

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. BADRIKIAN

ε -entropies ; ε -capacités ; épaisseurs

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 18, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A19_0>

© Séminaire Laurent Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L . S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

ε -ENTROPIES ; ε -CAPACITES ; EPAISSEURS

=====

par A. BADRIKIAN

Exposé N^o 18

16 Mars 1970

§ 1. ENTROPIE ET CAPACITE

1) Définitions fondamentales

Soit E un ensemble, U une partie de $E \times E$ symétrique et contenant la diagonale Δ de $E \times E$.

On dira que deux points x et y sont voisins d'ordre U si $(x, y) \in U$. On définit de même des ensembles petits d'ordre U .

Soit A une partie de E . Un U -recouvrement de A est un recouvrement de A par des ensembles petits d'ordre U . Le cas le plus important sera celui où E est un espace uniforme. Si $U = \{(x, y) \in E \times E; p(x, y) < \varepsilon\}$ où p est un écart sur E et $\varepsilon > 0$, on dira (p, ε) -recouvrement (ou encore ε -recouvrement si aucune confusion n'est possible) au lieu de U -recouvrement.

Une partie S de E est dite U -discernable si elle a un seul élément ou si $x \in S, y \in S, x \neq y \Rightarrow (x, y) \in U$. On dira encore (p, ε) -discernable si U est défini comme ci-dessus.

Une partie S de E est dite un U -réseau (ou (p, ε) -réseau le cas échéant) pour A si pour tout $x \in A$, il existe $y \in S$ tel que $(x, y) \in U$.

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un U -recouvrement de A et si $x_i \in A_i$ pour tout i alors $S = \{x_i, i \in I\}$ est un U -réseau pour A . En outre deux points U -discernables ne peuvent appartenir à un même ensemble d'un U -recouvrement.

Dans tout ce qui suit nous poserons $\inf \emptyset = +\infty$.

La terminologie étant ainsi fixée nous introduisons les notations suivantes :

- $N(A, U)$ désignera le plus petit nombre d'éléments que peut compter un U -recouvrement de A , $N(A, U) \leq +\infty$.

Remarque : En toute rigueur on devrait écrire $N(E;A,U)$, mais on voit facilement que si $A \subset E' \subset E$ on a

$$N(E;A,U) = N(E';A,U \cap (E' \times E'))$$

et en particulier

$$N(E;A,U) = N(A;A,U \cap (E' \times E')) .$$

Si $U = \{(x,y) \in E \times E; p(x,y) < \varepsilon\}$, p écart, $\varepsilon > 0$, on écrira $N(A,p,\varepsilon)$ ou $N(A,\varepsilon)$ au lieu de $N(A,U)$. On posera $H(A,U) = \text{Log } N(A,U)$ (avec la convention $\text{Log } +\infty = +\infty$). Si E est un espace uniforme et si A est précompacte pour cette structure, $H(A,U)$ sera appelée entropie de A par rapport à U . On a $N(A,U) < +\infty$ pour tout entourage symétrique U (et réciproquement).

Définition : si p est un écart sur E , on appelle exposant d'entropie de A relativement à p et on note $\rho_p(A)$ ou $\rho(A)$ le nombre

$$\limsup_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\text{Log } H(A,p,\varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}} .$$

Il est clair que $\rho(A)$ est égal à la borne inférieure des nombres positifs μ ayant la propriété suivante :

"il existe ε_0 (dépendant de μ) tel que :

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow N(A,p,\varepsilon) \leq e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\mu} "$$

ou encore, $N(A,p,\varepsilon) \leq C e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\mu}$, pour tout $\varepsilon > 0$ (où C est une constante dépendante de μ).

Il est clair que $\rho(A) = \limsup_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\text{Log } H(A,p,\alpha \varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}}$ pour tout $\alpha > 0$.

- $M(A,U)$ désignera un entier égal au maximum du nombre d'éléments que peut comporter une partie U -discernable de A

On posera $C(A,U) = \text{Log } M(A,U)$ et $C(A,U)$ sera appelée capacité de A par

rapport à U. On définit de même la quantité $C(A, p, \varepsilon)$. On dira alors ε -capacité.

