STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

RENÉ BLACHER

Coefficients de corrélation d'ordre supérieur

Statistique et analyse des données, tome 9, nº 2 (1984), p. 48-67
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1984__9_2_48_0>

Statistiques et Analyse de Données
1984 - Vol. 9 n° 2 pp. 48-67

COEFFICIENTS DE CORRELATION D'ORDRE SUPERIEUR

René BLACHER

Université Scientifique et Médicale de Grenoble

TIM3-IMAG B.P. 68

38 402 Saint Martin d'Hères cedex

Résumé : *Nous allons faire apparaître une suite de coefficients de corrélation d'ordre (i,j) : $\{\rho_{i,j}\}_{(i,j) \in N^{*2}}$, grâce à l'emploi de bases orthonormales de polynomes: le coefficient de corrélation classique sera alors le coefficient du polynome de degré (1,1) et apparaîtra naturellement comme le premier de la suite. On obtient alors sous certaines hypothèses simples l'équivalence entre la nullité de tous les $\rho_{i,j}$ et l'indépendance. De plus, on obtient également des coefficients de corrélation empiriques d'ordre (i,j) : $\rho^n_{i,j}$, qui sont des estimateurs convergents presque sûrement des $\rho_{i,j}$ et tels que $\rho^n_{1,1}$ soit le coefficient de corrélation empirique classique.*

Abstract : *We define a sequence of correlation coefficients of order (i,j) : $\{\rho_{i,j}\}_{(i,j) \in N^{*2}}$, by means of orthonormal systems of polynomials: the classical correlation coefficient is recovered as the coefficient of the polynomial of degree (1,1) and is naturally the first of the sequence. Furthermore, we obtain sample correlation coefficients of order (i,j) : $\rho^n_{i,j}$ which are a.s. convergent estimates of $\rho_{i,j}$ and such $\rho^n_{1,1}$ is the classical sample correlation coefficient.*

Mots-clés : *Coefficient de corrélation, indépendance, polynomes orthogonaux.*

L'idée de l'étude et de la définition des coefficients de corrélation d'ordre supérieur nous est venue lorsque nous avons trouvé dans un cas particulier [2] les propriétés 2-2 et 2-3 ci-après. Ces propriétés suggèrent en effet immédiatement que les $\rho_{i,j}$ définis par 1-1 complètent le coefficient de corrélation classique égal à $\rho_{1,1}$ et comblent ses lacunes en ce qui concerne l'indépendance. L'ensemble des propriétés des $\rho_{i,j}$ étudiées dans la suite de la partie 2 , ainsi que celles de leurs estimateurs, les coefficients de corrélation empiriques d'ordre (i,j) étudiés en partie 3, montrent que leur appellation est parfaitement justifiée. Auparavant nous aurons démontré dans la première partie les propriétés mathématiques nécessaires à cette étude. Enfin, dans une dernière partie nous étudierons quelques cas particuliers, dont le cas gaussien.

Signalons enfin que cette étude a été effectuée en détail dans notre thèse [1] et qu'elle a été poursuivie dans un rapport de recherche [2] où nous introduisons également les variances d'ordre supérieur.

NOTATIONS

Dans cet article (X,Y) représentera un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de loi Q , et de lois marginales μ' et μ'' .

On notera par T_i' $i=1,2$ le plus grand élément de $\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ tel que

$$\forall \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad n < T_1' \quad : \quad \int |x^{2n}|.\mu'(dx) < +\infty \quad ,$$

$$\text{et} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad n < T_2' \quad : \quad \int |y^{2n}|.\mu''(dy) < +\infty \quad .$$

Nous noterons par n_1 et n_2 la dimension des espaces respectivement : $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu'')$. Celles-ci pourront éventuellement être infinies .

Et nous noterons par $T_i = \min(T'_i, n_i)$, pour $i = 1,2$.

