

Estudio del Comportamiento de la Dinámica Cuántica Cuando $\hbar \rightarrow 0$.

JAUME HARO (*)

RESUMEN - El objetivo de este artículo es comprobar que la mecánica clásica es un caso límite de la mecánica cuántica, es decir, comprobar que las soluciones de las ecuaciones de la mecánica cuántica «convergen», cuando la constante de Planck tiende a cero, hacia las soluciones de las ecuaciones de la mecánica clásica. En otras palabras, nuestro objetivo es encontrar, cuando $\hbar \rightarrow 0$, una conjugación entre la dinámica cuántica y la dinámica clásica.

ABSTRACT - The subject of this paper is to prove that the classical mechanics is a limit case of the quantum mechanics, that is, to prove that the solutions of the quantum mechanics equations «converges», when Planck's constant converges to zero, to the solutions of the classical mechanics equations. In other words, our objective is to find, when $\hbar \rightarrow 0$, a conjugation between the quantum dynamics and the classical dynamics.

1. Introducción.

En este trabajo queremos comparar la dinámica cuántica y la dinámica clásica cuando la constante de Planck converge hacia cero.

Hay muchos trabajos sobre este tema en los cuáles se introdujeron conceptos asociados a los estados cuánticos como el frente de ondas, el conjunto de frecuencia, los \hbar -soportes de un operador, etc... El objetivo

(*) Indirizzo dell'A.: Departament de Matemàtica Aplicada I E.T.S.E.I.B.,
Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647, 08028 Barcelona, Spagna.
E-mail: jaime.haro@upc.es

principal de estos trabajos es demostrar que esos conjuntos del espacio de fases tienen, en el límite, una dinámica clásica. Otros autores estudian gaussianas centradas en un punto del espacio de fases (véase [6]), y demuestran que, en el límite, su dinámica es la clásica.

Nosotros creemos que en todos estos trabajos se utilizan demasiados conceptos matemáticos, con lo cual a veces se pierde la visión física del problema, y entonces resulta casi imposible dar alguna interpretación clara de los resultados obtenidos. Por este motivo trataremos el problema del límite clásico desde otro punto de vista, éste fue introducido por J.Harthing en ([9] y [10]), y consiste en asociar a cada estado cuántico una medida de masa 1 definida sobre el espacio de fases. Entonces se trata de ver que, en el límite, esta medida tiene un comportamiento clásico. Para demostrar este resultado introduciremos el mínimo de utensilios matemáticos, y en cada momento daremos la interpretación física de los resultados que vayamos obteniendo, con lo cual las demostraciones de los resultados serán más claras y mucho más sencillas.

Una vez hecha esta observación, uno se puede dar cuenta fácilmente de que el primer problema que aparece al querer comparar los dos tipos de dinámicas, es que el espacio de los estados clásicos $\mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}^{2n})$ (medidas definidas en el espacio de fases con masa 1) y el espacio de los estados cuántico $\mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ (funciones de cuadrado integrable con norma 1) son muy diferentes, y por lo tanto lo primero que hay que hacer es encontrar una correspondencia entre los dos tipos de estados. Cuando la constante de Planck \hbar_0 está fijada, es imposible encontrar dicha correspondencia, ya que el Principio de incertidumbre de Heisenberg dice que es imposible medir, en el mismo instante, la posición y el momento de una partícula. Por ejemplo, a un estado clásico descrito por una medida de Dirac centrada en un punto del espacio de fases es imposible hacerle corresponder un estado clásico. En cambio si consideramos funciones de la forma

$$\psi : (0, \hbar_0] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}); \hbar \rightarrow \psi_\hbar,$$

donde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es el espacio de Schwartz, entonces sí que es posible construir correspondencias entre los dos tipos de estados.

Así pues, ya se ve que para comparar, en el límite, las dos dinámicas nos hará falta introducir nuevos espacios funcionales.

Introduzcamos primero los siguientes espacios funcionales $Q = \mathcal{C}^0((0, \hbar_0]; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))$ y $C = \mathcal{C}^0((0, \hbar_0]; \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{2n}))$. Y definamos sobre Q

y C las relaciones de equivalencia siguientes

$$\psi \sim_q \bar{\psi} \text{ si } \lim_{\hbar \rightarrow 0} \|\psi_\hbar - \bar{\psi}_\hbar\|_{\mathcal{D}C^m(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\phi \sim_c \bar{\phi} \text{ si } \lim_{\hbar \rightarrow 0} (\phi_\hbar - \bar{\phi}_\hbar) = 0.$$

Estas relaciones hay que definir las puesto que, en el límite, ψ y $\bar{\psi}$ (resp. ϕ et $\bar{\phi}$) son los mismos estados.