- Enfin, si B est une autre partie de E, $P(A; B, U)$ désignera l'entier (éventuellement égal à $+\infty$) égal à :

$$\inf \{ \text{card } S ; S \subset B, \quad , S \text{ est un } U\text{-réseau pour } A \}.$$

On appelle entropie de A par rapport à B et U et l'on écrit $H_B(A, U)$ la quantité $\text{Log } P(A; B, U)$.

2) Propriétés fondamentales

Les propriétés suivantes sont quasi-immédiates.

- $N(A, U)$, $P(A; B, U)$ et $M(A, U)$ (ainsi que leurs logarithmes) sont des fonctions croissantes de A et des fonctions décroissantes de U.

- $P(A; B, U)$ est une fonction décroissante de B.

En outre, on la

Proposition 1 : quel que soit $A \subset E$ et quel que soit $U \subset E \times E$ (symétrique et contenant la diagonale) on a, pour tout $X \subset E$

$$N(A, U \circ U) \leq P(A; X, U) \tag{1}$$

et pour toute partie X de E contenant A

$$N(A, U \circ U) \leq P(A; X, U) \leq P(A; A, U) \leq M(A, U) \leq N(A, U). \tag{2}$$

Démonstration : L'inégalité (1) résulte du fait que tout U-recouvrement de A est un $U \circ U$ -recouvrement de A.

L'inégalité de droite de (2) est due au fait que deux points U-discernables de A ne peuvent appartenir à un même ensemble d'un U-recouvrement de A.

L'inégalité $P(A; A, U) \leq M(A, U)$ est triviale si $M(A, U) = +\infty$. Dans le cas contraire soit S une partie finie U-discernable de A telle que

card $S = M(A, U)$. Si $x \in S$, soit $U(x)$ la coupe de U suivant x ; alors la famille $\{U(x), x \in S\}$ est un U -recouvrement de A . Donc S est une partie de E qui est un U -réseau pour A .

L'inégalité $P(A; X, U) \leq P(A; A, U)$ est triviale d'après la remarque précédant cette proposition. cgfd

Corollaire : si P est un écart sur E , X une partie de E contenant A

$$\rho_p(A) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \sup \frac{\text{Log } H(A; X, \varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \sup \frac{\text{Log } M(A, \varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}} .$$

Proposition 2 : Soient E et F deux ensembles et $T: E \rightarrow F$ une application quelconque. Soit \hat{T} l'application de $E \times E$ dans $F \times F$ définie par $\hat{T}(x_1, x_2) = (Tx_1, Tx_2)$. Soit U (resp. V) une partie symétrique de $E \times E$ (resp. $F \times F$) contenant la diagonale $\Delta(E)$ (resp. $\Delta(F)$).

Quels que soient $A \subset E$, $A_1 \subset E$, $B \subset F$, $B_1 \subset F$ on a les inégalités suivantes

$$N(TA, \hat{T}U) \leq N(A, U) ; N(T^{-1}B, \hat{T}^{-1}V) \leq N(B, V) ;$$

$$P(TA; TA_1, \hat{T}U) \leq P(A; A_1, U) ; P(T^{-1}B, T^{-1}B_1, \hat{T}^{-1}V) \leq P(B; B_1, V) ;$$

$$M(TA, \hat{T}U) \leq M(A, U) ; \text{ et } M(T^{-1}B, \hat{T}^{-1}V) \leq M(B, V)$$

si la restriction de T à $T^{-1}(B)$ est injective.

Si T est bijective, ces inégalités deviennent des égalités.