Dans ces conditions $\mathbb{N}'$, $\mathbb{N}''$, $\mathbb{N}'^*$, $\mathbb{N}''^*$, $\underline{\mathbb{N}^2}$ et $\underline{\mathbb{N}^{*2}}$ désigneront les ensembles suivants :

$\mathbb{N}' = \{n\in\mathbb{N} \mid n<T_1\}$, $\mathbb{N}'^* = \mathbb{N}'\cap\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}'' = \{n\in\mathbb{N} \mid n<T_2\}$ et $\mathbb{N}''^* = \mathbb{N}''\cap\mathbb{N}^*$,

$\underline{\mathbb{N}^2} = \mathbb{N}'\times\mathbb{N}''$ et $\underline{\mathbb{N}^{*2}} = \mathbb{N}'^*\times\mathbb{N}''^*$.

De plus, nous noterons par $\mathcal{B}_p$ la tribu des boréliens dans $\mathbb{R}^p$, $p=1,2$; et par $\mathbb{R}[U,V]$ (resp. $\mathbb{R}[U]$) l'anneau des polynomes sur $\mathbb{R}$ à deux (resp. une) variables .

1 : QUELQUES PROPRIETES MATHEMATIQUES

Nous rappelons d'abord quelques propriétés nécessaires à notre étude.

__Lemme I-1__ : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et soit m une probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}_1)$, alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes .

1) : $\dim(\mathcal{L}^2(\mathbb{R},m)) = p$.

2) : Il existe $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{card}(\mathcal{X}) = p$:

$$\mathcal{X} = (x_1,x_2,\dots,x_p) \text{ vérifiant}$$

$m(\{x_i\}) = \lambda_i > 0$, pour $i = 1,2,\dots,p$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$;

$$m = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, \delta_{\{x_i\}} \qquad \text{où } \delta_{\{x_i\}} \text{ représente la mesure de Dirac en } x_i$$

On démontre cette propriété classique (1-2,[1]) en considérant le nombre maximal q de boréliens disjoints B_i de mesure non nulle, et on montre alors que $q=p$.

<u>Lemme 1-2</u> : Soit $t \in \mathbb{N}^*$, $t < T_1$, alors la famille $\{ X^i \}$, $i = 0,1,\ldots,t$, $X^i \in \mathbb{R}[U]$, est une famille linéairement indépendante de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')$.

Pour démontrer ce lemme (1-3, [1]) , on considère l'ensemble A_0 des zéros d'un polynome de degré t, nul dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')$, et l'on montre que $\text{card}(A_0) > t$, ce qui permet de conclure qu'il est nul dans $\mathbb{R}[U]$.

En rappelant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on en déduit alors la

<u>Proposition 1-2</u> : Il existe une famille orthonormale de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')$:

$$\{ \Pi_i^{\mu'} \} , \; i \in \mathbb{N} , \; i < T_1 , \; \Pi_i^{\mu'} \in \mathbb{R}[U] ,$$

$$\text{telle que } \quad \Pi_0^{\mu'} \equiv 1 ,$$

$$\Pi_i^{\mu'}(x) = \frac{x^i - \sum_{s=0}^{i-1} \langle x^i , \Pi_s^{\mu'} \rangle \cdot \Pi_s^{\mu'}(x)}{\sqrt{\langle x^i , x^i \rangle - \sum_{s=0}^{i-1} \langle x^i , \Pi_s^{\mu'} \rangle^2}} .$$

Nous allons maintenant généraliser ces notations aux cas des lois de probabilité autres que μ' . Ensuite, nous introduirons les polynomes orthogonaux sur $\mathbb{R}^2$ après avoir explicité les trois premiers polynomes associés à μ' .

1-4 Généralisation des notations : Pour tout $q \in \mathbb{N}$, nous noterons par $\mathcal{M}_q$ l'ensemble des probabilités m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ telles que

$$\dim(\mathcal{L}^2(\mathbb{R},m)) > q \qquad \text{et} \qquad \int |x^{2q}| . m(dx) < +\infty \quad .$$

Alors, pour tout $q \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathcal{M}_q$, pour tous entiers naturels i et i' vérifiant $i \leq q$ et $i' \leq 2q$, nous noterons par π_i^m le polynome orthonormal de degré i associé à m : on le construit par la formule de Gram-Schmidt. Il est explicité en 1-3 si l'on remplace μ' par m.

