

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

BRUNO LECLERC

Caractérisation, construction et dénombrement des ultramétriques supérieures minimales

Statistique et analyse des données, tome 11, n° 2 (1986), p. 26-50

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1986__11_2_26_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTERISATION, CONSTRUCTION ET DENOMBREMENT
DES ULTRAMETRIQUES SUPERIEURES MINIMALES

Bruno LECLERC

Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales
E.H.E.S.S.
54, boulevard Raspail 75270 PARIS CEDEX 06

Résumé : On caractérise les ultramétriques supérieures à une dissimilarité d sur un ensemble fini X et minimales. La caractérisation est descendante, en ce sens qu'elle porte sur les dichotomies successives induites par les ultramétriques. Lorsque d est sans ex aequo, il y a $(|X| - 1)!$ ultramétriques supérieures minimales distinctes, que l'on peut toutes construire. On en décrit quelques-unes.

Abstract : Let d be a dissimilarity on a finite set X . The minimal ultrametrics dominating d are characterized. The characterization is divisive in the sense that it bears on the successive dichotomies induced by ultrametrics. In the case where there are no ties in d , there are exactly $(|X| - 1)!$ distinct minimal dominating ultrametrics. All of them may be constructed ; several ones are described here.

Mots clés : dissimilarités, ultramétriques, arbres, cocycles.

Indices de classification STMA : 06-120, 00-030.

Manuscrit reçu le 24 avril 1986
révisé le 22 octobre 1986

0 - INTRODUCTION

Dès que l'intérêt en classification du problème de l'ajustement d'une ultramétrique à une dissimilarité d donnée est apparu, on a constaté une dissymétrie fondamentale vis-à-vis de l'ordre usuel sur les dissimilarités. Alors que l'ensemble des ultramétriques inférieures à d admet toujours un maximum u_0 , celui des ultramétriques supérieures n'a de minimum que si d est elle-même une ultramétrique. D'où le problème de caractériser, recenser et construire les ultramétriques supérieures minimales (cf. Benzécri [2], Defays [6], Jardine, Jardine et Sibson [15], Jardine et Sibson [16], Johnson [17]).

Le résultat principal présenté ici est une caractérisation de ces ultramétriques. Cette caractérisation est descendante en ce sens qu'elle porte sur les dichotomies successives associées à la hiérarchie indicée correspondant à l'ultramétrique considérée. Nous avons étudié ce problème à la suite d'une rencontre avec Bernard Van Cutsem, qui a aussi obtenu récemment une caractérisation [25,27]. Les approches et les résultats de ces travaux parallèles restent assez différents, bien que les points de vue se soient rapprochés au cours de fructueuses discussions. On montre aussi qu'il est simple de déterminer toutes les ultramétriques supérieures minimales quand d est sans ex aequo. Mais cette simplicité reste théorique, étant donné le nombre étonnamment grand de ces ultramétriques.

On part ici de certains des aspects combinatoires des ultramétriques passés en revue dans un article antérieur [19]. L'objet du paragraphe 1 est donc de faire un rappel combinatoire, où l'on se limite strictement à ce qui est nécessaire pour la suite. Au paragraphe 2, on étudie complètement le cas où d est une dissimilarité injective (sans ex aequo). On caractérise alors, en 2.1, les ultramétriques supérieures minimales ; on indique en 2.2 comment les construire ; on montre en 2.3 qu'il y en a $(n-1)!$ distinctes, si n est le nombre d'objets à classer ; pour illustrer cette diversité, on donne en 2.4 quelques règles possibles pour le choix de l'une d'entre elles. On présente aussi une mauvaise règle pour illustrer le fait que produire une ultramétrique supérieure minimale n'est pas en soi un critère de qualité pour une méthode de classification hiérarchique.

Au paragraphe 3, on considère le cas d'une dissimilarité quelconque. Il n'est pas difficile d'obtenir, en 3.1, une généralisation, un peu plus compliquée, de la caractérisation de 2.1. Par contre on signale en 3.2 que

le problème de construire les ultramétriques supérieures minimale, est équivalent à un autre, connu comme difficile : celui des équivalences maximales incluses dans une relation donnée. On termine sur des illustrations de cette difficulté, et sur quelques questions ouvertes.

On suppose connues les notions de base sur les classifications hiérarchiques nécessaires pour la lecture de l'article : la définition des hiérarchies stratifiées ou indicées et leurs liens avec les ultramétriques, le lien entre l'ultramétrie inférieure maximum et l'arbre minimum, etc. On peut les trouver dans tout bon livre sur la classification, par exemple celui de Chandon et Pinson [5]. Pour l'aspect combinatoire, l'article se suffit à lui-même pour les définitions et renvoie presque toujours aux références pour les démonstrations. Le cadre mathématique dans lequel les résultats présentés ici pourraient être généralisés est celui de la combinatoire des ensembles ordonnés (cf. Barthélemy, Leclerc et Monjardet [1], Janowitz [14], Leclerc [20]). La dissymétrie rappelée au début de cette introduction est liée au fait qu'il y a dans l'ensemble ordonné des dissimilarités, une fermeture (ici, en fait, une anti-fermeture ou une ouverture) qui fait correspondre à d son ouverture ultramétrique u_d .

1 - COCYCLES ET DECOUPES

Une classification hiérarchique, considérée du point de vue "descendant" peut être décrite comme une succession de dichotomies de l'ensemble fini X classé. Cependant, si les données sont sous forme d'un indice de dissimilarité, ce sont essentiellement les paires d'éléments de X (les *arêtes*) qui sont prises en considération pour l'obtention de cette classification. On décrit brièvement dans ce paragraphe les *cocycles*, ensembles d'arêtes correspondant aux dichotomies de X , puis les *découpes*, suite de cocycles correspondant aux classifications hiérarchiques. On rappelle enfin le lien entre les découpes et les ultramétriques.

1.1 - Cocycles sur X .

Soient X un ensemble fini ($|X| = n \geq 2$) et $X(2) = \{\{y, z\} / y, z \in X \text{ et } y \neq z\}$ l'ensemble de ses parties de cardinal 2 (*arêtes*). A tout couple (Y, Z) de parties *disjointes* de X correspond l'ensemble noté $\delta(Y, Z)$ des arêtes qui ont un élément dans Y et l'autre dans Z .

$$\delta(Y, Z) = \{\{y, z\} \in X(2) \mid y \in Y, z \in Z\}$$

On a : $\delta(Y, Z) = \delta(Z, Y)$; $\delta(Y, \emptyset) = \emptyset$; $\delta(Y, Z) = \delta(Y', Z') \iff \{Y, Z\} = \{Y', Z'\}$.

Définition.

Un *cocycle* D sur X est un ensemble d'arêtes tel qu'il existe une *bipartition* $\{Y, Z\}$ de X pour laquelle on a $D = \delta(Y, Z)$. Alors, si $y \in Y$ et $z \in Z$, on dit que D *sépare* y et z . On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des cocycles sur X et $\mathcal{D}(y, z)$ l'ensemble des cocycles sur X séparant y et z .

Remarques.