Una vez definidos estos espacios, definiremos el conjunto de los estados cuánticos EQ como un subconjunto de $\tilde{Q} \equiv \frac{Q}{\sim_q}$ (su definición precisa la daremos en la sección 3) y también definiremos el conjunto de los estados clásicos EC como un subconjunto de $\tilde{C} \equiv \frac{C}{\sim_c}$ (su definición precisa la daremos en la sección 2).

Finalmente para poder comparar la dos dinámicas hay que construir una aplicación $J : EQ \rightarrow EC$, y ver que es una conjugación entre el operador que define la dinámica cuántica T_q^t , y el operador que define la dinámica clásica T_c^t , es decir, J verifica

$$JT_q^t[\psi] = T_c^t J[\psi].$$

La interpretación física de este resultado es la siguiente:

Dada una partícula cuya dinámica esta descrita por un estado cuántico $T_q^t \psi_\hbar$, existe una medida definida en el espacio de fases $\mu_t \equiv \lim_{\hbar \rightarrow 0} J_\hbar T_q^t \psi_\hbar$ que es el estado clásico que describe la dinámica de la partícula. Esto es así ya que se verifica

$$T_c^t \mu_0 = \mu_t.$$

Esta es la generalizacion, para el caso de una partícula bajo la acción de un potencial, del resultado obtenido en [10] para el caso libre.

Los espacios funcionales y la notación que usaremos en este trabajo son:

- (1) $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ espacio de funciones de cuadrado integrable definidas en \mathbb{R}^n , y con imagen en \mathbb{C} .
- (2) $\|\cdot\|_2$ norma en el espacio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
- (3) La transformada de Fourier de un funcion es

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}} \mathbb{R}^n} \int f(x) e^{\frac{i}{\hbar} px} dx$$

(4) Dado $m \in \mathbb{N}$ la norma en el espacio de Sobolev $\mathfrak{H}^m(\mathbb{R}^n)$ es

$$\|f\|_{\mathfrak{H}^m(\mathbb{R}^n)} \equiv \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)(1 - \hbar^2 \Delta)^m f(x) dx} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |p|^2)^m |\widehat{f}|^2(p) dp}$$

- (5) $\mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es el subconjunto de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ formado por las funciones de norma 1.
- (6) $\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ espacio de medidas de Radon positivas definidas en \mathbb{R}^n .
- (7) $\mathfrak{M}_1^+(\mathbb{R}^n)$ es el subconjunto de $\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ formado por las medidas de masa 1.
- (8) $\mathcal{C}^0(X; Y)$ espacio de las funciones conínuas definidas sobre X y con imagen en Y .
- (9) $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ espacio de las funciones sobre \mathbb{R}^n , de soporte compacto y con derivadas de orden k conínuas.
- (10) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$.
- (11) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ espacio de Schwartz.
- (12) Sean:

$$u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n; |u| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$v = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n; |v| = \beta_1 + \dots + \beta_n,$$

y $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Entonces usaremos la siguiente notación

$$\partial_1^u f(x, p) = \left(\frac{\partial^{|u|} f_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \dots, \frac{\partial^{|u|} f_m}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)$$

$$\partial_2^v f(x, p) = \left(\frac{\partial^{|v|} f_1}{\partial p_1^{\beta_1} \dots \partial p_n^{\beta_n}}, \dots, \frac{\partial^{|v|} f_m}{\partial p_1^{\beta_1} \dots \partial p_n^{\beta_n}} \right).$$

- (13) $D_1 f(x, p)$ (resp. $D_2 f(x, p)$) matriz derivada con respecto a las variables x (resp. p).
- (14) Sea $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, denotaremos por $H_{12} g(x, p)$ a la matriz $D_1 D_2 g(x, p)$.
 $H_{11} g(x, p)$ (resp. $H_{22} g(x, p)$) a la matriz hessiana respecto a las variables x (resp. p).
- (15) Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $|\cdot|$ designará una norma en E .
- (16) $s_t(x, p)$ es el determinante de la matriz $H_{12} S_t(x, p)$.