On note alors sa décomposition canonique par $\pi_i^m(x) = \sum_{t=0}^{i} a_{i,t}^m . x^t$,

et le moment d'ordre i' par $M_{i'}^m = \int x^{i'} . m(dx)$.

Lemme 1-5 : Alors, il existe une suite d'applications $\{ g_{r,s} \}$, $(r,s) \in \mathbb{N}^2$, $s \leq r$ de $\mathbb{R}^{2r+1}$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$\forall q \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathcal{M}_q$, $\forall (i,t) \in \mathbb{N}^2$: $t \leq i \leq q$,

on ait $a_{i,t}^m = g_{i,t}(M_0^m, M_1^m, M_2^m, \ldots\ldots\ldots, M_{2i}^m)$.

De plus $g_{i,t}$ est continue en tout point de la forme $(M_0^m, M_1^m, M_2^m, \ldots\ldots, M_{2i}^m)$.

La démonstration de ce lemme est presque évidente. Il suffit pour s'en convaincre d'écrire les premiers polynomes π_i^m (cf par exemple 1-3). La continuité provient de ce que les dénominateurs sont toujours différents de zéro, car ils représentent la distance dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},m)$ du monome x^i au sous-espace des polynomes de degré strictement inférieur à i .

<u>Notations 1-6</u> : Nous noterons désormais par :

$$\{P'_i\} \text{ , } i \in \mathbb{N}' \quad \text{et} \quad \{P''_j\} \text{ , } j \in \mathbb{N}'' \text{ ,}$$

les familles de polynomes orthonormaux définies en 1-1 de

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu') \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu'') \text{ ,}$$

En simplifiant M'_i en M_i , on trouve en particulier :

$$P'_0 \equiv 1 \quad , \quad P'_1(x) = \frac{x - M_1}{\sqrt{M_2 - M_1^2}} = \frac{x - E(X)}{\sigma_X} \text{ ,}$$

$$P'_2(x) = \frac{x^2 - \dfrac{(M_3 - M_1 . M_2).(x - M_1)}{M_2 - M_1^2} - M_2}{\sqrt{M_4 - \dfrac{(M_3 - M_1 . M_2)^2}{M_2 - M_1^2} - M_2^2}}$$

Nous noterons aussi par $P'_i \otimes P''_j$, $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, l'élément de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,\mu' \otimes \mu'')$ défini par : $P'_i \otimes P''_j\,(x,y) = P'_i(x).P''_j(y)$.

Il est clair que la famille $\{ P'_i \otimes P''_j \}$, $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, est une famille orthonormale de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mu' \otimes \mu'')$.

<u>Rappel 1-7</u> : Cette famille est une base si et seulement si $\{P'_i\}_{i \in \mathbb{N}'}$ est une base de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')$ et $\{P''_j\}_{j \in \mathbb{N}''}$ est une base de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu'')$.

La démonstration est donnée en p 114 [6] ou en 2-1 [2] .

2 : DEFINITION ET PROPRIETES DES COEFFICIENTS DE CORRELATION D'ORDRE SUPERIEUR

Enonçons maintenant la définition et les propriétés immédiates qui en résultent.

Définition 2-1 : Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}$; on appelle coefficient de corrélation d'ordre (i,j) de X et Y le nombre réel $\rho_{i,j}(X.Y)$ défini par :

$$\rho_{i,j}(X,Y) = E(\ P'_i(X).P''_j(Y)\ ) ,$$

où E représente l'espérance. Lorsque il n'y a pas de confusion possible nous le noterons plus simplement $\rho_{i,j}$.

