $\Lambda_p(f,\mu) \leq \|f\|_{L^p}$.

Lorsque μ est une probabilité, et $p < q$, on a

$$\Lambda_q(\Omega, \mathcal{C}, \mu) \subset L^p(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$$

avec plus précisément :

$$\|f\|_{L^p} \leq \left(\frac{q}{q-p}\right)^{1/p} \Lambda_q(f,\mu) .$$

(Au contraire, on a $\lambda_q \subset l^p$ lorsque $q < p$).

Dans la suite, nous désignerons par J(t) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$J(t) = 0 \text{ si } |t| \leq 1, \quad J(t) = 1 \text{ si } |t| > 1 .$$

En utilisant J, on peut écrire :

$$\Lambda_p(f,\mu) = \sup_{c>0} c \left(\int J\left(\frac{f}{c}\right) d\mu\right)^{1/p} .$$

1. Applications Λ_p-sommantes.

Si E est un espace de Banach, (x_i) une suite d'éléments de E et $p \in]0,+\infty[$, on posera :

$$\lambda_p^*((x_i)) = \sup \{c \left(\sum_i J\left(\frac{|<x_i,\xi>|}{c}\right)\right)^{1/p} \quad ; \quad c>0, \quad \|\xi\|_{E'} \leq 1\}.$$

Nous dirons que la suite est scalairement λ_p si $\lambda_p^*((x_i))$ est fini. On posera par ailleurs, si (y_i) est une suite d'éléments d'un espace quasi-normé F :

$$\lambda_p((y_i)) = \lambda_p(\|y_i\|) .$$

Nous dirons qu'un opérateur linéaire continu u d'un espace de Banach E dans un espace quasi-normé F est λ_p-sommant, $0<p<+\infty$, s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E :

$$\lambda_p((u(x_i))) \leq C \ \lambda_p^*((x_i)).$$

La plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée sera notée $\pi\lambda_p(u)$. On notera $\Pi\Lambda_p(E,F)$ l'espace des opérateurs λ_p-sommants de E dans F.

Nous allons donner un exemple simple, mais important:

<u>Proposition 1</u> : Soit α un opérateur diagonal de l^∞ dans c_o, défini par une suite $\alpha \in l^p$, $0<p<\infty$.
L'opérateur α est λ_p-sommant, avec :

$$\pi\lambda_p(u) \leq (\sum |\alpha_i|^p)^{1/p} .$$

<u>Démonstration</u> : Soit (x_i) une suite d'éléments de l^∞. Nous noterons $x_i(n)$ la nième coordonnée de x_i, et (e_n) la base canonique de l^1 $(x_i(n) = \langle x_i, e_n \rangle)$.

Soit $c > 0$ donné. On a :

$$c^p \sum_i J\left(\frac{\|\alpha(x_i)\|}{c}\right) = c^p \operatorname{Card}\{i \,;\, \sup_n |\alpha_n \, x_i(n)| > c\}$$

$$\leq c^p \sum_n \operatorname{Card}\{i \,;\, |\alpha_n \, x_i(n)| > c\}$$

$$= c^p \sum_n \operatorname{Card}\{i \,;\, |\langle x_i, e_n\rangle| > \frac{c}{|\alpha_n|}\}$$

$$\leq c^p \sum_n \left(\frac{|\alpha_n| \; \lambda_p^*((x_i))}{c}\right)^p$$

$$= \left(\sum_n |\alpha_n|^p\right) \left(\lambda_p^*((x_i))\right)^p ,$$

d'où le résultat.

Comme dans l'exposé n°I, on peut introduire une notion d'opérateur (λ_p, G)-sommant : si E et G sont deux espaces de Banach, et (z_i) une suite d'éléments de $E \otimes G$, on posera :

$$\lambda_{p,G}^*((z_i)) = \sup \{\lambda_p(\xi(z_i)) \;;\; \|\xi\|_{E'} \leq 1\}$$

(noter que $\xi(z_i) \in G$).