2. Dinámica Clásica.

El Hamiltoniano que vamos a considerar es el siguiente

$$H(x, p) = \frac{1}{2} |p - A(x)|^2 + V(x); \quad (A, V) \in S(\mathbb{R}^n).$$

Las ecuaciones dinámicas vienen dadas por las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{x} = D_2 H(x, p) \\ \dot{p} = -D_1 H(x, p), \end{cases}$$

y sus soluciones describen la dinámica de una partícula no relativista de masa 1 y carga 1, en un campo electromagnético si tomamos la velocidad de la luz igual a la unidad.

A partir de estas soluciones, el operador de evolución clásico sobre el espacio de fases se define de la siguiente forma

$$\begin{aligned} T_c^t: \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x, p) &\rightarrow T_c^t(x, p) = (T_1^t(x, p), T_2^t(x, p)), \end{aligned}$$

donde $T_c^t(x, p)$ es la solución de las ecuaciones de Hamilton en el instante t con condición inicial (x, p) . Otra formulación equivalente de la mecánica clásica se basa en la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} -\partial_t S_t(x, q) = H(x, D_1 S_t(x, q)) \\ S_0(x, q) = xq. \end{cases}$$

Es sobradamente conocido que a partir de las soluciones de esta ecuación es posible obtener el operador T_c^t .

2.1. Algunos resultados fundamentales.

Enunciemos, sin demostración, los siguientes lemas. (Su demostración puede encontrarse en [3], [4], [7], [15], [17])

LEMA 2.1.

$$|T_c^t(x, p)| \leq (x^2 + p^2 + k^2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{5}{2}|t|},$$

donde k es una constante, independiente de x , p y t .

COROLARIO 2.2. *Para $|t| \leq \varepsilon$, existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que*

$$c_1(1 + |x|^2 + |q|^2) \leq 1 + |T_1^t(x, q)|^2 + |q|^2 \leq c_2(1 + |x|^2 + |q|^2).$$

LEMA 2.3. *Sean $u \in \mathbb{N}^n$ y $v \in \mathbb{N}^n$ con $|u| \geq 1$ ó $|v| \geq 1$, entonces*

$$|\partial_1^u \partial_2^v T_c^t(x, p)| \leq ce^{\frac{|t|}{2}},$$

donde c es una constante, independiente de x, p y t .

LEMA 2.4. *Siempre existe $\varepsilon > 0$ de manera que para $|t| \leq \varepsilon$ y $\forall p \in \mathbb{R}^n$ la aplicación*

$$T_{p,1}^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x \rightarrow T_1^t(x, p),$$

es un difeomorfismo C^∞ global.

LEMA 2.5. *Denotemos por $T_{q,1}^{-t}$, al inverso del difeomorfismo $T_{q,1}^t$ (lema 2.4); entonces, para $|t| \leq \varepsilon$, la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi es $S_t(x, q) = S(T_{q,1}^{-t}(x), q, t)$, donde*

$$S(y, q, t) = \int_0^t [T_2^r(y, q) D_2 H \circ T_c^r(y, q) - H \circ T_c^r(y, q)] \, d\tau + yq.$$

Además $S_t(x, q)$ verifica:

$$D_1 S_t(x, q) = T_2^t(T_{q,1}^{-t}(x), q).$$

$$D_2 S_t(x, q) = T_{q,1}^{-t}(x).$$

LEMA 2.6. *Para $|t| \leq \varepsilon$, si $|r| + |s| \geq 2$, existe una constante c de manera que*

$$|\partial_1^r \partial_2^s S_t(x, q)| \leq c.$$

En particular, $|H_{ij} S_t(x, q)| \leq c$; $i, j = 1, 2$.

LEMA 2.7. *Para $|t| \leq \varepsilon$ existe una constante $K > 0$ de manera que*

$$|D_1 S_t(x, q) - D_1 S_t(x, \bar{q})| \geq K|q - \bar{q}|.$$

LEMA 2.8. Para $|t| \leq \varepsilon$,

$$|H_{12}S_t(x, q)| > \delta > 0 \text{ y } s_t(x, q) > \delta > 0.$$

Usando el lema 2.5 y el corolario 2.2 se obtiene

LEMA 2.9. Para $|t| \leq \varepsilon$ y para todo $|\alpha| \geq 2$, dado $m \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_{m, \alpha}$ tal que

$$|\partial_1^\alpha D_2 S_t(x, q)| \leq C_{m, \alpha} \frac{(1 + |q|^2)^{m+1}}{(1 + |x|^2 + |q|^2)^m}.$$