Justification de l'appellation : Les deux théorèmes suivants montrent immédiatement que la suite $\{\rho_{i,j}\}(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}$ complète le coefficient de corrélation classique égal à $\rho_{1,1}$, et comble, sous certaines hypothèses ses lacunes en ce qui concerne la mesure de la dépendance.

Ce sont ces propriétés qui nous ont d'abord suggéré de définir (et d'étudier) les $\rho_{i,j}$ comme coefficients de corrélation d'ordre (i,j) . Comme, de plus, ils ont toutes les bonnes propriétés que l'on pouvait en attendre cette appellation semble donc parfaitement justifiée.

Théorème 2-2 : Le coefficient de corrélation d'ordre $(1,1)$ est le coefficient de corrélation classique.

Théorème 2-3 : Si (X,Y) admet une densité de probabilité par rapport à $\mu' \otimes \mu''$: $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mu' \otimes \mu'')$

et si $\{P'_i\}$, $i \in \mathbb{N}'$ et $\{P''_j\}$, $j \in \mathbb{N}''$, sont des bases orthonormales, respectivement, de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu'')$,

alors

$$f = 1 + \sum_{(i,j) \in \underline{\mathbb{N}}^{*2}} \rho_{i,j} . P'_i \otimes P''_j \qquad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mu' \otimes \mu'') .$$

En effet, comme $\rho_{i,j} = \iint P'_i(x).P''_j(y).f(x,y).\mu'(dx).\mu''(dy)$,

et que $\int P'_i(x)\mu'(dx) \int f(x,y)\mu''(dy) = \int P'_i(x)\mu'(dx)$

qui est égal à 1 si $i=0$ et 0 sinon ,

il suffit d'appliquer 1-7 pour avoir le résultat .

Remarques

Proposition 2-4 : Le coefficient de corrélation d'ordre (i,j) est le coefficient de corrélation classique de $P'_i(X)$ et $P''_j(Y)$

Remarque 2-5 : On a les égalités : $E(P'_o(X).P''_o(Y)) = 1$ et

$E(P'_o(X).P''_n(Y)) = E(P'_n(X).P''_o(Y)) = 0$, si $n \neq 0$

Normalité

La propriété suivante est la généralisation du cas classique. C'est une conséquence simple de 2-4 .

Théorème 2-6 : Soit $(i,j) \in \underline{\mathbb{N}}^{*2}$; alors $|\rho_{i,j}| \leq 1$, l'égalité $\rho_{i,j} = \varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$ ayant lieu si et seulement si $P'_i(X) = \varepsilon P''_j(Y)$ p.s.

Rapport avec l'indépendance

Nous allons voir que, sous certaines hypothèses simples, nous aurons la réciproque du corollaire suivant de 2-4 :

Théorème 2-7 : Si X et Y sont indépendantes, alors, pour tout $(i,j) \in \underline{N}^{*2}$, $\rho_{i,j} = 0$

Le théorème 2-3 nous fournit immédiatement une première réciproque :

Théorème 2-8 : Avec les hypothèses de 2-3 et si pour tout $(i,j) \in \underline{N}^{*2}$, $\rho_{i,j} = 0$, alors X et Y sont indépendantes.

Nous allons voir que si $\dim(\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')) < +\infty$, nous pouvons nous ramener à ce cas : c'est le

Théorème 2-9 : Supposons que $\dim(\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')) = p < +\infty$ alors (X,Y) admet une densité de probabilité f par rapport à $\mu' \otimes \mu''$: $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,\mu' \otimes \mu'')$.

Démonstration : D'après l'hypothèse μ' est concentrée en p points distincts : x_i, $i = 1,2,\dots,p$.

Gardons alors les notations de 1-1, et écrivons :

$$\mu' = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, \delta_{\{x_i\}}$$

Soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et $B \in \mathcal{B}_2$ tels que $\mu' \otimes \mu''(B) \leq \eta$.

Définissons alors B_i par : $B_i = B\cap(\{x_i\}\times\mathbb{R})$.