1. On a $|\mathcal{D}| = 2^{n-1} - 1$ et $|\mathcal{D}(y, z)| = 2^{n-2}$.
2. Soit $A \subseteq X(2)$. Le couple $G = (X, A)$ est un *graphe* (simple, non orienté) sur X et l'ensemble $\mathcal{D}_G$ des cocycles du graphe G est l'image, obtenue comme ci-dessus, des bipartitions de X dans l'ensemble des parties de A . Comme plus loin pour les découpes, l'expression "cocycles sur X " sera réservée au cas où $A = X(2)$, celui du graphe complet sur X .
3. La pseudo-bipartition $\{X, \emptyset\}$ et son image par δ , le "cocycle" vide sont exclus par la définition ci-dessus.
4. Pour un cocycle D sur X et deux éléments distincts $x, y \in X$, on a $D \in \mathcal{D}(y, z) \iff \{y, z\} \subset D$. Cette implication ne subsiste que dans un sens pour les cocycles d'un graphe quelconque.

La figure 1 montre deux représentations d'un cocycle $D = \delta(Y, Z)$; dans la première, les éléments de D correspondent aux arêtes renforcées dans le tracé d'un graphe ; dans la seconde, l'ensemble $X(2)$ est représenté par les éléments sur-diagonaux d'un tableau $X \times X$, où sont rangés sur les marges les éléments de Y puis ceux de Z ; les éléments du tableau correspondant à D sont alors ceux du rectangle $Y \times Z$.

Les cocycles sur X (mais non ceux d'un graphe quelconque) ont la propriété, qui sera utilisée au paragraphe 2.1 dans la démonstration du résultat principal, d'être incomparables pour l'inclusion.

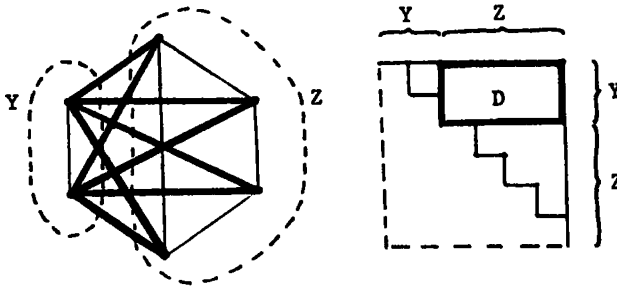


Figure 1

Proposition 1.1

Les éléments de $\mathcal{D}$ ont la propriété (S) suivante :

$$(S) \quad D, D' \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad D \subseteq D' \Rightarrow D = D'$$

Nous en omettons la démonstration (facile).

1.2 - Découps sur X.

Les découps (slicings) d'un graphe ont été introduites, à propos de problèmes de classification, par Matula [22,23]. Elle sont liées aux hiérarchies (stratifiées, binaires) comme les cocycles aux dichotomies.

Définition.

Une *découpe* $\Delta = (D^1, D^2, \dots, D^{n-1})$ sur X est une partition ordonnée de $X(2)$ telle que :

- 1) D^1 est un cocycle sur X ;
- 2) Si $\{X_1^1, X_2^1\}$ est la bipartition de X correspondant à D^1 , alors D^2 est un cocycle sur X_1^1 ou sur X_2^1 .
- 3) Pour $i = 3, \dots, n-1$, si $\{X_1^{i-1}, \dots, X_i^{i-1}\}$ est la partition de X en i classes déterminée par $D^1, D^2, \dots, D^{i-1}$, alors D^i est un cocycle sur l'une des classes X_j^{i-1} , $j = 1, \dots, i$.

Ainsi, si, par exemple, D^2 est un cocycle sur X_2^1 , il existe une bipartition $\{Y, Z\}$ de X_2^1 telle que $D^2 = \delta(Y, Z)$. Ensemble, D^1 et D^2 déterminent

une partition de X en trois classes X_1^1, Y, Z , que l'on renomme X_1^2, X_2^2 et X_3^2 . La condition 3) définit les découpes par itération de ce procédé. Clairement, D^{n-1} est l'unique cocycle de l'unique classe de la partition $\{X_1^{n-2}, \dots, X_{n-1}^{n-2}\}$ qui a deux éléments.

Les notations $\Delta, D^i, X_j^i, \dots$ employées ci-dessus seront constamment reprises par la suite. Pour une seconde découpe, on utilisera $\Delta', D'^i, X'^i_j, \dots$.

Remarques.

1. En posant que le cocycle D^i n'opère que sur une seule des classes X_j^{i-1} , on ne considère en fait que les "minimal slicings" de Matula (découpes fines dans [19]). On a pris ici ce parti comme étant le plus simple.

2. On a établi dans [19] divers liens entre les découpes, les cocycles, les arbres et les ultramétriques. Ainsi, on y a noté qu'à toute découpe

$\Delta = (D^1, \dots, D^{n-1})$ sur X correspondent plusieurs recouvrements de $X(2)$ par des cocycles $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$, tous sur X , tels que, pour $i = 1, \dots, n-1$,

$$\bigcup_{j=1}^i D_j = \bigcup_{j=1}^i D_j^i.$$

3. Un *arbre* sur X est ici un ensemble d'arêtes $A \subset X(2)$ tel que le graphe (X, A) est connexe et sans cycles (sans chemins fermés). La proposition 1.2 de [19] établit que si l'on prend une arête exactement dans chacune des classes d'une découpe sur X , on obtient un tel arbre.

4. Une *ultrapréordonnance* U sur X est un préordre total sur $X(2)$ tel que, pour tous $x, y, z \in X$ (distincts), on a $(\{x, z\}, \{x, y\}) \in U$ ou $(\{x, z\}, \{y, z\}) \in U$. La donnée d'une ultrapréordonnance équivaut à celle d'une hiérarchie stratifiée (cf. Lerman [21], Schader [24], Barthélemy, Leclerc et Monjardet [1]) ; celle d'une ultrapréordonnance U minimale pour l'inclusion à une hiérarchie stratifiée binaire, les classes de U étant les éléments d'une découpe sur X .

La figure 2.1 montre les cinq éléments successifs d'une découpe sur $X = \{x, y, z, t, v, w\}$ comme ensembles d'arêtes. La même découpe est représentée comme suite de parties d'un tableau dans la figure 2.2. La figure 2.3 donne la hiérarchie stratifiée binaire associée.

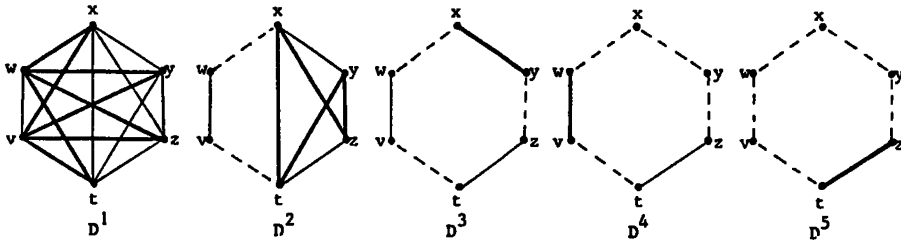


Figure 2.1

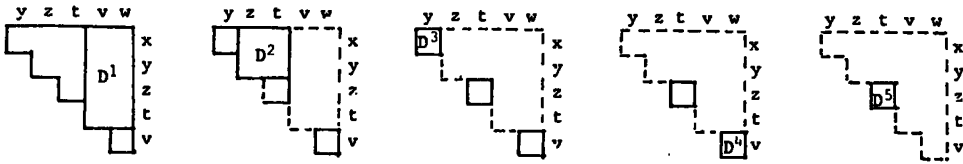


Figure 2.2

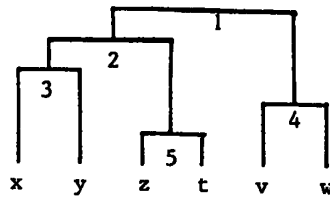


Figure 2.3

Nous terminons cette partie en introduisant une relation de voisinage entre découpes sur X .