Si u est un opérateur linéaire de $E \otimes G$ dans un espace quasi-normé F, on dira que u est (λ_p, G)-sommant s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite (z_i) d'éléments de $E \otimes G$:

$$\lambda_p((u(z_i))) \leq C \, \lambda_{p,G}^*((z_i)) ,$$

et la plus petite constante C sera notée $\pi\lambda_{p,G}(u)$.

On a par la même démonstration que précédemment :

<u>Proposition 1 bis</u> : Soit α un opérateur diagonal de l^∞ dans c_o, défini par une suite $\alpha \in l^p$. L'opérateur $\widetilde{\alpha} = \alpha \otimes \mathrm{Id}$ est (λ_p, G)-sommant de $l^\infty \otimes G$ dans $c_o(G)$, avec :

$$\pi\lambda_{p,G}(\widetilde{\alpha}) \leq (\Sigma\, |\alpha_i|^p)^{1/p} .$$

On a la propriété évidente suivante : si u est (λ_p, G)-sommant de $E \otimes G$ dans F, si u_1 est un opérateur linéaire continu d'un espace de Banach E_1 dans E, et u_2 un opérateur linéaire continu de F dans un espace quasi-normé F_1, $u_2 \circ u \circ \widetilde{u}_1$ (où $\widetilde{u}_1 = u_1 \otimes \mathrm{Id}$) est (λ_p, G)-sommant de $E_1 \otimes G$ dans F_1, avec $\pi\lambda_{p,G}(u_2 \circ u \circ \widetilde{u}_1) \leq \|u_1\|\, \|u_2\|\, \pi\lambda_{p,G}(u)$.

Nous allons maintenant voir comment la propriété d'opérateur (λ_p, G)-sommant se traduit sur les probabilités à support fini.

Si μ est une probabilité sur un espace normé, nous poserons :

$$\Lambda_p(\mu) = \sup_{c > 0} c\, (\mu \{ \|x\| > c\})^{1/p}$$

Si λ est une probabilité cylindrique sur un espace de Banach E, ou λ' une probabilité G-cylindrique sur $E \otimes G$, (cf. exposé n°I), nous poserons :

$$\Lambda_p^*(\lambda) = \sup \{ \Lambda_p(\xi(\lambda)) \; ; \; \|\xi\|_{E'} \leq 1 \}$$

$$\Lambda_{p,G}^*(\lambda') = \sup \{ \Lambda_p(\xi(\lambda)) \; ; \; \|\xi\|_{E'} \leq 1 \} .$$

<u>Proposition 2</u> : Soit u un opérateur (λ_p, G)-sommant de $E \otimes G$ dans F. On a pour toute probabilité λ à support fini sur $E \otimes G$:

$$\Lambda_p(u(\lambda)) \leq \pi\lambda_{p,G}(u)\ \Lambda_{p,G}^*(\lambda) .$$

<u>Démonstration</u> : En utilisant un argument de continuité, on se ramène au cas où $\lambda = \Sigma \lambda_i \delta_{z_i}$, $z_i \in E \otimes G$ et λ_i rationnel. Posons $\lambda_i = \frac{p_i}{q}$, $p_i, q \in \mathbb{N}$:

$$\Lambda_p(u(\lambda)) = \sup_{c > 0} c \left(\sum_i \frac{p_i}{q} J\left(\frac{\|u(z_i)\|}{c}\right)\right)^{1/p}$$

$$= \sup_{d > 0} d \left(\sum_i p_i J\left(\frac{\|u(q^{-1/p} z_i\|}{d}\right)\right)^{1/p} .$$

Si on considère la suite (y_j) dans $E \otimes G$ définie par :

$$\underbrace{q^{-1/p} z_1, \ldots, q^{-1/p} z_1}_{p_1 \text{ fois}}, \underbrace{q^{-1/p} z_2, \ldots, q^{-1/p} z_2}_{p_2 \text{ fois}}, \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on voit que :

$$\Lambda_p(u(\lambda)) = \lambda_p(u(y_j)),$$

et de même :

$$\Lambda^*_{p,G}(\lambda) = \lambda^*_{p,G}(y_j)).$$

On conclut aisément.