En particular, para $|\alpha| \geq 1$, se cumple

$$|\partial_1^\alpha s_t(x, q)| \leq C_{m, \alpha} \frac{(1 + |q|^2)^{m+1}}{(1 + |x|^2 + |q|^2)^m} \leq C_{m, \alpha} \frac{(1 + |q|^2)^{m+1}}{(1 + |x|^2)^m}.$$

2.2. Dinámica sobre \tilde{C} .

Extendamos T_c^t sobre $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^{2n})$ por transporte, i.e., definamos

$$T_c^t: \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^{2n}); f \rightarrow T_c^t f = f \circ T_c^{-t}.$$

Por dualidad podemos extender T_c^t sobre $\mathfrak{N}^+(\mathbb{R}^{2n})$, de la siguiente forma

$$T_c^t: \mathfrak{N}^+(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathfrak{N}^+(\mathbb{R}^{2n}); \phi \rightarrow T_c^t \phi,$$

donde $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^{2n})$, $T_c^t \phi$ verifica, $T_c^t \phi(f) = \phi(T_c^{-t} f)$.

LEMA 2.10. Si $\phi_n \rightarrow \phi$ en $\mathfrak{N}^+(\mathbb{R}^{2n})$ entonces $T_c^t \phi_n \rightarrow T_c^t \phi$ en $\mathfrak{N}^+(\mathbb{R}^{2n})$.

DEMOSTRACIÓN. Calculemos $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^{2n})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_c^t \phi_n(f) - T_c^t \phi(f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n(f \circ T_c^t) - \phi(f \circ T_c^t)) = 0,$$

ya que $\phi_n \rightarrow \phi$ en $\mathfrak{N}^+(\mathbb{R}^{2n})$ ■

Finalmente podemos extender T_c^t sobre \tilde{C} .

$$T_c^t: \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}; [\phi] \rightarrow T_c^t[\phi] = [T_c^t \phi],$$

donde,

$$T_c^t \phi: (0, \hbar_0] \rightarrow \mathfrak{N}^+(\mathbb{R}^{2n}); \hbar \rightarrow T_c^t \phi_\hbar.$$

OBSERVACIÓN. T_c^t está bien definido, efectivamente, si $\phi \sim_c \bar{\phi}$, entonces $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^{2n})$, $T_c^t \phi_h(f) - T_c^t \bar{\phi}_h(f) = \phi_h(f \circ T_c^t) - \bar{\phi}_h(f \circ T_c^t) \rightarrow 0$ cuando $\hbar \rightarrow 0$, es decir, $T_c^t \phi \sim_c T_c^t \bar{\phi}$.

Definamos ahora los estados clásicos desde un punto de vista matemático. En mecánica clásica el conjunto de los estados clásicos es $\mathcal{N}_1^+(\mathbb{R}^{2n})$. Por consiguiente, si se quiere tratar el problema del límite clásico desde un punto de vista matemático es necesario introducir la siguiente definición

DEFINICIÓN. El conjunto de los estados clásicos, que denotaremos por EC , es el conjunto de los elementos $[\phi] \in \tilde{\mathcal{C}}$ que tienen al menos un representante ϕ que verifica $\phi_h \in \mathcal{N}_1^+(\mathbb{R}^{2n}) \forall \hbar \in (0, \hbar_0]$.

3. Dinámica cuántica.

Para $\hbar \in (0, \hbar_0]$, la ecuación de Schrödinger es

$$i\hbar \partial_t \psi = H(x, -i\hbar \nabla) \psi .$$

Denotemos por $T_h^t \psi_h$ a la solución con condición inicial ψ_h . Definamos ahora

$$T_q^t: \tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}; [\psi] \rightarrow T_q^t[\psi] = [T_q^t \psi],$$

donde,

$$T_q^t \psi : (0, \hbar_0] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}); \hbar \rightarrow T_h^t \psi_h .$$

OBSERVACIÓN. T_q^t está bien definido. Efectivamente, si $\psi_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ entonces $T_h^t \psi_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ (véase [2]). Veamos ahora que si $\|\psi_h - \bar{\psi}_h\|_{\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ entonces se cumple $\|T_h^t \psi_h - T_h^t \bar{\psi}_h\|_{\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$.

Lo veremos para el hamiltoniano

$$H(x, p) = \frac{|p|^2}{2} + V(x),$$

es decir cuando el potencial vector A es idénticamente cero. Para el caso general la demostración, aunque un poco más complicada, es análoga.