Proposition 1.2

Soit une découpe $\Delta = (D^1, \dots, D^{n-1})$ sur X . Pour tout $i = 1, \dots, n-2$, il existe une découpe $\Delta_i^1 = (D^{i,1}, \dots, D^{i,n-1})$ sur X telle que : pour $j \neq i, i+1$, $D^{i,j} = D^j$; $D^{i,i} \supseteq D^{i+1}$; $D^{i,i+1} = (D^i \cup D^{i+1}) - D^{i,i}$.

Preuve.

Considérons la partition $X_1^{i-1}, X_2^{i-1}, \dots, X_i^{i-1}$ de X déterminée par $D^1, \dots, D^{i-1}$. On peut supposer que D^i est un cocycle sur X_1^{i-1} correspondant à une bipartition (Y, Z) de cet ensemble. D^{i+1} est donc un cocycle sur l'une des $i+1$ classes $Y, Z, X_2^{i-1}, \dots, X_i^{i-1}$. Deux cas peuvent se présenter.

Cas_1. D^{i+1} est un cocycle sur l'une des $X_2^{i-1}, \dots, X_i^{i-1}$. Alors la partition ordonnée $\Delta' = (D^1, D^2, \dots, D^{i-1}, D^{i+1}, D^i, D^{i+2}, \dots, D^{n-1})$ obtenue par échange de D^i et de D^{i+1} est encore une découpe sur X , et elle a les propriétés annoncées.

Cas_2. D^{i+1} est un cocycle sur Y ou sur Z (supposons sur Y). Soit Y_1, Y_2 la bipartition de Y déterminée par D^{i+1} . On a donc $D^i = \delta(Y, Z)$ et $D^{i+1} = \delta(Y_1, Y_2)$. Alors, si l'on pose $D'^i = \delta(Y_1, Y_2 \cup Z)$ et $D'^{i+1} = \delta(Y_2, Z)$, on vérifie que $\Delta' = (D^1, \dots, D^{i-1}, D'^i, D^i, D'^{i+1}, D^{i+2}, \dots, D^{n-1})$ est une découpe sur X possédant les propriétés voulues. $\square$

Définition.

Deux découpes Δ et Δ' sur X sont dites *i-voisines* quand elles ne diffèrent que sur deux classes consécutives D^i et D^{i+1} de Δ , D'^i et D'^{i+1} de Δ' , avec de plus $D^{i+1} \subseteq D'^i$. Alors Δ' et Δ sont aussi *i-voisines* : la relation ainsi définie est symétrique.

1.3 - Découpes et ultramétriquesDéfinition.

Une *dissimilarité* sur X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$(dr) \quad (\forall x \in X) \quad d(x, x) = 0$$

$$(ds) \quad (\forall x, y \in X) \quad d(x, y) = d(y, x).$$

Avec ces propriétés, une dissimilarité sur X est identifiable à une application de $X(2)$ dans $\mathbb{R}^+$. Une *ultramétrique* sur X est une dissimilarité vérifiant l'inégalité triangulaire ultramétrique (du) :

$$(du) \quad (\forall x, y, z \in X) \quad d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)).$$

Le rôle des ultramétries en classification, du à leur équivalence avec les hiérarchies indicées est bien connu depuis Benzécri [2]. On les a étudiées d'un point de vue combinatoire dans [19], où l'on établit notamment les résultats liant ultramétries et découpes. On rappelle ces liens dans l'énoncé suivant :

Proposition 1.3

Une dissimilarité d sur X est une ultramétrie si et seulement si il existe une découpe $\Delta = (D^1, \dots, D^{n-1})$ et un $(n-1)$ -uplet non croissant

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n-1}$ tels que :

$$(\forall x, y \in X) \quad \{x, y\} \in D^i \Rightarrow d(x, y) = \alpha_i . \quad \square$$

L'obtention de Δ à partir de l'ultramétrie d est fondée sur un résultat combinatoire : le fait qu'à tout arbre A et à toute arête $a \in A$ correspond un cocycle unique $D(A, a)$ tel que : $A \cap D(A, a) = \{a\}$. Ici, on prend pour arbre un arbre minimum (c'est-à-dire de longueur minimum) de d et on considère la famille $D_1, \dots, D_{n-1}$ des cocycles associés à A et aux arêtes de A , prises par valeurs décroissantes de d . La découpe $\Delta = (D^1, \dots, D^{n-1})$ est

$$\text{donnée par } D^i = D_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j .$$

Réciproquement, soit une découpe Δ . Une valuation des arêtes de $X(2)$ conforme à l'énoncé vérifie l'inégalité triangulaire (du). Pour $x, y, z \in X$ (distincts), si, par exemple, $\{x, y\} \in D^i$ et $\{y, z\} \in D^j$, avec $i > j$ (et donc $d(x, y) \geq d(y, z)$), alors $\{x, z\} \in D^i$ et $d(x, z) = d(x, y)$.

Si une ultramétrie u prend $n-1$ valeurs distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sur $X(2)$, la découpe Δ associée à u est unique : on a, pour $i = 1, \dots, n-1$, $D^i = u^{-1}(\alpha_i)$. La figure 3 illustre cette situation (on y retrouve la découpe de la figure 2). Le cas où u prend moins de $n-1$ valeurs distinctes sur $X(2)$ est plus complexe.

Proposition 1.4

Soient u une ultramétrie sur X prenant au plus $n-2$ valeurs distinctes sur $X(2)$, Δ une découpe et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n-1}$ associés à u . Alors, pour

tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$ tel que $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, il existe une découpe Δ^i i -voisine de Δ et associée à u avec le même α .

Preuve.

Il y a bien au moins un i tel que $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, sinon u prendrait $n-1$ valeurs distinctes. Alors, on construit Δ^i comme dans la preuve de la proposition 1.2 ci-dessus. Comme u est constante sur $D^i \cup D^{i+1} = D^i \cup D^{i+1}$, Δ^i est encore une découpe associée à u . $\square$

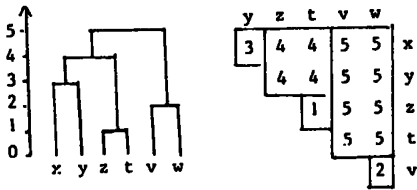


Figure 3.

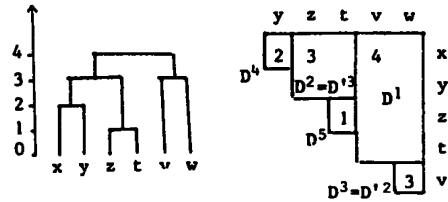


Figure 4.