2. <u>Sur les égalités</u> $\Pi\Lambda_q = \Pi_p$.

Soient E et G deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^p(\Omega, \mu, G)$, ♦ $0 < p < \infty$. Désignons par λ la probabilité G-cylindrique sur $E \otimes G$ définie par u (exposé n°I, §3). Nous dirons que u est p-approximable s'il existe un filtre (λ_j) de probabilités à support fini sur $E \otimes G$ tel que :

1) $\forall\ \xi_1, \ldots, \xi_n \in E'$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\lambda_j)$ converge vers $(\xi_1, \ldots, \xi_n)(\lambda)$ étroitement sur $\mathbb{R}^n \otimes G$,

2) $\forall\ j$, $\|\lambda_j\|^*_{p,G} \leq \|\lambda\|^*_{p,G} = \|u\|$ (exposé n°II, lemme 1).

♦ μ étant une probabilité.

Lorsque E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, tout opérateur linéaire continu de E' dans $L^p(\Omega,\mu,G)$ est p-approximable. Tout d'abord, d'après un résultat de S. Simmons, le couple (E,E') vérifie l'hypothèse d'approximation métrique au sens de ([2], exposé 5, §4). Cela permet d'approcher λ par des mesures de Radon (λ_j) sur $E\otimes G$, telles que $\|\lambda_j\|_p^* \leq \|\lambda\|_p^*$ pour tout j.

On se ramène ensuite à des mesures à support fini, car le poids Λ_p vérifie la propriété de la proposition (V,5,1) de [2].

Nous utiliserons la propriété suivante, qui sera démontrée dans le prochain exposé : soient p et q tels que $0 < p < q$. Un opérateur (λ_q,G)-sommant est a fortiori (q,G)-sommant, et un opérateur (p,G)-sommant est (λ_q,G)-sommant. Symboliquement :

$$\Pi_{p,G} \subset \Pi\Lambda_{q,G} \subset \Pi_{q,G} .$$

<u>Proposition 3</u> : Soient E et G deux espaces de Banach, p,q tels que $0 < p < q < \infty$, et C une constante.

Considérons les assertions :

a) Pour tout espace quasi-normé F, et pour tout opérateur v $\lambda_{q,G}$-sommant de $E\otimes G$ dans F, on a :

$$\pi_{p,G}(v) \leq C \ \pi\lambda_{q,G}(v) .$$

b) Pour toute suite $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ d'éléments de E', on a :

$$\pi_{p,G}(v_{\xi,G}) \leq C \ (\sum_i \|\xi_i\|^q)^{1/q} ,$$

où $v_{\xi,G}$ désigne l'opérateur de $E\otimes G$ dans $l_n^\infty(G)$ défini par

$$v_{\xi,G}(z) = (< z,\xi_i >)_{i=1,\ldots,n} .$$

c) Pour tout opérateur p-approximable u de E' dans un espace $L^p(\Omega,\mu,G)$♥, et pour toute suite $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ d'éléments de E', on a :

♥ μ étant une probabilité.

$$\left(\int (\sup_i \|u(\xi_i)(\omega)\|_G^p \, d\mu(\omega) \right)^{1/p} \leq C \|u\| \left(\sum_i \|\xi_i\|^q \right)^{1/q} .$$

d) Pour tout espace quasi-normé F et pour tout opérateur v $\lambda_{q,G}$-sommant de $E \otimes G$ dans F, on a :

$$\pi_{p,G}(v) \leq C \; 3^{1/p + 1/q} \; \pi\lambda_{q,G}(v).$$

On a les implications :

a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d).

