

SÉMINAIRE SAMUEL.

ALGÈBRE COMMUTATIVE

PIERRE MAZET

Caractérisation des épimorphismes par relations et générateurs

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. n° 2, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A2_0

© Séminaire Samuel. Algèbre commutative
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Samuel. Algèbre commutative » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISATION DES ÉPIMORPHISMES
PAR RELATIONS ET GÉNÉRATEURS

par Pierre MAZET

Cette caractérisation repose sur le lemme suivant (cf. BOURBAKI, Algèbre Commutative, ch. I, § 2, n° 11, lemme 10).

LEMME. - Soient A un anneau unitaire, E un A -module à droite et F un A -module à gauche ; $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de générateurs de E , $(x_i)_{i \in I}$ une famille de générateurs de F , et $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille à support fini de vecteurs de F ; alors

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda \otimes f_\lambda = 0$$

équivalent à :

Il existe $(a_{\lambda,i})_{\lambda,i \in \Lambda \times I}$, famille à support fini de scalaires telle que :

$$(\forall \lambda \in \Lambda) \quad (f_\lambda = \sum_{i \in I} a_{\lambda,i} x_i)$$

et

$$(\forall i \in I) \quad \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda a_{\lambda,i} = 0 \right) .$$

La condition est évidemment suffisante car

$$e_\lambda \otimes f_\lambda = \sum e_\lambda a_{\lambda,i} \otimes x_i .$$

La condition est nécessaire :

Soient X_λ les vecteurs de la base canonique de A -module à droite $A_d^{(\Lambda)}$, et φ le morphisme de $A_d^{(\Lambda)}$ dans E défini par $\varphi(X_\lambda) = e_\lambda$. On a la suite exacte

$$\text{Ker } \varphi \xrightarrow{i} A_d^{(\Lambda)} \xrightarrow{\varphi} E \longrightarrow 0 ,$$

d'où la suite exacte

$$\text{Ker } \varphi \otimes F \xrightarrow{j} A_d^{(\Lambda)} \otimes F \xrightarrow{\psi} E \otimes F \longrightarrow 0 ,$$

où $j = i \otimes \text{Id}_F$, $\psi = \varphi \otimes \text{Id}_F$, et

$$\psi(\sum X_\lambda \otimes f_\lambda) = \sum x_\lambda \otimes f_\lambda = 0 ,$$

donc

$$\sum X_\lambda \otimes f_\lambda \in \text{Im } j \quad .$$

Il existe donc $(v_i)_{i \in I}$, famille à support fini de vecteurs de $\text{Ker } \varphi$, telle que

$$\sum X_\lambda \otimes f_\lambda = j(\sum v_i \otimes x_i) \quad .$$

Or l'on a une décomposition

$$i(v_i) = \sum_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cdot a_{\lambda,i}$$

$(a_{\lambda,i})_{\lambda,i \in \Lambda \times I}$ à support fini, et

$$\sum X_\lambda \otimes f_\lambda = \sum X_\lambda \otimes a_{\lambda,i} x_i \quad .$$

(X_λ) étant une base de $A_d^{(\Lambda)}$, on a, pour tout λ , $f_\lambda = \sum a_{\lambda,i} x_i$, et $v_i \in \text{Ker } \varphi$ s'écrit

$$\sum e_\lambda a_{\lambda,i} = 0 \quad .$$

C. Q. F. D.

Dans la suite, les anneaux considérés seront toujours commutatifs et unitaires.

Soient alors A un anneau, et B une A -algèbre unitaire (on ne suppose ni l'associativité, ni la commutativité de B).

Pour tout A -module M , désignons par $\mathcal{E}_A(B, M)$ la partie de $B \otimes_A M$ formée par les vecteurs z tels que, pour toute double flèche de A -algèbres (unitaires)

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} C \quad ,$$

on ait, dans $C \otimes_A M$,

$$\varphi \otimes \text{Id}_M(z) = \psi \otimes \text{Id}_M(z) \quad .$$

Il est clair que $\mathcal{E}_A(B, M)$ est un sous- A -module de $B \otimes_A M$ et qu'il contient $1_B \otimes x$ pour tout x de M (nous noterons $1_B \otimes M$ le sous-module des $1_B \otimes x$).