Démonstration : il suffit de remarquer que pour tout $x \in E$

$$(T^{-1}V)(x) = T^{-1}(V(Tx)) \text{ et } T(U(x)) \subset (\hat{T}U)(Tx) .$$

Corollaire : avec les notations de la proposition 2, on a

$$N(TA, V) = N(TA, \overset{x}{T}\overset{x-1}{T}V) = N(A, \overset{x}{T}^{-1}V) = N(T^{-1}TA, \overset{x}{T}^{-1}V) ;$$

$$P(TA; TA_1, V) = M(TA, \overset{x}{T}A_1, \overset{x}{T}\overset{x-1}{T}V) = P(A; A_1, \overset{x}{T}^{-1}V) = P(T^{-1}TA, A_1, \overset{x}{T}^{-1}V) ;$$

$$M(TA, V) = M(TA, \overset{x}{T}\overset{x-1}{T}V) \leq M(A, \overset{x}{T}^{-1}V) \leq M(T^{-1}TA, \overset{x}{T}^{-1}V) .$$

Démonstration : démontrons le premier groupe d'égalités. On a

$$N(TA, V) = N(TA, \overset{x}{T}\overset{x-1}{T}V)$$

car $(TA \times TA) \cap V = (TA \times TA) \cap \overset{x}{T}\overset{x-1}{T}V$ et l'égalité résulte de la remarque suivant la définition de $N(A, U)$.

Maintenant, d'après la proposition 2, on a

$$N(TA, \overset{x}{T}\overset{x-1}{T}V) \leq N(\overset{x}{T}^{-1}V) ;$$

et puisque $T^{-1}TA \supset A$

$$N(A, \overset{x}{T}^{-1}V) \leq N(T^{-1}TA, \overset{x}{T}^{-1}V) .$$

Maintenant en appliquant encore la proposition 2, on obtient

$$N(T^{-1}TA, \overset{x}{T}^{-1}V) \leq N(TA, V) .$$

On en déduit le premier groupe d'égalités.

On démontrerait de la même façon le deuxième groupe d'égalités.

Maintenant $M(TA, V) = M(TA, \overset{x}{T}\overset{x-1}{T}V)$ se démontre comme pour l'égalité analogue du 1er groupe d'égalités (la remarque suivant la définition de $N(A, U)$ reste valable pour $M(A, U)$). On a $M(TA, \overset{x}{T}\overset{x-1}{T}V) \leq M(A, \overset{x}{T}^{-1}V)$ à cause de la proposition 2 et la dernière égalité résulte alors de $A \subset T^{-1}TA$.

La proposition suivante nous montre comment on peut calculer les entropies dans un produit

Proposition 3 : E, F, U et V, A et B ont la même signification que dans la proposition 2 ; on désigne par $U \otimes V$ le sous-ensemble de $(E \times F) \times (E \times F)$ défini par

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \in U \otimes V \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in U \text{ et } (y_1, y_2) \in V .$$

On a alors :

$$N(A \times B, U \otimes V) \leq N(A, U) \times N(B, V) ;$$

$$P(A \times B; A_1 \times B_1, U \otimes V) \leq P(A; A_1, U) P(B; B_1, V)$$

pour tout $A_1 \times B_1 \subset E \times F$;

$$M(A \times B, U \otimes V) \geq M(A, U)M(B, V) .$$

Démonstration immédiate

3) Cas où E est un espace vectoriel (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Dans tout ce numéro, U désignera un sous-ensemble de E disque et absorbant ; on désignera par p_U sa semi-norme jauge :

$$p_U(x) = \inf \{ \lambda; \lambda > 0, x \in \lambda U \} .$$

\tilde{U} désignera la semi-boule "fermée"

$$\tilde{U} = \{ x; x \in E, p_U(x) \leq 1 \} .$$

L'espace vectoriel $E_U = E/p_U^{-1}(0)$ sera muni de la norme quotient et l'on désignera par π_U l'application (linéaire) canonique de E dans \hat{E}_U (complété de E_U pour la norme déduite de p_U) \hat{U} sera la boule unité de \hat{E}_U .

Si V est un ensemble disqué absorbant tel que $V \subset U$ on désignera par π_{UV} l'application (linéaire continue) canonique de \hat{E}_V dans \hat{E}_U .

Si F est un autre espace vectoriel et si $V \subset F$ est disqué absorbant et si $T: E \rightarrow F$ est linéaire, il est clair que :

$$p_{T^{-1}V}(x) = p_V(Tx) , \forall x \in E .$$

Si $U \subset E$ est disqué absorbant on lui associe la partie \hat{U} de $E \times E$ (symétrique, contenant la diagonale) définie comme suit :

$$\hat{U} = \{(x, y) \in E \times E ; x - y \in U\}$$

et l'on écrira $N(A, U)$, $M(A, U)$, $P(A; B, U)$ au lieu de $N(A, \hat{U})$, $M(A, \hat{U})$ et $P(A; B, \hat{U})$ respectivement.