Démonstration : Notons tout d'abord qu'un opérateur $v_{\xi,G}$ admet la factorisation :

$$E \otimes G \longrightarrow l_n^\infty \otimes G \longrightarrow l_n^\infty(G)$$

où le premier opérateur est $v_{\tilde{\xi},G}$, $\tilde{\xi} = \left(\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \dots, \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \right)$, et où le second est de la forme $\alpha \otimes \mathrm{Id}$, α étant l'opérateur diagonal défini par la suite $(\|\xi_i\|)$.

D'après la proposition 1 bis, et la propriété d' "idéal" :

$$\pi\lambda_{q,G}(v_{\xi,G}) \leq \left(\sum_i \|\xi_i\|^q \right)^{1/q} ,$$

ce qui permet de vérifier immédiatement a) $\Rightarrow$ b).

Montrons que b) $\Rightarrow$ c). Supposons b) réalisée, et soient u un opérateur linéaire continu p-approximable de E' dans $L^p(\Omega,\mu,G)$, λ la probabilité G-cylindrique définie par u, et (λ_j) un filtre de probabilités à support fini vérifiant les propriétés 1) et 2) indiquées ci-dessus.
Soit, d'autre part, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ une suite finie d'éléments de E'.
On a pour chaque indice j :

$$\|v_{\xi,G}(\lambda_j)\|_p \leq \pi_{p,G}(v_{\xi,G}) \, \|\lambda_j\|_p^* \leq C \left(\sum_i \|\xi_i\|^q \right)^{1/q} \|\lambda\|_p^*$$
$$= C \|u\| \left(\sum_i \|\xi_i\|^q \right)^{1/q} .$$

Lorsque $j \to \infty$ dans le filtre, $v_{\xi,G}(\lambda_j)$ converge étroitement vers $v_{\xi,G}(\lambda)$ sur $l_n^\infty(G)$ d'après la condition 1). D'autre part, $\nu \to \|\nu\|_p$ est sci pour la topologie étroite, donc :

$$\|v_{\xi,G}(\lambda)\|_p \leq C \|u\| (\sum_i \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

Considérons la probabilité ν sur $l_n^\infty(G)$, image de μ par $\omega \to (u(\xi_1)(\omega),\ldots,u(\xi_n)(\omega))$.
On voit facilement que $\nu = v_{\xi,G}(\lambda)$.
D'après la définition de l'image d'une probabilité G-cylindrique (exposé I, §3), $v_{\xi,G}(\lambda)$ est égale à la projection de λ sur $E/v_\xi^{-1}(0)$ (noter que $v_{\xi,G} = v_\xi \otimes \mathrm{Id}$). D'après la construction de λ à partir de u (exposé I, §3), il est clair que $\nu = v_{\xi,G}(\lambda)$. Alors :

$$(\int (\sup \|u(x_i)(\omega)\|_G)^p d\mu(\omega))^{1/p} = \|v_{\xi,G}(\lambda)\|_p \leq C \|u\| (\Sigma \|\xi_i\|^q)^{1/q} ,$$

ce qui démontre b) $\Rightarrow$ c).

Pour montrer c) $\Rightarrow$ d), nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Soit v un opérateur linéaire de $E \otimes G$ dans F, tel qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ et $\rho \geq 0$ tels que l'on ait pour toute probabilité λ à support fini sur $E \otimes G$:

$$J_\alpha(v(\lambda)) \leq \rho \|\lambda\|^*_{p,G} .$$

On a alors

$$\pi_{p,G}(v) \leq \rho .$$

<u>Démonstration</u> : Soit (z_i) une suite finie d'éléments de $E \otimes G$, telle que $\Sigma \|u(z_i)\|^p = 1$, et que $u(z_i) \neq 0$ pour chaque i (le lecteur vérifiera que cette restriction est sans importance).