Il est clair également que B opère dans $B \otimes M$ de telle façon que

$$b' \cdot (b \otimes m) = b'b \otimes m \quad .$$

Avec ces conventions, on peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉOREME. - Les éléments de $\mathcal{E}_A(B, M)$ sont exactement ceux qui admettent une décomposition du type $z = \sum a_{n,i} b_n z_i$, où $a_{n,i}$ est une famille à support fini de scalaires, b_n une famille d'éléments de B , z_i une famille d'éléments de $B \otimes_A M$, et, pour tout i ,

$$\sum a_{n,i} b_n \in A.1_B,$$

et pour tout n ,

$$\sum a_{n,i} z_i \in 1_B \otimes_A M.$$

En effet, si z admet une telle décomposition, et si φ, ψ est une double flèche $B \rightrightarrows C$, alors :

$$\sum a_{n,i} b_n \in A.1_B \Rightarrow \sum a_{n,i} \varphi(b_n) = \sum a_{n,i} \psi(b_n)$$

$$\sum a_{n,i} z_i \in 1_B \otimes M \Rightarrow \sum a_{n,i} \varphi \otimes \text{Id}_M(z_i) = \sum a_{n,i} \psi \otimes \text{Id}_M(z_i),$$

et alors

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \text{Id}_M(z) &= \sum_n \varphi(b_n) \sum_i a_{n,i} \varphi \otimes \text{Id}_M(z_i) \\ &= \sum_i \psi \otimes \text{Id}_M(z_i) \sum_n a_{n,i} \varphi(b_n) \\ &= \sum a_{n,i} \psi(b_n) \psi \otimes \text{Id}_M(z_i) \\ &= \psi \otimes \text{Id}_M z, \end{aligned}$$

donc $z \in \mathcal{E}_A(B, M)$.

Réciproquement, si $z \in \mathcal{E}_A(B, M)$, considérons l'algèbre $B \otimes_A B$ et les applications canoniques i_1 et i_2 de B dans $B \otimes_A B$ définies par

$$i_1(x) = 1_B \otimes x \quad i_2(x) = x \otimes 1_B.$$

Prenant alors pour double flèche particulière, la double flèche i_1, i_2 , nous aurons

$$(1) \quad i_1 \otimes \text{Id}_M(z) = i_2 \otimes \text{Id}_M(z).$$

Soit $(b_n)_{n \in \mathcal{N}}$ une famille de générateurs du A -module B . Alors z admet une décomposition du type $z = \sum b_n \otimes x_n$, où x_n est une famille à support fini dans M , et la relation (1) s'écrit :

$$1_B \otimes z - \sum b_n \otimes 1_B \otimes x_n = 0 .$$

Soit z_i est une famille de générateurs de $B \otimes_A M$; comme 1_B et les b_n engendrent B , on trouve en appliquant le lemme deux familles de scalaires $a_{n,i}$ et a_i à supports finis, telles que

$$(2) \quad z = \sum a_i z_i \quad 1_B \otimes x_n = \sum a_{n,i} z_i$$

et

$$(3) \quad a_i \cdot 1_B = \sum a_{n,i} b_n .$$

Donc

$$z = \sum a_{n,i} b_n z_i ,$$

(2) montre que $\sum a_{n,i} z_i \in 1_B \otimes M$, et (3) montre que $\sum a_{n,i} b_i \in A \cdot 1_B$.

C. Q. F. D.

Remarques. - La démonstration montre également que $\mathcal{E}_A(B, M)$ est le noyau de la double flèche

$$i_1 \otimes \text{Id}_M , \quad i_2 \otimes \text{Id}_M .$$

Un cas particulier est celui où $M = A$, alors il y a un isomorphisme canonique entre $B \otimes_A A$ et B qui identifie $\mathcal{E}_A(B, A)$ à une partie de B appelée épice-
tre de B , et notée $\mathcal{E}_A(B)$. C'est le noyau de la double flèche i_1, i_2 ; c'est donc une sous-algèbre de B . Ses éléments ont une décomposition du type

$$\sum a_{m,n} b_n b'_n ,$$

où $a_{m,n} \in A$, $b_m \in B$, $b'_m \in B$

$$\sum a_{m,n} b_m \text{ et } \sum a_{m,n} b'_n \in A \cdot 1_B .$$

Si B est associative ou commutative, il en est de même de $B \otimes_A B$; on peut donc reprendre la théorie en remplaçant "algèbre" par "algèbre associative" (ou commutative, ou les deux).

Représentation matricielle. - Soit $z = \sum a_{n,i} b_n z_i$ une décomposition d'un élément de $\mathcal{E}_A(B, M)$. Limitons les ensembles d'indice $\mathcal{N}$ et I à des parties finies $\mathcal{N}_0$ et I_0 de façon que $\mathcal{N}_0 \times I_0$ supporte $a_{n,i}$. Notons B la matrice-ligne des b_n , Z la matrice-colonne des z_i , A la matrice des $a_{n,i}$, on a :

$$[Z] = B A Z$$

avec les conditions : $B A$ à coefficients dans $A.1_B$, et $A Z$ à coefficients dans $1_B \otimes M$.