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $\forall \alpha \neq 0, \forall A \subset E, \forall U$ disqué

$$N(\alpha A, \alpha U) = N(A, U) ;$$

$$P(\alpha A; \alpha B, \alpha U) = P(A; B, U) ;$$

$$M(\alpha A, \alpha U) = M(A, U) .$$

(C'est immédiat car $x \rightarrow \alpha x$ est une bijection de E).

- En posant $\rho(A, U) = \rho_{p_U}(A)$ on voit que

$$\rho(\alpha A, \beta U) = \rho(A, U), \forall \alpha, \beta \text{ réels non nuls.}$$

Proposition 4 : quels que soient U (disqué absorbant), $A \subset E$ et $B \subset E$ on a :

$$N(\pi_U A, \hat{U}) = N(A, \tilde{U}) ,$$

$$P(\pi_U A; \pi_U B, \hat{U}) = P(A; B; \tilde{U}) ,$$

$$M(\pi_U A, \hat{U}) = M(A, \tilde{U}) .$$

Démonstration : les deux premières égalités résultent immédiatement du corollaire de la proposition 2 et de $\pi_U^{-1}(\hat{U}) = \tilde{U}$. Ce même corollaire donne $M(\pi_U A, \hat{U}) \leq M(A, \tilde{U})$. Pour démontrer l'inégalité inverse il suffit de remarquer que :

$$p_{\hat{U}}(\pi_U x) = p_U(x) = p_{\tilde{U}}(x) . \quad \underline{\text{cqfd}}$$

Lemme : soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels, U_i un disque absorbant et $B_i \subset E_i$ ($i = 1, 2$) et T une application linéaire de E_1 dans E_2 . Pour tout $A \subset E_1$, on a

$$P(TA; B_2 + TB_1, U_2) \leq P(A; B_1, U_1) \times P(TU_1; B_2, U_2) .$$

Démonstration : comme $P(A_1; B_1, U_2) \geq P(TA; TB_1, TU_1)$ il suffit de démontrer que

$$P(TA; B_2 + TB_1, U_2) \leq P(TA; TB_1, TU_1) P(TU_1; B_2, U_2) .$$

Or c'est immédiat car soit S_1 une partie de TB_1 qui est un TU_1 -réseau pour TA et soit S_2 une partie de B_2 qui est un U_2 -réseau pour TU_1 ; $S_1 + S_2$ est une partie de $TB_1 + B_2$ qui est un U_2 réseau pour TA , cqfd.

Proposition 5 : avec les notations du lemme précédent on a

$$\frac{1}{\rho(TA, U_2)} \geq \frac{1}{\rho(A, U_1)} + \frac{1}{\rho(TU_1, U_2)}$$

si $\rho(TU_1, U_2) < +\infty$ et $\rho(A, U_1) < +\infty$.

Démonstration : posons $\rho_1 = \rho(A, U_1)$ et $\rho_2 = \rho(TU_1, U_2)$. Soit $\sigma > 0$ et α tel que $0 < \alpha < 1$; soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varepsilon' = \varepsilon^\alpha$ choisis de telle façon que

$$\text{Log } P(T\varepsilon; U_1; E_2, \varepsilon U_2) \leq \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{(1+\sigma)\rho_2} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1+\sigma)(1-\alpha)\rho_2}$$

et

$$\text{Log } P(A; E_1, \varepsilon' U_1) \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1+\sigma)\rho_1} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1+\sigma)\alpha\rho_1} .$$

Prenons $\alpha = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$; donc $\alpha\rho_1 = (1 - \alpha)\rho_2 = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ et

$$\text{Log } P(TA; E_2, U_2) \leq 2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1+\sigma)\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}} .$$

Donc,

$$\rho(TA, U_2) \leq (1+\sigma)\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} , \quad \text{cqfd} .$$