On trouve alors que $\mu''(B_i') < \dfrac{\eta}{\inf\limits_{i=1,2,\dots,p} (\lambda_i)}$,

et on en déduit que : $Q(B) < \dfrac{p.\eta}{\inf(\lambda_i)}$.

Cette dernière inégalité prouve que Q est absolument continue par rapport à $\mu' \otimes \mu''$, et admet une densité f

Comme $\int f.d\mu' = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i.f(x_i,y) = 1 \quad \mu''$-p.s. ,

on peut supposer $\int f(x,y)\mu'(dx) = 1$ pour tout y .

Alors $f(x_i,y) < \dfrac{1}{\inf(\lambda_i)}$,

et donc f est borné , et donc $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,\mu' \otimes \mu'')$. C.Q.F.D.

Enfin le théorème 2-10 nous fournit une dernière réciproque, la plus simple, certaines hypothèses étant alors automatiquement vérifiées.

<u>Théorème 2-10</u> : soit K un compact de $\mathbb{R}$,

et supposons que $\mu' \otimes \mu''$ soit concentrée sur K^2 ,

alors si pour tout $(i,j) \in \underline{\mathbb{N}^{*2}}$, $\rho_{i,j} = 0$,

X et Y sont indépendantes .

<u>Démonstration</u> : il est clair que dans ce cas $T_1' = T_2' = +\infty$.

<u>Supposons T_1 fini</u> (par exemple) .

Alors , on déduit de 1-2 que la famille $\{P_i'\}_{i=0,1,\ldots,n_1-1}$ est une base de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')$.

Si T_2 est fini $\{P_j''\}$, $j = 0,1,\ldots,n_2-1$, sera également une base de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu'')$.

Sinon le théorème de Stone-Weierstrass permet d'obtenir le même résultat .

Il suffit alors d'appliquer 2-9 et 2-8 pour achever la démonstration .

<u>Supposons alors $T_1 = T_2 = +\infty$</u> .

On montre d'abord que

$\iint P_i' \otimes P_j''.dQ = 0$ si $(i,j) \neq (0,0)$ et 1 sinon ,

i.e. $\iint P_i' \otimes P_j''.dQ = \iint P_i' \otimes P_j''\, d(\mu' \otimes \mu'')$.

Soit g une application continue de K^2 dans $\mathbb{R}$.

D'après Stone-Weierstrass , on sait qu'il existe une suite

$\{g_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ où $g_p \in \mathbb{R}[U,V]$, et , vérifiant

$$\lim_{p\to\infty} \left(\sup_{(x,y)\in K^2} \left| g_p(x,y) - g(x,y) \right| \right) = 0 .$$

Cela permet de démontrer que $\iint g.dQ = \iint g.d(\mu' \otimes \mu")$.

Soit alors R^* un rectangle compact de X^2 .

On sait qu'il existe une suite de fonctions continues $\{h_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $|h_n| \leq 1$, telle que $h_n = 1$ sur R^* et $h_n = 0$ sur l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de distance à R^* supérieure ou égale à $\frac{1}{n}$.

Et, vu le résultat ci-dessus on trouve que $\mu' \otimes \mu" (R^*) = Q(R^*)$

On en conclut que $\mu' \otimes \mu" = Q$.

<u>Remarque 2-11</u> : Citons deux cas où la condition
" $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^{*2} : \rho_{i,j} = 0$ "
n'implique pas l'indépendance de X et Y :

1°) Le cas où $\dim(\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')) > T_1$:
ainsi lorsque μ' suit une loi de Cauchy de densité $\frac{1}{\pi.(1+x^2)}$.

2°) Le cas où $T_1 = +\infty$ et où la famille $\{P_i'\}$, $i \in \mathbb{N}$.
n'est pas une base de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mu')$ (cf 17-5,[14] ou 2-5,[13]) .