En définissant les découpes i -voisines, on a vu que l'on peut avoir $D^i = D^{i+1}$ ou $D^i \supset D^{i+1}$. Seul le premier cas peut se produire si la hiérarchie associée à u est binaire (figure 4). Sinon, les partitions de $X(2)$ définies par les découpes associées à u peuvent être distinctes (figure 5).

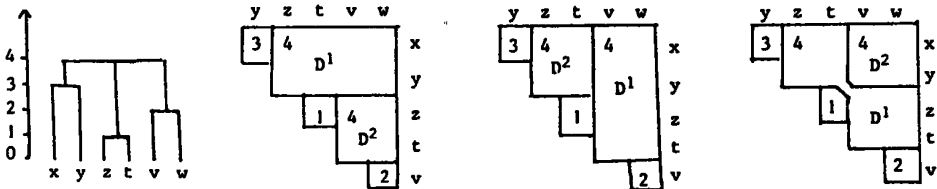


Figure 5.

2 - ULTRAMETRIQUES SUPERIEURES A UNE DISSIMILARITE INJECTIVE ET MINIMALES.

On considère une dissimilarité d sur X . On pose $h = \max\{d(x,y) / x,y \in X\}$ et, pour tout $Y \subset X$, on note $d|Y$ la restriction de d aux couples $(x,y) \in Y^2$ et $h|Y$ la valeur maximum prise par cette restriction. On adopte la convention suivante : les classes $X_1, X_2, \dots, X_k$ de toute partition de X seront désormais indicées de sorte que $h|X_1 \geq h|X_2 \geq \dots \geq h|X_k$. On pose aussi, pour tout ensemble d'arêtes $A \subseteq X(2)$, $h(A) = \max\{d(x,y) / \{x,y\} \in A\}$.

On note $\leq$ l'ordre usuel sur les dissimilarités :

$$d \leq d' \iff (\forall (x,y) \in X^2) \quad d(x,y) \leq d'(x,y).$$

Une ultramétrie u sur X est une ultramétrie supérieure minimale relativement à d ssi on a, pour toute ultramétrie u' sur X :

$$d \leq u' \leq u \Rightarrow u' = u.$$

Dans ce paragraphe, d est supposée sans ex aequo, c'est-à-dire injective sur $X(2)$: $\{x,y\} \neq \{x',y'\} \Rightarrow d(x,y) \neq d(x',y')$. Il y a alors une arête unique $\{x_1, y_1\}$ telle que $d(x_1, y_1) = h$. On va, dans cette situation, caractériser, construire et dénombrer les éléments de l'ensemble $USM(d)$ des ultramétriques supérieures minimales relativement à d .

2.1 - Caractérisation des ultramétriques supérieures minimales.

On utilise dans l'énoncé suivant les conventions et notations précisées ci-dessus, ainsi qu'au paragraphe 1.2.1.

Théorème 2.1.

Soient une dissimilarité d injective sur X , et u une ultramétrie sur X , avec une découpe $\Delta = (D^1, \dots, D^{n-1})$ et un $(n-1)$ -uplet réel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ associés à u . Les trois conditions suivantes sont équivalentes.

- (1) $u \in USM(d)$
- (2) $\alpha_1 = h$; $\{x_1, y_1\} \in D^1$; $u|X_1^1 \in USM(d|X_1^1)$; $u|X_2^1 \in USM(d|X_2^1)$
- (3) $\alpha_1 = h$; $\{x_1, y_1\} \in D^1$; pour tout $i = 2, \dots, n-1$, $\alpha_i = h|X_1^{i-1}$ et D^i contient l'arête unique $\{x_i, y_i\}$ telle que $d(x_i, y_i) = \alpha_i$.

Une ultramétrie vérifiant l'une de ces conditions a une découpe unique.

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supposons $u \in \text{USM}(d)$. On remarque que, puisque $u \geq d$, on a, pour $i = 1, \dots, n-1$, $\alpha_i \geq h(D^i)$. Evidemment, $\alpha_{n-1} = h(D^{n-1})$. De plus, si $\alpha_i > h(D^i)$, on a $\alpha_i = \alpha_{i+1}$. Sinon, en remplaçant α_i par $\alpha'_i = \max(h(D^i), \alpha_{i+1})$, on obtient un $(n-1)$ -uplet non croissant qui, avec la découpe Δ , définit, selon la proposition 1.3, une ultramétrie u' . On a alors $d \leq u' < u$ ce qui contredit (1).

On a aussi $\max d = h \leq \alpha_1 = \max u$. Supposons $h < \alpha_1$. Comme u ne peut être strictement supérieure à l'ultramétrie constamment égale à h , qui domine d , il y a un premier indice i tel que $\alpha_{i+1} \leq h$. Alors, on a $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ et $\alpha_i > h \geq h(D^i)$ ce qui, on vient de le remarquer, contredit (1). Donc $\alpha_1 = h$.

Supposons $\{x_1, y_1\} \in D^i$, avec $i > 1$. Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i = h$ et, pour $j > i$, $\alpha_j < h$ (car $\alpha_{n-1} < h$ et, pour $j = i+1, \dots, n-1$, $h(D^j) < h$). La proposition 1.4 garantit l'existence d'une découpe $\Delta' = (D'_1, \dots, D'_{n-1})$, $i-1$ voisine de Δ et associée à u , avec $\{x_1, y_1\} \in D'^{i-1}$. Alors $\alpha_i > h(D'^i)$ et $\alpha_i > \alpha_{i+1}$. On retrouve la même contradiction de (1) que précédemment. Donc $\{x_1, y_1\} \in D^1$.

Si $u|X_1^1$, qui est une ultramétrie sur X_1^1 , n'est pas dans $\text{USM}(d|X_1^1)$ il existe $u'_1 \in \text{USM}(d|X_1^1)$ telle que $u'_1 < u|X_1^1$. La dissimilarité u' définie par $u'(x, y) = u'_1(x, y)$ si $\{x, y\} \subseteq X_1^1$ et $u'(x, y) = u(x, y)$ sinon, vérifie $d \leq u' < u$. Montrons que u' est une ultramétrie. Soient $x, y, z \in X$ (distincts) ; si $x, y, z \in X_1^1$, ou si $x, y, z \in X_2^1$, leur triplet vérifie l'inégalité ultramétrique. Si $x, y \in X_1^1$ et $z \in X_2^1$ (ou si $x, y \in X_2^1$ et $z \in X_1^1$), on a $u'(x, z) = u'(y, z) = h \geq u'(x, y)$. Donc $u|X_1^1 \in \text{USM}(d|X_1^1)$. On montre de même $u|X_2^1 \in \text{USM}(d|X_2^1)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supposons que, pour un certain $i \in \{2, \dots, n-1\}$, on a :

$u|X_j^{i-1} \in \text{USM}(d|X_j^{i-1})$, pour $j = 1, \dots, i$ (cette hypothèse est posée par (2) pour $i = 2$). Alors, d'après (1) $\Rightarrow$ (2) ci-dessus, on a :

$\max\{u(x,y) / x,y \in X_j^{i-1}\} = h|X_1^{i-1}$ et $\alpha_i = \max\{h|X_j^{i-1} / j = 1, \dots, i\} = h|X_j^{i-1}$.