Considérons la probabilité à support fini λ définie par :

$$\lambda = \sum_i \|v(z_i)\|^p \delta_{z_i/\|v(z_i)\|} .$$

On voit que l'image $v(\lambda)$ est portée par la sphère unité de F, donc :

$$J_\alpha(\lambda) = 1.$$

Alors :

$$(\Sigma \|v(z_i)\|^p)^{1/p} = J_\alpha(\lambda) \leq \rho \|\lambda\|^*_{p,G}$$

$$= \rho \sup_{\|\xi\|\leq 1} (\Sigma \|v(z_i)\|^p \| < \frac{z_i}{\|v(z_i)\|}, \xi > \|^p_G)^{1/p}$$

$$= \rho \|(z_i)\|^*_{p,G}$$

ce qui démontre le lemme.

Montrons que c) $\Rightarrow$ d). Nous utiliserons le théorème de Nikishin de l'exposé n°IV. Soit v un opérateur linéaire (λ_q, G)-sommant de $E \otimes G$ dans un espace quasi-normé F quelconque. Soit λ une probabilité à support fini sur $E \otimes G$. Représentons λ par un opérateur linéaire continu u de E' dans un espace $L^p(\Omega, \mu, G)$. Cet opérateur sera trivialement p-approximable, et on aura d'après c), pour toute suite finie $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E'$:

$$J_{1/3}(\sup \|u(\xi_i)(\omega)\|_G, d\mu(\omega)) \leq 3^{1/p}(\int (\sup \|u(\xi_i)(\omega)\|_G)^p d\mu(\omega))^{1/p}$$

$$\leq C\, 3^{1/p} \|u\| (\Sigma \|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

$$= C\, 3^{1/p} \|\lambda\|^*_{p,G} (\Sigma \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

D'après le théorème de Nikishin (exposé IV), il existe une partie $\Omega' \subset \Omega$, telle que $\mu(\Omega - \Omega') \leq 1/3$, et :

$$\forall\ \xi \in E', \quad \Lambda_q(u(\xi)\chi_{\Omega'}, \mu) \leq C\, 3^{1/p}\, \|\lambda\|^*_{p,G}\ \|\xi\| .$$

L'opérateur u' de E' dans $L^p(\Omega', \chi_{\Omega'}\mu, G)$ définit une <u>mesure</u> G-cylindrique λ', de masse $\mu(\Omega')$, telle que :

$$\Lambda^*_{q,G}(\lambda') \leq C\ 3^{1/p}\ \|\lambda\|^*_{p,G},$$

et on voit immédiatement que λ' est en fait une mesure à support fini, donc d'après la proposition 2 (encore valable pour des mesures à support fini de masse quelconque) :

$$\Lambda_q(v(\lambda')) \leq \pi\lambda_{q,G}(v)\ \Lambda^*_q(\lambda') \leq C\ 3^{1/p}\pi\lambda_{q,G}(v)\ \|\lambda\|^*_{p,G}.$$

On aura alors, si R est une constante quelconque :

$$\begin{aligned}\lambda\ \{z \in E \otimes G\ ;\ \|v(z)\| > R\} &\leq 1/3 + \lambda'\ \{z \in E \otimes G\ ;\ \|v(z)\| > R\} \\ &\leq 1/3 + \left(\frac{1}{R}\ C\ 3^{1/p}\ \pi\lambda_{q,G}(v)\ \|\lambda\|^*_{p,G}\right)^q .\end{aligned}$$

Posons $R_o = C\ 3^{1/p+1/q}\ \pi\lambda_{q,G}(v)\ \|\lambda\|^*_{p,G}$; on aura :

$$\lambda\ \{z \in E \otimes G\ ;\ \|v(z)\| > R_o\} \leq 2/3,$$

soit :

$$J_{2/3}(v(\lambda)) \leq C\ 3^{1/p+1/q}\ \pi\lambda_{q,G}(v)\ \|\lambda\|^*_{p,G}$$

ce qui implique que $\pi_{p,G}(v) \leq C\ 3^{1/p+1/q}\ \pi\lambda_{q,G}(v)$ d'après le lemme, et achève la démonstration.