<u>Remarque 2-12</u> : Lorsque $n_1=1$, i.e. $P(X=x_1) = 1$, les deux variables X et Y sont indépendantes , et l'on peut dans ce cas convenir $\rho_{i,j}(X,Y) = 0$. On peut donc généraliser la définition des $\rho_{i,j}$ au cas $n_1 \leq i_0 < T'_1 = +\infty$, en posant alors $\rho_{i_0,j} = 0$.

Type de dépendance mesurée par les $\rho_{i,j}$ –

2-13 : De même que l'on peut dire que $\rho_{1,1}$, le coefficient de corrélation classique, mesure la dépendance linéaire (lorsque il est égal à 1 , on a une équation du type $aX + bY + c = 0$), on peut, en considérant 2-6 , dire que chaque $\rho_{i,j}$ mesure une dépendance particulière: $\rho_{1,2}$, $\rho_{2,1}$, $\rho_{2,2}$ des dépendances quadratiques , $\rho_{1,3}$, $\rho_{2,3}$, $\rho_{3,3}$, $\rho_{3,2}$ et $\rho_{3,1}$ des dépendances cubiques, etc......

En effet, l'égalité $\rho_{1,2}=1$ par exemple, est équivalente à l'égalité:

$$P_1'(X) = P_2''(Y) \quad \text{p.s.} \quad .$$

De plus, nous allons voir maintenant que les $\rho_{i,j}$ considérés comme paramètres, sont "presque indépendants" les uns des autres.

2-14 Remarquons donc que la liberté de choix des $\rho_{i,j}$ est relativement large , et que (X,Y) dépend d'une infinité dénombrable de paramètres "presque " indépendants les uns des autres (dans les cas où $N = N'$ ou N'' bien sûr!) .

En effet , toute suite $\{\rho'_{i,j}\}$, $(i,j) \in \underline{N}^{*2}$, telle que

$$\sum_{(i,j) \in \underline{N}^{*2}} \rho'^2_{i,j} < +\infty ,$$

et que $$\underline{g} = 1 + \sum_{(i,j) \in \underline{N}^{*2}} \rho'_{i,j} . P_i' \otimes P_j'' > 0 ,$$

définit une fonction $f = g$, $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mu' \otimes \mu'')$, qui est une densité par rapport à $\mu' \otimes \mu''$ d'une probabilité Q de lois marginales μ' et μ'' .

La proposition suivante permet de préciser un peu cette liberté de choix des $\rho_{i,j}$.

<u>Proposition 2-15</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2n < \inf(T_1,T_2)$, alors il existe un hypercube C de $\mathbb{R}^{n^2}$ de mesure borélienne non nulle tel que

$\forall\ r \in C\ :\ r = (r_{2i,2j})\ ,\ (i,j) \in (1,2,\ldots,n)^2$,

on ait

$$1 + \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{j=n\\i=n}} r_{2i,2j} . P'_{2i} \otimes P''_{2j} > 0 .$$

On effectue la démonstration en remarquant $P'_{2i} \otimes P''_{2j}$ est toujours positif à l'extérieur d'un compact K . Il suffit donc d'imposer aux $r_{2i,2j}$ d'être assez petits pour vérifier l'inégalité ci-dessus à l'intérieur de K .

<u>Remarque 2-15</u> : Nous venons d'affirmer que la liberté de choix des $\rho_{i,j}$ était relativement large , mais il est clair que le choix de certains coefficients peut en déterminer d'autres : ainsi si $\rho_{1,1} = \rho(X,Y) = 1$ (remarquons que dans ce cas , il n'y a pas de densité de probabilité)

3 : COÉFFICIENTS DE CORRELATION EMPIRIQUES D'ORDRE SUPERIEUR

Comme on pouvait le souhaiter , nous allons trouver des estimateurs $\rho_{i,j}^{n}$ convergents presque sûrement et tels que $\rho_{1,1}^{n}$ soit le coefficient de corrélation empirique habituel .

<u>3-1 :Notations</u> : Soit (X_p, Y_p) , $p = 1,2,\ldots,n$, un n-échantillon du vecteur aléatoire (X,Y) .

