G. PISIER

Une propriété du type p-stable

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A10_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

UNE PROPRIETE DU TYPE p-STABLE

par G. PISIER

Exposé N° VIII

19 Décembre 1973

Les résultats de cet exposé ont été démontrés en collaboration avec B. Maurey.

Nous allons démontrer que pour tout espace normé E, l'ensemble des p de]0,2] pour lesquels E est de type p-stable est un intervalle ouvert dans]0,2]. Compte tenu des résultats du séminaire Maurey-Schwartz 72/73, ce théorème généralise un théorème de Rosenthal sur les sous-espaces de L^p (cf. [1]).

Nous conservons les notations de l'exposé précédent ; soit E un espace normé, rappelons que R_E désigne la borne supérieure de l'ensemble des p pour lesquels E est de type p-Rademacher.

L'espace $L^2([0,1],dt\ ;\ E)$ sera noté $L^2(E)$.
(ε_n) désigne - comme d'habitude - la suite des variables de Rademacher sur $([0,1],dt)$. Soit $[\varepsilon_n]$ le sous-espace de $L^2([0,1],dt)$ linéairement engendré par les variables de Rademacher. On note $\mathcal{R}(E)$ le sous-espace $[\varepsilon_n] \otimes E$ de $L^2(E)$; un élément X de $\mathcal{R}(E)$ s'écrit de manière unique $X(t) = \sum \varepsilon_n(t)\, x_n$ où (x_n) est un élément de $E^{(\mathbb{N})}$.

Soit p dans [1,2].

<u>Lemme 1</u> : Pour tout espace normé E, $\mathcal{R}(E)$ est de type p-stable si et seulement si E est de type p-stable.

<u>Démonstration</u> : Puisque E s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{R}(E)$ la partie "seulement"si est évidente.
Supposons que E est de type p-stable : soit r dans]0,p[, il existe une constante C telle que pour toute suite finie (x_n) dans E :

$$\left(\int \|\sum f_n(t)\, x_n\|^r dt\right)^{1/r} \leq C \left(\sum \|x_n\|^p\right)^{1/p} .$$

D'après les inégalités (K) de l'exposé 3, on a :

$$\forall\, X \in \mathcal{R}(E)\ ,\quad \|X\|_{L^2(E)} \leq R^1_{2,r}\ \|X\|_{L^r(E)} .$$

Soit (X_n) une suite finie dans $\mathcal{R}(E)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\left(\int \|\Sigma X_n f_n(t)\|^r_{L^2(E)} dt\right)^{1/r} &\leq R^1_{2,r} \left(\int \|\Sigma X_n f_n(t)\|^r_{L^r(E)} dt\right)^{1/r}, \\
&\leq R^1_{2,r} \left(\int \|\Sigma X_n(\theta) f_n(t)\|^r dt\, d\theta\right)^{1/r}, \\
&\leq R^1_{2,r}\, C \left(\int (\Sigma \|X_n(\theta)\|^p)^{r/p} d\theta\right)^{1/r}, \\
&\leq R^1_{2,r}\, C \left(\Sigma \|X_n\|^p_{L^p(E)}\right)^{1/p}, \\
&\leq R^1_{2,r}\, C \left(\Sigma \|X_n\|^p_{L^2(E)}\right)^{1/p},
\end{aligned}
$$

ce qui démontre le lemme.

<u>Lemme 2</u> : Soit E un espace normé tel que $R_E = p$ avec $1 \leq p < 2$, alors

$$
\limsup_{n \to \infty} \left[\sqrt{n}\, \nu_n(E) - \sqrt{n-1}\, \nu_{n-1}(E) \right] n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}} \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) .
$$

<u>Démonstration</u> : Posons $\varphi(n) = [\sqrt{n}\, \nu_n(E) - \sqrt{n-1}\, \nu_{n-1}(E)]\, n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}$ pour tout $n \geq 2$ et $\varphi(1) = 1$. On a :

$$
\sqrt{n}\, \nu_n(E) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi(i)}{i^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}} .
$$