Mais si alors A' est une matrice équivalente à A ($A' = M A N$) (avec M, N à coefficients dans A), posons :

$$B' = B M^{-1}, \quad Z' = N^{-1} Z.$$

On a $[Z] = B' A' Z'$ et $B' A' = B A N$ est à coefficients dans $A.1_B$; de même $A' Z' = M A Z$ est à coefficients dans $1_B \otimes M$.

En particulier, si A est un corps, toute matrice est équivalente à une matrice du type

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & 0 & \\ \hline & & & 0 & & \\ 0 & & & & 0 & \end{array} \right];$$

donc les éléments de $\mathcal{E}_A(B, M)$ ont une décomposition du type :

$$z = \sum b_n z_n \text{ avec } b_n \in A.1_B \text{ et } z_n \in 1_B \otimes M;$$

d'où $\mathcal{E}_A(B, M) = 1_B \otimes M$, et en particulier $\mathcal{E}_A[B] = A.1_B$.

Changement d'anneau de base. - Soient $A \xrightarrow{S} A'$ un morphisme d'anneaux, B une A -algèbre unitaire et M un A -module. Par extension de l'anneau de base on définit la A' -algèbre $A' \otimes_A B = B'$ et le A' -module $A' \otimes_A M = M'$.

On sait qu'il existe alors un isomorphisme canonique entre $B' \otimes_{A'} M'$ et $(B \otimes_A M) \otimes_A A'$, donc $B \otimes_A M'$.

THÉOREME. - Cet isomorphisme identifie $\mathcal{E}_{A'}(B', M')$ et $\mathcal{E}_A(B, M)$.

Il suffit de voir que l'on a le double diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A M' & \xrightarrow{\quad} & B \otimes_A B \otimes_A M' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' \otimes_{A'} M' & \xrightarrow{\quad} & B' \otimes_{A'} B' \otimes_{A'} M' \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les doubles flèches résultant des applications canoniques

$$B \xrightarrow{\quad} B \otimes_A B \text{ et } B' \xrightarrow{\quad} B' \otimes_{A'} B';$$

et les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques. Les noyaux des doubles flèches horizontales sont donc identifiés par ces isomorphismes ; or ce sont respectivement $\mathcal{E}_A(B, M')$ et $\mathcal{E}_{A'}(B', M')$.

Applications. - Soient A un anneau, B une A -algèbre unitaire, M un A -module et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A . Désignons par K le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$ et ξ le morphisme canonique $A \rightarrow K$; il permet de définir $B' = B \otimes_A K$, $M' = M \otimes_A K$.

Si $z \in \mathcal{E}_A(B, M)$, il est clair que $z \otimes 1_K \in \mathcal{E}_A(B, M')$. Or, K étant un corps, $\mathcal{E}_K(B', M') = 1_{B'} \otimes M'$; il existe donc un élément x' de M' tel que $z \otimes 1_K$ s'identifie à $1_{B'} \otimes x'$, c'est-à-dire

$$z \otimes 1_K = 1_B \otimes x'.$$

Or tout élément x' de M' peut s'écrire $x \otimes 1/q^0$ où q^0 est la classe dans $A/\mathfrak{p}$ de q (q , élément de A , avec $q \notin \mathfrak{p}$ et $x \in M$). On a donc

$$qz \otimes 1_K = 1_B \otimes x \otimes 1_K$$

c'est-à-dire

$$[qz - (1_B \otimes x)] \otimes 1_K = 0.$$

Ceci signifie qu'il existe $r \in A - \mathfrak{p}$ avec

$$r[qz - 1_B \otimes x] \in \mathfrak{p}B \otimes M$$

en posant $rq = a$, $a \notin \mathfrak{p}$ et $rx = y$, on voit qu'il existe un $a \notin \mathfrak{p}$, avec

$$az \in 1_B \otimes M + \mathfrak{p}B \otimes M.$$

En particulier si A est intègre, on peut prendre $\mathfrak{p} = \{0\}$, et il existe $a \neq 0$ tel que $az \in 1_B \otimes M$.

Application à l'étude des morphismes d'anneaux. - On sait que se donner un morphisme unitaire d'un anneau A dans un anneau B équivaut à se donner une structure de A -algèbre sur B . Pour tout morphisme $\alpha : A \rightarrow B$, on peut donc parler de l'épicentre de B .