Proposition 6 : si S est une partie disjuncte de \mathbb{R}^n , pour tout r et tout ε tels que $r > \varepsilon > 0$, on a

$$\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^n \leq M(rS, \varepsilon S) \leq \left(\frac{r+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n \leq \left(\frac{2r}{\varepsilon}\right)^n .$$

Démonstration : soit $\{x_1, \dots, x_m\}$ une partie (finie) εS -discernable de rS et maximale, c'est-à-dire $m = M(rS, \varepsilon S)$; alors

$$rS \subset \bigcup_{i=1}^m (x_i + \varepsilon S) \subset (r + \varepsilon)S .$$

On obtient le résultat en prenant la mesure de Lebesgue de ces différents volumes.

Faisons encore les remarques suivantes :

- Si U' est un disque de E et U un disque absorbant de E , alors :

$$N(A + U', U + 2U') \leq N(A, U) .$$

- Si $C(A, U) < +\infty$, alors il existe une partie finie K de A telle que

$$H_B(A, 2U) \leq H_B(K, U) .$$

(Il suffit de prendre K partie U -discernable "maximale" de A).

§ 2. n^{ièmes} EPAISSEURS ET n^{ièmes} VOLUMES DANS LES ESPACES VECTORIELS

1) n^{ièmes} épaisseurs et n^{ièmes} volumes

Si E est un espace vectoriel on désignera par \mathcal{E}_n la famille des sous-espaces de E de dimension au plus égale à n. Si de plus E et F sont des espaces vectoriels topologiques, $\mathcal{L}_n(E, F)$ désignera la famille de tous les opérateurs linéaires continus de E dans F de rang au plus égal à n ; si E = F, on notera $\mathcal{L}_n(E)$ ou \mathcal{L}_n .

Définition : Soit U un disque (non nécessairement absorbant) de E et $A \subset E$; soit $\mathcal{E}_n(U)$ la famille des éléments de \mathcal{E}_n contenus dans l'espace vectoriel engendré par U. On appelle n^{ième} épaisseur de A relativement à U le nombre

$$d_n(A, U) = \inf \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in E_n} p_U(x - y) ; E_n \in \mathcal{E}_n(U) \right\},$$

c'est-à-dire

$$d_n(A, U) = \inf \{ \lambda ; \lambda > 0, \exists E_n \in \mathcal{E}_n(U) \text{ tel que } A_n \subset E_n + \lambda \tilde{U} \}.$$

Si aucun risque de confusion n'est possible (par exemple, si U est la boule unité d'un normé E) on notera $d_n(A)$ au lieu de $d_n(A, U)$.

Définition 2 : Soit U un disque absorbant de E et $A \subset E$. On appelle n^{ième} volume de A relativement à U le nombre

$$v_n(A, U) = \sup_{\substack{T \in \mathcal{L}_n(E) \\ \text{rang } T = n}} \frac{m_{TE}(\overline{TA})}{m_{TE}(\overline{TU})}$$

(où m_{TE} désigne une mesure de Haar sur TE) quand tous les rapports ont un sens, c'est-à-dire quand on n'a pas la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Bien entendu, si E est normé et U sa boule unité, le n^{ième} volume est bien défini. Quand ce n^{ième} volume est bien défini, on appelle exposant de volume de A relativement à U le nombre

$$EV(A, U) = \limsup_n \frac{\text{Log } v_n(A, U)}{n \text{ Log } n}.$$

Soit V_n le volume de la boule euclidienne unité de \mathbb{R}^n . En vertu de

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \text{ et de } \Gamma(\frac{n}{2} + 1) \sim \sqrt{2\pi} (\frac{n}{2} + 1)^{\frac{n}{2} + 1} e^{-(\frac{n}{2} + 1)} \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2} + 1}}$$

$$\text{on a } EV(A,U) = \frac{1}{2} \limsup_n \frac{\text{Log } v_n(A,U)}{-\text{Log } V_n} .$$