Nous noterons par n' et n'' les entiers :

$n' = \mathrm{card}(X_p \mid p = 1,2,\ldots,n)$ et $n'' = \mathrm{card}(Y_p \mid p = 1,2,\ldots,n)$,

et par μ'_n et μ''_n les probabilités empiriques associées :

$$\mu'_n(\{x\}) = \frac{\mathrm{card}(\ X_p = x \mid p \in (1,2,\ldots,n)\ )}{n} .$$

Enfin soient $\{P_i'^n\}$, $i = 0,1,\ldots,n'-1$, et $\{P_j''^n\}$, $j = 0,1,\ldots,n''-1$, les polynomes orthonormaux associés aux mesures μ'_n et μ''_n (1-4) .

<u>3-2 : Définition</u> : Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}$, tel que $i < n'$ et $j < n''$, nous appellerons coefficient de corrélation empirique d'ordre (i,j) - associé au n-échantillon (X_p, Y_p) , $p = 1,2,\ldots,n$ - le nombre réel $\rho_{i,j}^{n}$ défini par :

$$\rho_{i,j}^{n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{p=1}^{n} P_i'^n(X_p) . P_j''^n(Y_p) \right) .$$

Dans le cas où $i \geq n'$ ou $j \geq n''$, nous définirons alors le coefficient de corrélation empirique par $\rho_{i,j}^{n} = 0$ (cf 2-12).

On peut alors énoncer le

<u>Théorème 3-3 :</u> Les coefficients de corrélation empiriques d'ordre supérieur ont les propriétés suivantes :

1°) Si $(1,1) \in \underline{N^{*2}}$, alors $\rho_{1,1}^{n}$ est le coefficient de corrélation empirique classique.

2°) Soit $(i,j) \in \underline{N^{*2}}$, alors $|\rho_{i,j}^{n}| \leq 1$.

3°) Soit $(i,j) \in \underline{N^{*2}}$, alors $\rho_{i,j}^{n}$ converge presque sûrement vers $\rho_{i,j}$.

<u>Démonstration :</u> La première assertion est presque évidente.

La deuxième, c'est le théorème 2-6 dans le cas des probabilités empiriques.

Démontrons donc la troisième.

Rappelons d'abord que $P(n' < N_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, pour tout $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 < n_1$.

Et notons

$$P_i'(x) = \sum_{s=0}^{i} A_{i,s} \cdot x^s \quad , \quad P_i'^{n}(x) = \sum_{s=0}^{i} a_{i,s}^{n} \cdot x^s \quad ,$$

$$M_i' = \int x^i \cdot \mu'(dx) \quad , \quad m_i'^{n} = \int x^i \cdot \mu_n'(dx)$$

alors d'après 1-5 ,

$$a_{i,s}^{n} = g_{i,s}(m_0'^{n}, m_1'^{n}, \ldots\ldots, m_{2i}'^{n}) ,$$

$$A_{i,s} = g_{i,s}(M_0', M_1', \ldots\ldots, M_{2i}') .$$

Or $m_i'^{n}$ converge presque sûrement vers M'_i (Th-8-7, [5]) , et donc , vu la continuité , $a_{i,s}^{n}$ converge presque sûrement vers $A_{i,s}$

On en déduira que $\rho_{i,j}^{n}$ converge presque sûrement vers $\rho_{i,j}$.

4 : CAS PARTICULIERS

Cas gaussien : C'est, bien sûr, le premier cas qu'il vient à l'idée d'étudier. Rappelons d'abord (pg.158,[7]) le

Théorème 4-1 : Soit $\mathcal{N}$ la loi gaussienne centrée réduite, et soit H_n le transformé du polynome d'Hermite (6-3, [1] ; 6-13, [3]) :

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n . n!}} \; e^{x^2} \; \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) .$$

Alors la famille $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{N})$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui répond à la plupart des questions posées. Il se démontre sans difficultés.