Cet épicentre permet de caractériser

- les morphismes stricts par $\mathcal{E}(B) = A.1_B$;

- les épimorphismes par $\mathcal{E}(B) = B$;

c'est évident d'après la définition de $\mathcal{E}(B)$.

Les résultats déjà obtenus montrent que :

- Pour que α soit un épimorphisme strict, il faut et il suffit que α soit surjectif.

- Pour que α soit un épimorphisme, il faut et il suffit que tout $z \in B$ admette une décomposition du type $z = M P N$, où M et N sont des matrices à coefficients dans B , et où P, MP, PN sont à coefficients dans A (ou $A.1_B$).

- Tout épimorphisme issu d'un corps est surjectif.

Remarque. - La deuxième remarque nous amène à considérer l'ensemble $\mathcal{C}$ des triplets (P, U, V) où P, U, V sont des matrices à coefficients dans A de dimensions respectives :

$$\begin{array}{lll} P & m \text{ lignes} & n \text{ colonnes} , \\ U & 1 \text{ ligne} & n \text{ colonnes} , \\ V & m \text{ lignes} & 1 \text{ colonne} . \end{array}$$

Nous voyons alors que si $A \xrightarrow{\alpha} B$ est un épimorphisme, pour tout z de B , on peut trouver $(P, U, V) \in \mathcal{C}$ et X, Y matrices à coefficients dans B tels que

$$(z) = X P Y, \quad X P = U.1_B, \quad P Y = V.1_B .$$

Mais si $z' \in B$ et si $X' Y'$ sont à coefficients dans B avec

$$(z') = X' P Y', \quad X' P = U.1_B, \quad P Y' = V.1_B$$

on aura :

$$(z') = X' P Y' = X P Y' = X P Y = (z) .$$

Donc, si on note $\mathcal{C}_z$ la partie de $\mathcal{C}$ formée par les éléments (P, U, V) pour lesquels il existe X et Y avec $(z) = X P Y$, $X P = U.1_B$, $P Y = V.1_B$, alors les $\mathcal{C}_z$ sont deux à deux disjoints.

En outre, l'on munit $\mathcal{C}$ des deux lois $+$ et $\circ$ ainsi définies :

$$(P, U, V) + (P', U', V') = (P'', U'', V'')$$

où :

$$P'' = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & P' \end{array} \right) \quad U'' = (U \mid U') \quad V'' = \left(\begin{array}{c} V \\ \hline V' \end{array} \right)$$

et $(P, U, V) \circ (P', U', V') = (P \otimes P', U \otimes U', V \otimes V')$, après avoir fait une convention sur l'ordre à prendre pour les vecteurs de la base du produit tensoriel.

On voit que, pour z et z' dans B , on a

$$\mathcal{C}_z + \mathcal{C}_{z'} \subset \mathcal{C}_{z+z'}, \quad \mathcal{C}_z \circ \mathcal{C}_{z'} \subset \mathcal{C}_{zz'} .$$

Ce qui montre que, si $\mathcal{C}_B = \bigcup_{z \in B} \mathcal{C}_z$, $\mathcal{C}_B$ est fermé pour les lois $+$ et $\circ$; de plus, les $\mathcal{C}_z$ forment une partition de $\mathcal{C}_B$, donc peuvent être considérés comme les classes modulo une certaine relation d'équivalence $\mathcal{R}$, qui est stable pour les lois $+$ et $\circ$, et donc que B s'identifie à $\mathcal{C}_B/\mathcal{R}$.

Donc tout épimorphisme de source A s'obtient comme quotient d'un sous-truc de $\mathcal{C}_B$. Ceci a deux conséquences importantes :

1° Pour tout anneau A , il existe un ensemble E d'épimorphismes de source A tel que, pour tout épimorphisme $\alpha : A \twoheadrightarrow B$, il existe α' de A dans B' , avec $\alpha' \in E$, et un isomorphisme $u : B' \xrightarrow{\sim} B$ tel que $\alpha = u \circ \alpha'$.

2° Si A est infini, comme $\mathcal{C}$ est réunion dénombrable des parties pour lesquelles les matrices du triplet ont une dimension fixée, et comme ces parties sont équipotentes à A^n pour un certain n , on conclut

$$\text{Card } \mathcal{C} = \text{Card } A .$$

Donc, si $A \twoheadrightarrow B$ est un épimorphisme, on a

$$\text{Card } B \leq \text{Card } A .$$

(Remarque : Cette dernière assertion est encore vraie si A est fini.)