Si $n \geq N$, on a :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n}\, \nu_n(E) &\leq \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\varphi(i)}{i^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}} + (\sup_{m > N} \varphi(m)) \sum_{i=N+1}^{i=n} \frac{1}{i^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\varphi(i)}{i^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}} + (\sup_{m > N} \varphi(m)) \int_N^n \frac{dx}{x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\varphi(i)}{i^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}} + (\sup_{m > N} \varphi(m)) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}} \left(n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}} - N^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}}\right) .
\end{aligned}
$$

d'où

$$\limsup_{n \to \infty} \left(n^{\frac{1}{p'}} \nu_n(E)\right) \leq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}}} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi(i)}{i^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}}\right) + \left[\sup_{m>N} \varphi(m)\right] \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(1 - \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}}\right) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}}$$

d'où

$$\limsup_{n \to \infty} \varphi(n) \geq \limsup_{n \to \infty} \left[n^{\frac{1}{p'}} \nu_n(E)\right] \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}\right)^{-1} .$$

Si $R_E = p$, alors (cf. lemme 4 de l'exposé précédent) $n^{\frac{1}{p'}} \nu_n(E) \geq 1$ pour tout entier n, d'où la conclusion du lemme :

$$\limsup_{n \to \infty} \varphi(n) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} .$$

<u>Lemme 3</u> : Soit p tel que $1 \leq p < 2$, si E est un espace normé tel que $R_E = p$, alors il existe une suite d'entiers (m_k) tendant vers l'infini avec k et vérifiant la propriété suivante - où l'on a posé $\delta = (\frac{3}{4})^{1/p'} \frac{1}{4}(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ - :

Pour tout entier k, il existe un m_k-uple $(x_1^k, \dots, x_{m_k}^k)$ dans E tel que :

$$(1) \qquad \forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{m_k}, \quad \delta \frac{\sum_{i=1}^{m_k} |\alpha_i|}{(m_k)^{\frac{1}{p'}}} \leq \left(\int \left\| \sum_{i=1}^{i=m_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k \right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{i=m_k} |\alpha_i| .$$

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme précédent, si $R_E = p$ il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) tel que

$$n_k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}} \left[\sqrt{n_k}\, \nu_{n_k}(E) - \sqrt{n_k - 1}\, \nu_{n_k-1}(E)\right] > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) ,$$

soit encore

$$\sqrt{n_k}\, \nu_{n_k}(E) > \sqrt{n_k - 1}\, \nu_{n_k - 1}(E) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) n_k^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}} ;$$

pour tout entier k, on peut donc trouver un n_k-uple $(x_1^k,\dots,x_{n_k}^k)$ vérifiant :

$$(2) \qquad \left(\sum_{i=1}^{i=n_k} \|x_i^k\|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n_k}$$

et

$$(3) \qquad \left(\int \left\|\sum_{i=1}^{i=n_k} \varepsilon_i(t)\, x_i^k\right\|^2 dt\right)^{1/2} \geq \sqrt{n_k} \times \left[\sqrt{n_k-1}\; \psi_{n_k-1}(E) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) n_k^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}}\right]$$

soit alors (α_i) dans $\mathbb{R}^{n_k}$ tel que $\sum |\alpha_i| = 1$, on a :

$$\left(\int\left\|\sum_{i=1}^{n_k} \varepsilon_i(t)\, x_i^k\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int\left\|\sum_{i=1}^{i=n_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\right\|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int\left\|\sum_{i=1}^{i=n_k} (1-|\alpha_i|)\varepsilon_i(t) x_i^k\right\|^2 dt\right)^{1/2} ;$$

la borne supérieure de $\left(\int\left\|\sum_{i=1}^{i=n_k} (1-t_i)\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\right\|^2 dt\right)^{1/2}$ sur l'ensemble