On a donc $\{x_i, y_i\} \subseteq X_1^{i-1}$ et $\{x_i, y_i\} \in D^i$. Alors D^i est un cocycle sur X_1^{i-1} , déterminant une bipartition $\{Y, Y'\}$ de cet ensemble, et on a :

$u|Y \in \text{USM}(d|Y)$ et $u|Y' \in \text{USM}(d|Y')$, ce qui assure que les conditions de départ se retrouvent avec $i+1$ au lieu de i . Par itération, on obtient bien (3).

(3) $\Rightarrow$ (1). Montrons d'abord que, si u et u' sont deux ultramétriques vérifiant (3) et si $u \leq u'$, alors, $u = u'$. Associons à u et à u' respectivement les découpes $\Delta = (D^1, \dots, D^{n-1})$ et $\Delta' = (D'^1, \dots, D'^{n-1})$ et les $(n-1)$ -uples réels $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ et $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1})$. D'après (3), on a :

$h = \alpha_1 > \alpha_2$ et $h = \alpha'_1 > \alpha'_2$. Donc $D^1 = u^{-1}(h)$ et $D'^1 = u'^{-1}(h)$. Alors

$u \leq u'$ implique $D^1 \subseteq D'^1$, et donc, avec la propriété (S) des cocycles sur X (proposition 1.1 ci-dessus), $D^1 = D'^1$. D'où $X_1^1 = X'^1_1$ puis, de même,

$\alpha_2 = \alpha'_2 = h|X_1^1$, $D^2 = D'^2$, etc. Finalement, on a : $u = u'$.

Maintenant, si une ultramétrique u' vérifie (3) et n'est pas dans $\text{USM}(d)$, il existe $u \in \text{USM}(d)$ telle que $u < u'$. Comme on a vu que u vérifie (3), ceci introduit une contradiction.

Enfin, à partir de (3), on voit que $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{n-1}$, et donc que, quand d est injective et $u \in \text{USM}(d)$, u a une découpe unique. $\square$

Remarque.

Selon la remarque 3 du paragraphe 1.2, les arêtes $\{x_i, y_i\}$ constituent un arbre A_u sur X . Avec les valuations $\alpha_i = d(x_i, y_i)$ correspondantes, cet arbre est un indicateur de u , qu'il permet de reconstituer entièrement : pour tous $x, y \in X$, $u(x, y)$ est le maximum des α_i sur l'unique chemin de A_u entre x et y (cf. Hubert [13]). En d'autres termes A_u est l'un des arbres minimums de $X(2)$ valué par u . Rappelons ce qu'il en est pour l'unique ultramétrique inférieure maximale. Celle-ci a de même un arbre indicateur sur lequel les valeurs de u et de d sont égales : c'est l'arbre minimum A_m , unique quand d est injective, de $X(2)$ valué par d .

2.2 - Construction des ultramétriques supérieures minimales.

D'après, ce qui précède, les ultramétriques supérieures minimales relativement à d sont exactement celles que l'on peut construire en $n-1$ étapes, conformément aux règles suivantes :

Étape_1. Soit $\{x_1, y_1\}$ l'arête unique telle que $d(x_1, y_1) = h$. On choisit pour D^1 l'un quelconque des 2^{n-2} cocycles sur X séparant x_1 et y_1 et on pose pour tout $\{x, y\} \in D^1$, $u(x, y) = h$.

Étape_i. Soit X_1^{i-1} celle des classes déterminées par $D^1, \dots, D^{i-1}$ qui maximise $h|X_j^{i-1}|$. On choisit pour D^i l'un des 2^{n_i-2} cocycles sur X_1^{i-1} séparant x_i et y_i (avec $n_i = |X_1^{i-1}|$) et on pose, pour tout $\{x, y\} \in D^i$, $u(x, y) = h|X_1^{i-1}|$.

Exemple. La table 6.1 représente une dissimilarité sur l'ensemble $X = \{x, y, z, t, v, w\}$.

Étape_1. On a $\{x_1, y_1\} = \{z, v\}$. On peut prendre pour D^1 l'un des 16 cocycles sur X séparant z et v .

On choisit par exemple $D^1 = \delta(\{xyzt\}, \{vw\})$. Alors les huit arêtes de D^1 reçoivent la valeur $h = 15$.

Étape_2. On a $h|\{xyzt\}| = 14$ et $h|\{vw\}| = 2$. Donc $X_1^1 = \{xyzt\}$ et $\{x_2, y_2\} = \{xt\}$ (cet ensemble et cette arête dépendent du choix de D^1 qui a été fait à l'étape 1). On choisit pour D^2 le cocycle $\delta(\{xy\}, \{zt\})$ sur X_1^1 , l'un des quatre qui séparent x et t . Les quatre arêtes de D^2 reçoivent la valeur 14.

Alors, il n'y a plus de choix aux étapes suivantes, car les classes X_1^2 , X_2^2 et X_3^2 ont deux éléments chacune.

Étape_3. $X_1^2 = \{x, y\} = \{x_3, y_3\}$; $h|X_1^2| = 5$; $D^3 = \{\{x, y\}\}$

Étape_4. $X_1^3 = \{v, w\} = \{x_4, y_4\}$; $h|X_1^3| = 2$; $D^4 = \{\{v, w\}\}$

Étape_5. $X_1^4 = \{z, t\} = \{x_5, y_5\}$; $h|X_1^4| = 1$; $D^5 = \{\{z, t\}\}$

La table 6.2 donne l'ultramétrie supérieure minimale obtenue, dont la découpe n'est autre que celle de la figure 2 du paragraphe 1.2.

y	z	t	v	w	
5	6	14	7	3	x
	4	12	9	13	y
		1	15	11	z
			10	8	t
				2	v

Table 6.1

y	z	t	v	w	
5	14	14	15	15	x
	14	14	15	15	y
		1	15	15	z
			15	15	t
				2	v

Table 6.2

2.3 - Dénombrement des ultramétries supérieures minimales.

Proposition 2.2

Si d est une dissimilarité injective sur un ensemble X de cardinal n , alors le nombre $|\text{USM}(d)|$ ne dépend que de n et est égal à $(n-1)!$

Preuve.

On amorce une récurrence sur n en observant que, quelle que soit d , $|\text{USM}(d)| = 1$ si $n=2$ et $|\text{USM}(d)| = 2$ si $n=3$. La première égalité est évidente. Pour la seconde, si $X = \{x, y, z\}$ et, par exemple, $d(x, y) > d(x, z) > d(y, z)$, alors $\text{USM}(d) = \{u_1, u_2\}$ avec :

$$u_1(x, y) = u_1(x, z) = d(x, y) \quad \text{et} \quad u_1(y, z) = d(y, z)$$

$$u_2(x, y) = u_2(y, z) = d(x, y) \quad \text{et} \quad u_2(x, z) = d(x, z).$$

Supposons le résultat vrai pour $|X| < n$ et montrons qu'il l'est encore pour $|X| = n$. On utilise la condition (2) du théorème 2.1. Prenons l'extrémité y_1 de l'arête qui maximise d . Choisir D^1 revient à déterminer la bipartition (X_1^1, X_2^1) ou simplement la classe de celle-ci, notée ici Y , qui contient y_1 . On peut le faire en deux étapes : en prenant d'abord le cardinal $k+1$ de Y entre 1 et $n-1$, puis en choisissant les éléments de $Y - \{y_1\}$ dans les parties à k éléments de $X - \{x_1, y_1\}$. Du fait que $u|X_1^1$ et $u|X_2^1$ sont des ultramétries supérieures minimales sur des ensembles ayant moins de n éléments, on a donc :

$$|USM(d)| = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} k! (n-k-2)! = (n-1)((n-2)!) = (n-1)!$$

C'est le résultat annoncé. $\square$

2.4 - Quelques règles de choix des D^i .