<u>Théorème</u> : Soient E un espace de Banach, et p,q deux nombres réels tels que $0 < p < q < \infty$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une constante C telle que l'on ait pour tout espace quasi-normé F, et pour tout opérateur linéaire v λ_q-sommant de E dans F :

$$\pi_p(v) \leq C\, \pi\lambda_q(v) .$$

b) Il existe une constante C telle que l'on ait pour tout espace de Banach G, tout espace quasi-normé F, et pour tout opérateur linéaire v (λ_q, G)-sommant de $E \otimes G$ dans F :

$$\pi_{p,G}(v) \leq \pi\lambda_{q,G}(v).$$

<u>Démonstration</u> : b) ⇒ a) est trivial (prendre $G = \mathbb{R}$). Pour montrer que a) ⇒ b), on va raisonner sur la condition b) de la proposition 3. Supposons a) réalisée, et soit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ une suite finie d'éléments de E'. On a vu que :

$$\pi\lambda_q(v_\xi) \leq (\sum_i \|\xi_i\|^q)^{1/q} ,$$

donc, d'après a) :

$$\pi_p(v_\xi) \leq C\ (\sum \|\xi_i\|^q)^{1/q} .$$

Maintenant l'opérateur $v_{\xi,G}$ de $E \otimes G$ dans $l_n^\infty(G)$ est égal à $v_\xi \otimes \mathrm{Id}$, et $l_n^\infty(G) = l_n^\infty \underset{\varepsilon}{\otimes} G$.

D'après la proposition 2, exposé n°I, on a :

$$\pi_{p,G}(v_{\xi,G}) \leq \pi_p(v_\xi) \leq C\ (\sum \|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

ce qui démontre le théorème d'après la proposition 3. (b ⇒ c) ⇒ d)).

Remarque : Les λ_q-sommants sont bien adaptés au théorème précédent. L'énoncé analogue pour des inégalités $\pi_p(v) \leq \pi_q(v)$ serait faux pour $q = 2$. Il reste cependant vrai pour $q < 2$, mais par un argument très indirect. C'est ce résultat qui a été utilisé dans l'exposé VI, théorème 2 :

Corollaire : Soient E un espace de Banach, et p,q tels que $0 < p < q < 2$. On suppose que $\Pi_p(E,F) = \Pi_q(E,F)$ pour tout espace quasi-normé F. Il existe une constante C telle que l'on ait pour tout espace de Banach G, tout espace quasi -normé F et tout opérateur linéaire v (q,G)-sommant de $E \otimes G$ dans F :

$$\pi_{p,G}(v) \quad \leq \quad C\ \pi_{q,G}(v)\ .$$

Démonstration : Puisque l'on a $q < 2$, il existe d'après ([1], exposé XXII, corollaire 3) un réel q' tel que $q < q' < 2$, et tel que l'on ait encore :

$$\forall\ F, \qquad \Pi_p(E,F) = \Pi_{q'}(E,F).$$

On aura alors, a fortiori :

$$\forall\ F, \qquad \Pi_p(E,F) = \Pi\Lambda_{q'}(E,F) \qquad (\text{car } \Pi\Lambda_{q'} \subset \Pi_{q'})\ .$$

Par une technique classique, on se ramène à l'énoncé de la condition a) du théorème précédent.
D'après ce théorème, il existe une constante C telle que l'on ait pour tout opérateur $(\lambda_{q'},G)$-sommant de $E \otimes G$ dans F :

$$\pi_{p,G}(v) \quad \leq \quad C\ \pi\lambda_{q',G}(v).$$

Pour conclure, il suffit maintenant de savoir que pour $q < q'$, il existe une constante K(q,q') telle que :

$$\pi\lambda_{q',G}(v) \quad \leq \quad K(q,q')\ \pi_{p,G}(v),$$

ce qui sera vu dans l'exposé suivant.

*
* *

BIBLIOGRAPHIE

[1] Séminaire Maurey-Schwartz 1972/1973.

[2] Séminaire Laurent Schwartz 1969/1970.

****