convexe $\{(t_i) \in \mathbb{R}_+^{n_k} \mid \sum t_i = 1\}$ est atteinte sur un point extrêmal de cet ensemble, c'est-à-dire sur un point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une égale à 1 ; on peut donc écrire :

$$\left(\int \left\|\sum_{i=1}^{i=n_k} \varepsilon_i(t) x_i^k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int\left\|\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \sup_{1\leq j\leq n_k} \left(\int\left\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{i=n_k} \varepsilon_i(t)\, x_i^k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int\left\|\sum_{i=1}^{i=n_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\right\|^2 dt\right)^{1/2} + \sqrt{n_k-1}\; \psi_{n_k-1}(E) \left(\sum_{i=1}^{i=n_k} \|x_i^k\|^2\right)^{1/2}$$

d'où, d'après (2) et (3) :

$$\left(\int\left\| \sum \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\right\|^2 dt\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{n_k^{1/p'}} ,$$

soit par homogénéité :

$$(4)\quad \forall\,(\alpha_i)\in \mathbb{R}^{n_k}\ ,\qquad \left(\int \Big\|\sum_{i=1}^{n_k}\alpha_i\,\varepsilon_i(t)\,x_i^k\Big\|^2\,dt\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n_k}|\alpha_i|}{(n_k)^{1/p'}}\quad .$$

Mais, si $\sum_{i=1}^{i=n_k}\|x_i^k\|^2 = n_k$, alors, en posant $B_k = \{i \mid 1 \leq i \leq n_k\ \|x_i^k\| \leq 2\}$, nécessairement le cardinal de B_k - noté $|B_k|$ - est supérieur à $\frac{3n}{4}$ puisque trivialement :

$$4(n_k - |B_k|) \leq n_k \quad .$$

Supposons - pour simplifier les notations - que :

$$B_k = \{1,\dots,m_k\} \qquad \text{avec} \quad m_k = |B_k| \quad ;$$

(4) devient alors :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{p'}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\frac{\sum_{i=1}^{m_k}|\alpha_i|}{(m_k)^{1/p'}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\frac{\sum_{i=1}^{i=m_k}|\alpha_i|}{(n_k)^{1/p'}} \leq \left(\int\Big\|\sum_{i=1}^{i=m_k}\alpha_i\,\varepsilon_i(t)\,x_i^k\Big\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sum_{i=1}^{i=m_k}|\alpha_i| \quad ;$$

la conclusion du lemme découle de ce dernier résultat puisque m_k tend vers l'infini avec k.

<u>Théorème 1</u> : Soit p dans l'intervalle $[1,2[$. Tout espace normé de type p-stable est de type $(p+\varepsilon)$-stable pour un certain ε dans $]0,2-p]$.

Nous supposerons que E est de type p-stable mais que $R_E = p$; (ce qui équivaut - d'après le corollaire 1 et la proposition 3 de l'exposé 3 - à supposer que $\forall\ \varepsilon \in]0,2-p]$, E n'est pas de type $(p+\varepsilon)$-stable) et nous allons aboutir à une contradiction.

a Dans le cas $p = 1$, le lemme 3 signifie que $\mathcal{R}(E)$ contient des l^1_n uniformément, donc (cf. proposition 5 de l'exposé précédent) que $\mathcal{R}(E)$ n'est pas de type 1-stable, donc (cf. lemme 1) que E n'est pas de type 1-stable, ce qui est une contradiction.

b Supposons $1 < p < 2$. Puisque l'on suppose que $R_E = p$, on peut appliquer le lemme 3 (dont nous conservons les notations) : soit $\mathcal{R}_k$ le sous-espace de $\mathcal{R}(E)$ engendré par $(\varepsilon_i(.)x_i^k)_{1 \leq i \leq m_k}$, le lemme 3 permet de construire pour tout entier k un opérateur u_k de $\mathcal{R}_k$ dans $l^1_{m_k}$ en posant :

$$u_k\left(\sum_{i=1}^{i=m_k} \alpha_i \, \varepsilon_i(.)x_i^k\right) = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq m_k} \in l^1_{m_k} .$$