<u>Théorème 4-2</u> : On suppose $\mu' = \mu'' = \mathcal{N}$, et que (X,Y) admet une densité de probabilité f par rapport à $\mu' \otimes \mu''$, et l'on note par g l'application :

$$g(x,y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} . f(x,y) \quad ;$$

alors, g est la densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue.

De plus, si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mu' \otimes \mu'')$, alors $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$,

et on a l'égalité :

$$g(x,y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} \left(1 + \sum_{(i,j)\in \mathbb{N}^{*2}} \rho_{i,j} H_i(x).H_j(y) \right) \text{ dans } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$$

De plus, si $g(x,y) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}}$

avec $|\rho| < 1$, alors $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mu' \otimes \mu'')$,

et $\rho_{i,j}$ est une fonction $t_{i,j}$ de $\rho = \rho_{1,1}$:

$\rho_{i,j} = t_{i,j}(\rho)$ vérifiant $t_{1,1} = 1_{\mathbb{R}}$,

et les implications :

(i) "$\rho=0$" $\Longrightarrow$ "$t_{i,j}(\rho) = 0$ "

(ii) "$\rho=0$" $\Longrightarrow$ "$\exists (i,j)\in \mathbb{N}^{*2}$, $(i,j)\neq(1,1)$ tel que $t_{i,j}(\rho)\neq 0$".

<u>Remarque 4-3</u> : Cette propriété rappelle à quel point l'hypothèse gaussienne est forte : dans ce cas, on a un seul paramètre de dépendance, alors que, si l'on se contente de supposer que les lois marginales sont

gaussiennes, on en aura une infinité dénombrable.

L'équivalence, dans le cas gaussien, de l'indépendance et de la nullité du coefficient de corrélation classique ne doit donc pas surprendre, vu que c'est par construction - ou par définition - que l'on impose qu'il y ait donc un seul paramètre de dépendance.

4-4 <u>: Cas de lois exponentielles :</u> Ici, on obtient des transformés de polynomes de Laguerre (pg.154,[7] ; 6-16,[3]) qui forment une base orthonormale.

<u>Cas de lois marginales uniformes</u> : Dans ce cas, la base orthonormale est composée de polynomes de Legendre, et nous avons pu démontrer (partie 2-2-1 [1] et partie 3 [2]) le

<u>Théorème 4-5</u> : Supposons que $\mu' = \mu''$ et soit la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, et notons par $D_2^N(X,Y)$ l'indicateur de dépendance normalisé:

$$D_2^N(X,Y) = \sqrt{90 \int_0^1 \int_0^1 (F(x,y)-xy)^2 dx.dy}$$

où F représente la fonction de répartition de (X,Y).

Alors, il existe une fonction réelle ε (donnée explicitement dans [1] et [2]),

$$\text{telle que} \quad \lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0 ,$$

et telle que l'implication logique suivante soit vérifiée :

$$\text{"Soit } q\in\mathbb{N}^* : \forall (i,j)\in[1,q]^2 , \rho_{i,j}=0 \text{ ."} \implies \text{"}D_2^N(X,Y) \le \varepsilon(q) \text{ ".}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLACHER.R. (1983) Thèse 3° cycle : Indicateurs de dépendance fournis par le développement en série de la densité de probabilité. Université scientifique et médicale de Grenoble .

[2] BLACHER.R. (1982) Influence sur la dépendance des coefficients du développement en série de la densité de probabilité. R.R. n°343 I.M.A.G. Grenoble

[3] BLACHER.R. (1984) Coefficients de corrélation d'ordre (i,j) et variances d'ordre i . R.R. n° 463 , TIM3-IMAG , Grenoble

[4] CHOQUET. G. (1964) Topologie . Masson.

[5] FOURGEAUD.D. FUCHS.A. (1967) Statistique . Dunod. Paris.

[6] NEVEU (1968) Processus gaussiens. Presses de l'Université de Montréal .

[7] NATANSON.I.P. (1965) Constructive function theory, volume 2 : Approximation in mean. Frederick Ungar Pu blishing C°. New-York.