Le dénombrement précédent indique qu'on ne peut envisager en général de déterminer et de comparer systématiquement toutes les ultramétriques supérieures minimales pour choisir la meilleure selon un critère fixé. On peut par contre, envisager des heuristiques pour le choix des D^i . Nous allons en proposer quelques-unes, en se limitant en fait au choix de D^1 , puisque, les mêmes règles utilisées pour $D^2, D^3, \dots$ conduisent à l'obtention d'une ultramétrique supérieure minimale.

Signalons d'abord un problème ouvert : celui de la caractérisation descendante de l'ultramétrique du lien complet, autrement dit de la règle de choix des D^i , en commençant par D^1 , pour l'obtention de cette ultramétrique, qui correspond à un algorithme ascendant bien connu. Il serait évidemment intéressant de connaître les propriétés de la méthode du lien complet aussi bien que celles du lien simple (celle-ci a été décrite comme méthode descendante par Hubert [13] et Leclerc [18]). Une caractérisation globale de l'ultramétrique du lien complet parmi les éléments de $USM(d)$ a été donnée par Van Cutsem [26,27].

Agrégation à x_1 ou à y_1 .

Le cocycle D^1 doit nécessairement séparer les objets x_1 et y_1 . On peut donc, partant de cette opposition, prendre x_1 et y_1 comme noyaux des classes X_1^1 et X_2^1 . Par exemple, pour tout $x \in X - \{x_1, y_1\}$, on peut comparer $d(x, x_1)$ et $d(x, y_1)$ et affecter x à la classe contenant le plus proche entre x_1 et y_1 . C'est par ce procédé qu'a été construite l'ultramétrique donnée en exemple au paragraphe 2.2 ci-dessus (figure 6).

Choix du cocycle glouton.

Ici, le cocycle D^1 est choisi pour des propriétés plus globales, moins liées au seul couple (x_1, y_1) . Cette règle est donc a priori plus stable pour des

fluctuations faibles des dissimilarités $d(x,y)$. Le fait que la séparation entre X_1^1 et X_2^1 doit être bien marquée correspond à ce que d prenne, en général, de grandes valeurs sur les arêtes de D^1 . Celui-ci contient d'ailleurs la première, $\{x_1, y_1\}$ des arêtes de $X(2)$, prises par valeurs décroissantes de d . On va lui adjoindre la seconde, la troisième si elle ne forme pas un triangle avec les deux premières, etc. Il est connu (cf. Berge [3], ch.7) qu'un ensemble d'arêtes A est inclus dans un cocycle si et seulement si il ne contient pas de cycle de cardinal impair. On parcourt donc toutes les arêtes dans l'ordre de décroissance de d en réjetant celles qui forment un cycle impair avec celles précédemment retenues : c'est l'algorithme "glouton" d'où le nom de cocycle glouton que nous donnons à l'ensemble des arêtes retenues à la fin du parcours, qui est bien un cocycle.

Sans la lier aux ultramétriques supérieures minimales, Hubert [11,12] a considéré cette méthode descendante, en donnant une façon plus rapide d'obtenir D^1 , ou les classes X_1^1 et X_2^1 . On calcule d'abord l'arbre maximum A_M de $X(2)$ valué par d : il suffit de dualiser une procédure de calcul de l'arbre minimum. Alors si $x_1 \in X_1^1$, tous les voisins de x_1 dans A_M (dont y_1) sont dans X_2^1 , tous les voisins de ces voisins sont dans X_1^1 , etc.

Les familles de parties de $X(2)$ pour lesquelles, quelle que soit d , l'algorithme glouton donne une partie dont la somme des dissimilarités est minimum, sont bien connues (Gale [8], Welsh [28]), ainsi que le fait que les arbres d'un graphe constituent une telle famille, mais non les cocycles. Pour ceux-ci, l'algorithme glouton n'est qu'une heuristique.

Notons qu'on peut utiliser la distribution de Wilcoxon-Mann-Whitney (cf.e.g. Hollander et Wolfe [10]) pour voir si les $|D^1| - (n-1)$ arêtes de $D^1 - A_M$ sont, comme on le souhaite, grandes par rapport à celles de $X(2) - D^1$.

Exemple. On reprend la dissimilarité de la table 6.1. Son arbre maximum est donné par la figure 7.1 ci-après, où les éléments de X_1^1 et de X_2^1 sont respectivement représentés par des cercles pleins et vides. On a donc $D^1 = \delta(\{xyz\}, \{t,v,w\})$. En itérant, on obtient l'ultramétrique de la table 7.2.

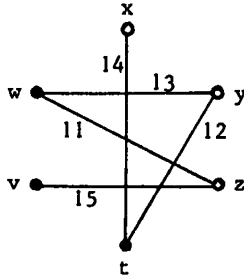


Figure 7.1

y	z	t	v	w	
6	6	15	15	15	x
	4	15	15	15	y
		15	15	15	z
			10	10	t
				2	v

Table 7.2

Ultramétriques supérieures minimales compatibles avec un ordre donné sur X.

On se donne un ordre 0 sur X, sous forme, par exemple, d'une réindicia-tion $X = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$. Une ultramétrique u sur X est *compatible* (Brossier [4],

Diday [7]) avec cet ordre ssi $1 \leq i \leq j \leq k \leq \ell \leq n \Rightarrow u(\varepsilon_j, \varepsilon_k) \leq u(\varepsilon_i, \varepsilon_\ell)$.

Alors l'ensemble A(0) des paires $\{\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}\}$, $i=1, \dots, n-1$ est un arbre minimum de $X(2)$ valué par u, ce qui équivaut à ce que chacun des D^i contient une et une seule arête de A(0) (cf. [19], §.I.2 et II.2).

Donc, si $\{x_i, y_i\} = \{\varepsilon_k, \varepsilon_\ell\}$, avec $k < \ell$, le cocycle D^1 est de la forme $D(\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i\}, \{\varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n\})$ avec $k \leq i < \ell$. Il y a $\ell - k$ possibilités, et l'on peut envisager de les examiner toutes afin de prendre la meilleure vis-à-vis d'un ou de plusieurs critères donnés. Le procédé peut être itéré, et l'on peut toujours choisir $D^2, \dots, D^{n-1}$ de façon à satisfaire la condition de compatibilité.