On a :
$$\begin{cases} \|u_k\| \leq \dfrac{(m_k)^{1/p'}}{\delta} \\ \|u_k^{-1}\| \leq 1 . \end{cases}$$

Puisque par hypothèse E est de type p-stable, $\mathcal{R}(E)$ est de type p-stable d'après le lemme 1 ; donc les sous-espaces $(\mathcal{R}_k)$ de $\mathcal{R}(E)$ sont "uniformément" de type p-stable, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que :

Pour tout entier k, pour toute suite finie (Y_n) dans $\mathcal{R}_k$, on a :

$$\int \|\Sigma\, f_n(t)\, Y_n\| \, dt \leq C \left(\Sigma \, \|Y_n\|^p\right)^{1/p} \quad ♦$$

où (f_n) est une suite stable d'ordre p telle que $\int |f_1(t)| dt = 1$.

On en déduit alors, d'après la propriété des suites stables :

Pour tout entier k ,pour toute suite finie Y_n dans $\mathcal{R}_k$,

---

♦ où l'on a noté $\|.\|$ la norme de $\mathcal{R}(E)$.

$$\frac{\delta}{m_k^{1/p'}} \sum_{i=1}^{i=m_k} \left(\sum_n |u_k(Y_n)(i)|^p\right)^{1/p} \leq \frac{\delta}{m_k^{1/p'}} \|u_k\| \int \|\sum f_n(t)\, Y_n\|\, dt$$

$$\leq C \left(\sum \|Y_n\|^p\right)^{1/p} .$$

D'après les théorèmes de factorisation (cf. [2], exposé XV, théorème 1), cette dernière inégalité assure l'existence, pour tout k, d'une suite (β_i) dans $\mathbb{R}^{m_k}$ ♦♦ vérifiant :

$$(5) \qquad \left(\sum_{i=1}^{m_k} |\beta_i|^{p'}\right)^{1/p'} \leq 1$$

et

$$(6) \quad \forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{m_k}, \quad \frac{\delta}{C m_k^{1/p'}} \left(\sum_{i=1}^{i=m_k} \left|\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int \|\sum_{i=1}^{i=m_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k\|^2 dt\right)^{1/2} .$$

On pose $D = \frac{\delta}{C}$, soit d réel suffisamment grand pour que

$$d > D \qquad \text{et} \qquad \frac{d^{p'} - 1}{d^{p'} - D^{p'}} > \frac{1}{2} .$$

On pose, pour tout entier k :

$$A_k = \{i \in \{1,\dots,m_k\} \mid \quad |\beta_i| \leq \frac{d}{m_k^{1/p'}} \} .$$

Puisque $\sup_{1 \leq i \leq m_k} \|x_i^k\| \leq 1$, la relation (6) entraîne :

$$\forall\, i \in \{1,\dots,m_k\}, \quad |\beta_i| \geq \frac{D}{m_k^{1/p'}} ;$$

♦♦ La suite (β_i) dépend de k, nous ne le notons pas pour alléger l'écriture.

et (5) entraîne alors (en notant $|A_k|$ le cardinal de A_k) :

$$(m_k - |A_k|)\ \frac{d^{p'}}{m_k} + |A_k|\ \frac{D^{p'}}{m_k} \leq 1 ,$$

soit :

$$(7) \qquad \frac{|A_k|}{m_k} \geq \frac{d^{p'}-1}{d^{p'}-D^{p'}} > \frac{1}{2} .$$