Remarque 1 : Si $d_0 = d_0(A,U) < +\infty$, si $x \in A$ et si $E_n \in \mathcal{E}_n$

$$\inf_{y \in E_n} p_U(x-y) = \inf_{y \in E_n} p_U(x-y) .$$

$$p_U(y) \leq 2d_0$$

En effet, il est clair que le premier membre est inférieur au second et que $\inf \{p_U(x-y) ; y \in E_n, p_U(y) \leq 2d_0\} \leq d_0$. En outre

$$p_U(x-y) \geq p_U(y) - p_U(x) \geq p_U(y) - d_0, \forall x \in A, \forall y \in E_n .$$

Donc, $p_U(y) > 2d_0 \Rightarrow p_U(x-y) > d_0$. cqfd

Remarque 2 : Soit $T \in \mathcal{L}_n(E)$, rang $T = n$ et soit T_1 un isomorphisme de $T(E)$ sur un autre espace vectoriel F ; en posant $S = T_1 \circ T$ on a

$$\frac{m_{TE}(\overline{TA})}{m_{TE}(\overline{TU})} = \frac{m_{SE}(\overline{SA})}{m_{SE}(\overline{SU})} .$$

Donc, on peut remplacer les $T \in \mathcal{L}_n(E)$ par des applications linéaires continues dans un espace de dimension n , quelconque. En particulier, si E est un Hilbert, au lieu de prendre $\mathcal{L}_n(E)$ on peut prendre la famille des projecteurs orthogonaux de rang n .

Remarque 3 : Dans le cas où E est un Hilbert dont la boule unité est U , Dudley a défini un exposant de volume par

$$E'V(A,U) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } V'_n}{n \log n}$$

où $V'_n = \sup \{m'_{PE}(PA) ; P \text{ projecteur orthogonal de rang } n\}$ et m'_{PE} est la

mesure de Haar sur PE telle que $m'_{PE}(PE \cap U)$ est égal au volume de la boule euclidienne unité de \mathbb{R}^n . Il est clair que

$$EV(A,U) = E'V(A,U) + \frac{1}{2} .$$

Remarque 4 : Etant donné un espace vectoriel normé E , on peut définir un autre $n^{\text{ième}}$ volume en posant

$$w_n(A) = \sup_{E_n \in \mathcal{E}_n} \frac{m_{E_n}(\overline{A \cap E_n})}{m_{E_n}(\overline{U \cap E_n})} .$$

et un autre exposant de volume, à savoir

$$EW(A) = \limsup_n \frac{\text{Log } w_n(A)}{n \text{ Log } n} .$$

Le problème se pose de comparer EV et EW . Si E est un Hilbert et si P_{E_n} est la projection orthogonale sur E_n , on a $P_{E_n} U = U \cap E_n$ et $P_{E_n} A \supset A \cap E_n$, donc

$$w_n(A) \leq v_n(A) .$$

Mais, si E est un normé quelconque on ne peut rien dire car $TA \supset A \cap E_n$ et $TU \supset U \cap E_n$, si T est un projecteur sur E_n .

2) Propriété des $n^{\text{ièmes}}$ épaisseurs

Remarquons tout d'abord que si $A \subset E' \subset E$, où E' est un sous-espace de E , on a

$$d_n(A, U \cap E') \geq d_n(A, U) .$$

En outre :

- $d_n(A, U)$ est une fonction croissante de A et décroissante de n et U .
- Si $T : E \rightarrow F$ est linéaire et surjective, alors

$$d_n(TA, TU) = d_n(A, T^{-1}TU) \leq d_n(A, U) .$$

Cela résulte immédiatement du fait que $p_{T^{-1}TU}(x) = p_{TU}(Tx)$

- Si E est un espace vectoriel normé de boule unité U, on a si $A \subset E$

$$\underline{d_n(A, U) = d_n(A, \hat{U})} \quad (1)$$

Preuve : On a toujours $d_n(A, U) \geq d_n(A, \hat{U})$. Si $d_n(A, \hat{U}) = +\infty$, (1) est triviale. Supposons donc $d_n(A, \hat{U}) < +\infty$. Alors, il existe un sous espace vectoriel E_n de E de dimension n tel que

$$\sup_{x \in A} \inf_{\substack{y \in E_n \\ p_{\hat{U}}(y) \leq 2d_0}} p_{\hat{U}}(x - y) \leq d_n(A, \hat{U}) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