Proposition 2.3

Pour tous ordre total 0 et dissimilarité d sur X, il existe au moins une ultramétrique supérieure minimale relativement à d compatible avec l'ordre 0. $\square$

Exemple. Toujours avec la même dissimilarité, et avec l'ordre xyztvw, la plus grande arête étant $\{z, v\}$, le cocycle D^1 peut être soit $\delta(\{xyz\}, \{tvw\})$, soit $\delta(\{xyzt\}, \{vw\})$. Retenons le second comme ayant des arêtes plus grandes en moyenne. Le même procédé conduit à choisir pour D^2 l'un des cocycles

$\delta(\{xy\},\{zt\})$ ou $\delta(\{xyz\},\{t\})$, qui ont la même valeur moyenne de d . Avec le premier choix, on retrouve l'ultramétrie de la table 6.2 ci-dessus ; avec le second, celle de la table 8 ci-dessous.

	y	z	t	v	w
	6	6	14	15	15
Table 8		4	14	15	15
			14	15	15
				15	15
					2

Une ultramétrie supérieure minimale liée à l'arbre minimum.

On peut chercher, plutôt qu'à mettre, comme au paragraphe "Choix du cocycle glouton", de "grandes" arêtes dans D^1 , à ne pas y mettre de "petites". Par exemple, si d atteint son minimum sur $X(2)$ sur $\{x_0, y_0\}$, alors on décide que x_0 et y_0 sont dans la même classe X_1^1 ou X_2^1 , puis on recommence avec la plus petite arête restante, etc. On montre que ceci revient à couper l'arbre minimum A_m de $X(2)$ valué par d sur l'arête qui maximise d sur le chemin de A_m entre x_1 et y_1 . L'ultramétrie obtenue par ce choix de cocycles est compatible avec A_m dans un sens qui généralise celui du paragraphe précédent : elle admet A_m pour arbre minimum (avec, évidemment, des valeurs supérieures à celles de l'ultramétrie du lien simple u_0). On encadre ainsi d entre son ultramétrie inférieure maximum u_0 et une ultramétrie supérieure minimale u , de telle façon que u_0, d et u ont toutes trois A_m pour arbre minimum.

Exemple. La figure 9.1 donne l'arbre minimum de d . Sur la chaîne entre z et v de cet arbre, d a son maximum pour $d(x,y) = 5$. D'où $D^1 = \delta(\{xvw\}, \{yzt\})$. L'ultramétrie obtenue par itérations est donnée par la table 9.2.

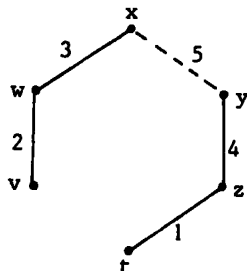


Figure 9.1

y	z	t	v	w
15	15	15	7	7
	12	12	15	15
		1	15	15
			15	15
				2

Table 9.2

Une mauvaise ultramétrie supérieure minimale.

On a produit quatre des cent vingt éléments de $USM(d)$, pour la dissimilarité d prise en exemple. L'ultramétrie du lien complet en serait une cinquième, et l'on pourrait voir que leurs ajustements à d sont de qualités comparables.

Mais l'ultramétrie supérieure minimale de la table 10 ci-dessous, qui n'a pas de valeur inférieure à 11, est bien éloignée de d (on l'a construite par une mauvaise procédure, en utilisant l'arbre minimum A_m pour mettre des "petites" arêtes dans le cocycle D^1) et son choix serait bien difficile à justifier.

y	z	t	v	w	
14	14	14	15	14	y
	13	12	15	13	z
		13	15	11	t
			15	13	v
				15	w

Table 10

3 - LE CAS GENERAL : DISSIMILARITES QUELCONQUES.

Si on ne suppose plus d injective, d atteint maintenant sa valeur maximum sur un ensemble d'arêtes H .

$$H = \{(x,y) \in X(2) / d(x,y) = h\}.$$

En général, H ne peut être recouvert par un seul cocycle sur X , ce qui conduit à considérer les ensembles d'arêtes constitués par les premiers éléments d'une découpe.

Définition.

$r = (D^1, \dots, D^k)$ est une *découpe incomplète* ssi il existe une découpe $\Delta = (D^1, \dots, D^k, D^{k+1}, \dots, D^{n-1})$.

3.1 - Caractérisation.

Les conditions ci-dessous généralisent la caractérisation (2) des USM du théorème 2.1. Une généralisation de la caractérisation (3) serait aussi possible, mais assez lourde à formuler.

Théorème 3.1.

Soient d une dissimilarité sur X et u une ultramétrie sur X avec une découpe $\Delta = (D^1, \dots, D^{n-1})$ et un $n-1$ -uplet réel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. Soit ℓ le plus petit entier tel que $H \subseteq D^1 \cup D^2 \cup \dots \cup D^\ell$. Alors u est une ultramétrie supérieure minimale relativement à d ssi elle vérifie les trois conditions suivantes :

- 1) Il n'existe pas de découpe incomplète $\Gamma = (D'^1, \dots, D'^k)$ telle que $H \subseteq D'^1 \cup \dots \cup D'^k \subset D^1 \cup \dots \cup D^\ell$.
- 2) $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_\ell = h$
- 3) Pour $j = 1, 2, \dots, \ell+1$ $u|X_j^\ell \in \text{USM}(d|X_j^\ell)$.

Preuve.

Les conditions sont nécessaires. $\alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = h$ et $u|X_j^\ell \in \text{USM}(d|X_j^\ell)$ se montrent comme pour le théorème 2.1, partie (1) $\Rightarrow$ (2). Le point nouveau est la minimalité pour l'inclusion de $D^1 \cup \dots \cup D^\ell$ comme découpe incomplète recouvrant H .

Si ce n'est pas le cas, il existe une découpe incomplète $\Gamma = (D'^1, \dots, D'^k)$ telle que $H \subseteq D'^1 \cup \dots \cup D'^k = E' \subset E = D^1 \cup \dots \cup D^\ell$. Définissons une dissimilarité u' par :

$$\begin{aligned} u'(x, y) &= h \quad \text{si } \{x, y\} \in E' . \\ u'(x, y) &= \max\{d(x, y) / \{x, y\} \in X(2) - E'\} \quad \text{si } \{x, y\} \in E - E' . \\ u'(x, y) &= u(x, y) \quad \text{si } \{x, y\} \in X(2) - E . \end{aligned}$$

Alors $d \leq u' < u$ et on vérifie cas par cas que u' est une ultramétrie.

Les conditions sont suffisantes. Comme pour le théorème 2.1, partie (3) $\Rightarrow$ 1, on remarque d'abord que deux ultramétriques u et u' vérifiant les conditions 1) et 3) sont incomparables : la minimalité des découpes incomplètes recouvrant H remplace la condition (S). Comme on vient de montrer que les éléments de $USM(d)$ vérifient ces conditions, le résultat en découle. $\square$

Remarque.

On peut montrer, à partir du résultat rappelé dans la remarque 2 du paragraphe 1.2, que si $u \in USM(d)$, alors, pour $i = 1, \dots, \ell$ on a $H \cap D^i \neq \emptyset$: il n'y a pas dans la découpe incomplète $(D^1, \dots, D^\ell)$ d'élément superflu pour le recouvrement de H .

3.2 - Construction : des problèmes ouverts.

Le résultat précédent indique comment construire par étapes une ultramétrique supérieure minimale : la première étape consiste à recouvrir H par les éléments d'une découpe incomplète dont l'union est minimale.