De la relation (6), on déduit en particulier :

$$\forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{|A_k|} , \ \frac{D}{m_k^{1/p'}} \Big(\sum_{i \in A_k} \Big|\frac{\alpha_i}{\beta_i}\Big|^p \Big)^{1/p} \leq \Big(\int \Big\| \sum_{i \in A_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k \Big\|^2 dt \Big)^{1/2} ;$$

mais puisque $\frac{1}{|\beta_i|} \geq \frac{m_k^{1/p'}}{d}$ quand i est dans A_k, on a fortiori :

$$\forall\ (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{|A_k|} , \ \frac{D}{d} \Big(\sum_{i \in A_k} |\alpha_i|^p \Big)^{1/p} \leq \Big(\int \Big\| \sum_{i \in A_k} \alpha_i\, \varepsilon_i(t)\, x_i^k \Big\|^2 dt \Big)^{1/2} \leq \sum_{i \in A_k} |\alpha_i| .$$

Comme - d'après (7) - $|A_k|$ tend vers l'infini avec k, ce dernier résultat permet d'appliquer à $\mathcal{R}(E)$ la proposition 5 de l'exposé précédent et de conclure que $\mathcal{R}(E)$ n'est pas de type p-stable.

On en déduit finalement (cf. lemme 1) que E n'est pas de type p-stable, ce qui est enfin la contradiction annoncée.

<u>Remarque</u> : Le théorème précédent généralise un résultat de Rosenthal [1] : si $0 < p < 2$, tout sous-espace de L^p ne contenant pas l^p se plonge dans $L^{p+\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. En effet, d'après les résultats de Kadec et Pelczynski (voir [2], exposé XVII, proposition 4), un sous-espace de L^p est de type p-stable si et seulement si il ne contient pas l^p ; de plus, un sous-espace de L^p se plonge dans $L^{p+\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$ si et seulement si il est de type $(p+\varepsilon)$-stable pour un certain $\varepsilon > 0$ (cette dernière affirmation résulte des théorèmes de factorisation, voir [2], exposé XV, théorème 1).

La démonstration précédente n'utilise pas le lemme de Rosenthal, néanmoins on peut grâce à ce lemme démontrer le :

<u>Théorème 2</u> : Soit E un espace normé tel que $R_E = p$ avec $1 < p < 2$. Il existe un nombre $\delta > 0$, tel que pour tout entier n il existe un n-uple $X_1, \ldots, X_n$ dans $\mathcal{R}(E)$ vérifiant :

$$(8) \quad \forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n, \quad \delta\Big(\sum_{i=1}^{i=n} |\alpha_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \Big\|_{\mathcal{R}(E)} \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| .$$

<u>Démonstration</u> (rapide) : Le lemme 3 permet de construire une suite d'opérateurs (u_k) comme dans la démonstration précédente.

Alors (nous employons les notations de [2], exposé XXI) :

. ou bien $\sup_k \dfrac{C_{1,p}(u_k)}{\|u_k\|} < \infty$; dans ce cas, la démonstration précédente s'applique et permet de conclure.

. ou bien $\sup_k \dfrac{C_{1,p}(u_k)}{\|u_k\|} = \infty$ et dans ce cas, le lemme de Rosenthal ([2], exposé XXI) nous permet de conclure.

<u>Remarque 2</u> : La démonstration du théorème précédent permet de montrer de manière analogue que :

si E est un espace normé vérifiant la propriété :

Il existe une constante δ et une suite d'entiers m_k tendant vers l'infini avec k tels que :

$\forall k \in \mathbb{N}$, il existe un m_k-uple $(x_i)_{1 \leq i \leq m_k}$ satisfaisant à

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{m_k}, \quad \frac{\delta \sum |\alpha_i|}{(m_k)^{1/p'}} \leq \Big\| \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_i x_i \Big\| \leq \sum |\alpha_i| ,$$

alors E vérifie en fait :

$\mathcal{P}(p)$ $\begin{cases} \text{Pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et tout entier } n, \text{ il existe un } n\text{-uple } (x_1, \ldots, x_n) \\ \text{dans E tel que :} \\ \forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^n \ , \quad (1-\varepsilon)\left(\Sigma |\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i \right\| \leq \Sigma |\alpha_i| \ . \end{cases}$

****

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.P. ROSENTHAL : On subspaces of L^p . Annals of Math. Vol 97. n°2 p.343-373 (1973).

[2] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973.

****