D'autre part, il existe $f_i \in (\hat{E})'$ $i = 1, 2, \dots, n$ et $e_1, e_2, \dots, e_n \in \hat{E}$ tels que

$$p_{\hat{U}}(e_i) = p_{U^0}(f_i) = 1 \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^n \langle y, f_i \rangle e_i, \quad \forall y \in E_n .$$

Soit alors $a_i \in E$ ($i = 1, \dots, n$) tels que

$$p_{\hat{U}}(e_i - a_i) \leq \frac{\varepsilon}{4nd_0} .$$

Si E'_n est le sous espace vectoriel engendré par les a_i ($1 \leq i \leq n$)

$$\inf_{y' \in E'_n} p_{\hat{U}}(x - y') \leq \inf_{y \in E_n} p_{\hat{U}}(x - \sum_{i=1}^n \langle y, f_i \rangle a_i) \leq d_n(A, \hat{U}) + \varepsilon .$$

cqfd

Corollaire : Avec les notations déjà utilisées, on a (U disque absorbant dans l'espace vectoriel E, $A \subset U$, \hat{U} boule unité de \hat{E}_U)

$$d_n(A, U) = d_n(\pi_U A, \pi_U U) = d_n(\pi_U A, \hat{U}) .$$

- Si E est un e.v.n., $A \subset E$, alors A est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie si et seulement si il existe n tel que $d_n(A, U)$

- Soit E un e.v.t.l.c et U un système fondamental de voisinages de 0 disques fermés. On a :

A borné $\Leftrightarrow d_0(A, U) < +\infty, \forall U \in \mathcal{U}$;

A précompact $\Leftrightarrow d_0(A, U) < +\infty$ et $d_n(A, U) \downarrow 0, \forall U \in \mathcal{U}$;

$d_n(A, U) = d_n(A, \tilde{U}), \forall U \in \mathcal{U}$.

Donnons un exemple d'application de ces propriétés : soit H un Hilbert et $\mathcal{L} : H \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ une fonction aléatoire associée à la mesure cylindrique gaussienne normale sur H. Soit $A \subset H$ dénombrable et bornée telle que

$$P\left\{ \sup_{x \in A} |\mathcal{L}(x)| < +\infty \right\} > 0 .$$

Je dis que A est précompacte. Posons $d_n(A) = d_n(A, U)$ (U boule unité de H). Supposons que A n'est pas précompacte : il existe $\alpha > 0$ tel que $d_n(A) > \alpha, \forall n$. Donc :

$$\forall n, \exists E_n \in \mathcal{E}_n \text{ et } \exists x \in A \text{ tels que } \sup_{y \in E_n} \|x - y\| > \alpha .$$

On peut ainsi construire une suite $\{x_n\}$ d'éléments de A telle que si E_n est le sous-espace vectoriel engendré par les x_i ($1 \leq i \leq n$) et si P_{E_n} désigne le projecteur orthogonal sur E_n on ait

$$\|x_{n+1} - P_{E_n}(x_{n+1})\| > \alpha .$$

Posons alors $s_n = P\left\{ \sup_{i \leq n} |\mathcal{L}(x_i)| < M \right\}, 0 < M < +\infty$. Alors

$$\begin{aligned} s_n - s_{n+1} &= P\left\{ \sup_{i \leq n} |\mathcal{L}(x_i)| < M ; |\mathcal{L}(x_{n+1})| \geq M \right\} \\ &\geq P\left\{ \sup_{i \leq n} |\mathcal{L}(x_i)| < M ; \mathcal{L}(P_{E_n}(x_{n+1})) > 0 ; \mathcal{L}[x_{n+1} - P_{E_n}(x_{n+1})] > M \right\} \\ &\geq P\left\{ \mathcal{L}(x_{n+1} - P_{E_n}(x_{n+1})) > M \right\} \frac{s_n}{2} \\ &\geq \frac{s_n}{2} \int_{\frac{M}{\alpha}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \delta s_n . \end{aligned}$$

Donc $s_n(1 - \delta) \geq s_{n+1}$; d'où $s_n \leq (1 - \delta)^{n-1}$, ce qui est absurde.