Mais l'ensemble des possibilités pour ce faire est bien plus difficile à explorer que dans le cas où d est injective. En effet, par passage aux complémentaires dans $X(2)$ des ensembles d'arêtes impliqués, on s'aperçoit qu'il revient au même de chercher une équivalence $\bigcup_{j=1}^{\ell+1} X_j^\ell(2)$ incluse dans $X(2) - H$ et minimale pour l'inclusion avec cette propriété (ici on identifie les équivalences à des ensembles d'arêtes). L'existence d'une telle équivalence avec un nombre de classes k fixé, ou bien de cardinal au moins égal à m fixé, sont des problèmes NP-complets connus (Garey et Johnson [9], problèmes "Partition into Cliques" et "Graph Partitioning").

Ainsi, certaines des règles de choix des D^i données au paragraphe 2.4 ne sont plus directement applicables : elles ne sont plus univoques (comme ne l'est plus le lien complet), mais surtout elles peuvent ne pas donner un élément de $USM(d)$. Ainsi, pour la dissimilarité d sur $\{x, y, z, t\}$ de la table 11, les cocycles $\delta(\{xy\}, \{zt\})$ et $\delta(\{x\}, \{yzt\})$ sont tous deux gloutons. Le choix du premier pour D^1 conduit à l'ultramétrique constante, qui n'est pas minimale. Ceci bien que d soit en fait une ultramétrique !

Cette situation de la règle du cocycle glouton qui est intéressante quand la dissimilarité d est injective, mais peut devenir franchement mauvaise lorsque ce n'est plus le cas, est extrême. Elle pose le problème de trouver des règles supplémentaires assurant le choix d'un "bon" cocycle glouton. On laisse ici cette question ouverte, ainsi que celle de l'examen des autres règles proposées en 2.4, et on termine avec un exemple.

Exemple. Pour la dissimilarité donnée par la table 12 ci-dessous, il y a 11 ensembles $E = D^1 \cup \dots \cup D^\ell$ vérifiant la condition 1) du théorème 3.1, possibles : un pour lequel $\ell = 1$ (c'est l'unique cocycle glouton qui, ici, donne un bon résultat) et dix pour lesquels $\ell = 2$. On trouve finalement dix-sept ultramétriques supérieures minimales.

y	z	t	
2	2	2	x
	2	1	y
		2	z

Table 11

y	z	t	v	w	
2	4	1	4	4	x
	4	3	3	2	y
		4	1	2	z
			3	2	t
				3	v

Table 12

4 - REFERENCES.

- [1] BARTHELEMY, J.P., LECLERC, B., MONJARDET, B., "Ensembles ordonnés et taxonomie mathématiques", in : Orders : Description and Roles, M. Pouzet et D. Richard, eds., Annals of Discrete Math. 23, Amsterdam, North-Holland, 1984.
- [2] BENZECRI, J.P., "Description mathématique des classifications" (1967), in : L'analyse des données 1. La Taxinomie, J.P. Benzécri et coll., Paris, Dunod, 1973.
- [3] BERGE, C., Graphes et hypergraphes, Paris, Dunod, 1970.
- [4] BROSSIER, G., "Représentation ordonnée des classifications hiérarchiques", Statistique et Analyse des Données 5, n°2, 1980, 31-44.

- [5] CHANDON, J.L., PINSON, S., *Analyse typologique*, Paris, Masson, 1980.
- [6] DEFAYS, D., "Ultramétries et relations floues", *Bull. Soc. Royale des Sci. de Liège* 44, n°1-2, 1975, 104-118.
- [7] DIDAY, E., "Croisements, ordres et ultramétries", *Math. Sci. hum.* 83, 1983, 31-54.
- [8] GALE, D., "Optimal assignment in an ordered set. An application of matroid theory", *J. of Combinatorial Theory* 4, 1968, 176-180.
- [9] GAREY, M.R., JOHNSON, D.S., *Computers and Intractability*, San Francisco Freeman, 1979.
- [10] HOLLANDER, M., WOLFE, D.A., *Nonparametric Statistical Methods*, New-York, Wiley, 1973.
- [11] HUBERT, L.J., "Monotone invariant clustering procedures", *Psychometrika* 38, 1973, 47-62.
- [12] HUBERT, L.J., "Spanning trees and aspects of clustering", *Br. J. of Math. Statist. Psychol.* 27, 1974, 14-28.
- [13] HUBERT, L.J., "Data analysis implications of some concepts related to the cuts of a graph", *J. of Math. Psychol.* 15, 1977, 199-208.
- [14] JANOWITZ, M.F., "An order theoretic model for cluster analysis", *SIAM J. on Applied Math.* 34, 1978, 55-72.
- [15] JARDINE, C.J., JARDINE, N., SIBSON, R., "The structure and construction of taxonomic hierarchies", *Math. Biosci.* 1, 1967, 173-179.
- [16] JARDINE, N., SIBSON, R., *Mathematical Taxonomy*, London, Wiley, 1971.
- [17] JOHNSON, S.C., "Hierarchical clustering schemes", *Psychometrika* 32, 1967, 241-254.
- [18] LECLERC, B., "An application of combinatorial theory to hierarchical classification", in : *Recent Developments in Statistics*, J.R. Barra et al., eds., Amsterdam, North-Holland, 1977.
- [19] LECLERC, B., "Description combinatoire des ultramétries", *Math. Sci. hum.* 73, 1981, 5-37.
- [20] LECLERC, B., "Indices compatibles avec une structure de treillis et fermeture résiduelle", *Rapport CMS-P.011*, Paris, CAMS-EHESS, 1984.

- [21] LERMAN, I.C., Classification et analyse ordinale des données, Paris, Dunod, 1981.
- [22] MATULA, D.W., "The cohesive strength of graphs", in : The Many Facets of Graph Theory, G. Chartrand, S.F. Kapoor, eds., Lecture notes in Mathematics 110, Berlin, Springer-Verlag, 1969.
- [23] MATULA, D.W., "k-components, clusters and slicings in graphs", SIAM J. on Applied Math. 22, 1972, 459-480.
- [24] SCHADER, M., "Hierarchical analysis : classification with ordinal object dissimilarities", Metrika 27, 1980, 127-132.
- [25] VAN CUTSEM, B., "Caractérisation des ultramétriques et des ultramétriques semi-simples minimales dominant une dissimilarité donnée", rapport de recherche n°431, Saint-Martin-d'Hères, IMAG-TIM 3, 1984.
- [26] VAN CUTSEM, B., "Quelques remarques sur l'algorithme du "lien complet" en classification automatique", rapport de recherche n°443, Saint-Martin-d'Hères, IMAG-TIM 3, 1984.
- [27] VAN CUTSEM, B., "Ultramétriques supérieures minimales et algorithme du "lien complet", in : Actes des journées de classification de la Grande-Motte (1984), C. Perruchet, ed., Paris, CNET et SFC, 1985.
- [28] WELSH, D.J.A., Matroid Theory, London, Academic Press, 1976.

Je remercie l'un des référés pour le soin avec lequel il a examiné cet article. Ses nombreuses remarques m'ont été d'une grande aide pour la mise au point du texte final.