Sea $\phi(t) = T_h^t \psi_h - T_h^t \overline{\psi}_h$ entonces $\phi(t)$ cumple la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \partial_t \phi(t) = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \phi(t) + V\phi(t).$$

Derivando respecto a las variables espaciales se obtiene

$$i\hbar \partial_t \nabla \phi(t) = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \nabla \phi(t) + V \nabla \phi(t) + \nabla V \phi(t).$$

Multipliquemos esta ecuación por $\nabla \phi^*(t)$ y restemosle su ecuación compleja conjugada, para obtener

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \|\nabla \phi(t)\|_2^2 &= -\frac{\hbar^2}{2} (\Delta(\nabla \phi(t)) \nabla \phi^*(t) - \Delta(\nabla \phi^*(t)) \nabla \phi(t)) + \\ &\quad + \nabla V(\phi(t) \nabla \phi^*(t) - \phi^*(t) \nabla \phi(t)). \end{aligned}$$

Integrando respecto a la variable espacial se obtiene

$$i\hbar \partial_t \|\nabla \phi(t)\|_2^2 = \langle \nabla V, (\phi(t) \nabla \phi^*(t) - \phi^*(t) \nabla \phi(t)) \rangle_2,$$

donde $\langle f, g \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x) g(x) dx$ es el producto escalar en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Aplicando la desigualdad de Schwarz obtenemos

$$\partial_t \|\nabla \phi(t)\|_2^2 \leq \frac{2}{\hbar} \|\nabla V\|_2 \|\phi(t)\|_2 \|\nabla \phi(t)\|_2.$$

Es decir

$$\partial_t \|\nabla \phi(t)\|_2 \leq \frac{1}{\hbar} \|\nabla V\|_2 \|\phi(t)\|_2.$$

Por tanto

$$\|\nabla \phi(t)\|_2 \leq \|\nabla \phi(0)\|_2 + \frac{1}{\hbar} \|\nabla V\|_2 \int_0^t \|\phi(\tau)\|_2 d\tau.$$

Con lo cual se obtiene

$$\|\nabla \phi(t)\|_2^2 \leq 2\|\nabla \phi(0)\|_2^2 + \frac{2}{\hbar^2} \|\nabla V\|_2^2 \left(\int_0^t \|\phi(\tau)\|_2 d\tau \right)^2.$$

Ahora bien, integrando por partes se ve que

$$\|\nabla\phi(t)\|_2^2 = -\langle\phi(t), \Delta\phi(t)\rangle_2,$$

por consiguiente, se obtiene

$$-\langle\phi(t), \hbar^2 \Delta\phi(t)\rangle_2 \leq -2\langle\phi(0), \hbar^2 \Delta\phi(0)\rangle_2 + 2\|\nabla V\|_2^2 \left(\int_0^t \|\phi(\tau)\|_2 d\tau \right)^2.$$

Usemos ahora la propiedad fundamental de la ecuación de Schrödinger $\|T_\hbar^t \psi\|_2 = \|\psi\|_2$, en nuestro caso $\|\phi(t)\|_2 = \|\phi(0)\|_2$, entonces se obtiene

$$\begin{aligned} \|\phi(t)\|_2^2 - \langle\phi(t), \hbar^2 \Delta\phi(t)\rangle_2 &\leq \\ &\leq \|\phi(0)\|_2^2 - 2\langle\phi(0), \hbar^2 \Delta\phi(0)\rangle_2 + 2t^2 \|\nabla V\|_2^2 \|\phi(0)\|_2^2 \leq \\ &\leq 2(\|\phi(0)\|_2^2 - \langle\phi(0), \hbar^2 \Delta\phi(0)\rangle_2) + 2t^2 \|\nabla V\|_2^2 \|\phi(0)\|_2^2. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\|\phi(t)\|_2^2 - \langle\phi(t), \hbar^2 \Delta\phi(t)\rangle_2 = \|\phi(t)\|_{\mathbb{H}^1(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Por tanto hemos obtenido

$$\|T_\hbar^t \psi_\hbar - T_\hbar^t \bar{\psi}_\hbar\|_{\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)}^2 \leq 2\|\psi_\hbar - \bar{\psi}_\hbar\|_{\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)}^2 + 2t^2 \|\nabla V\|_2^2 \|\psi_\hbar - \bar{\psi}_\hbar\|_2^2 \rightarrow 0.$$

Procediendo del mismo modo se ve que

$$\|T_\hbar^t \psi_\hbar - T_\hbar^t \bar{\psi}_\hbar\|_{\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)}^2 \rightarrow 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Con lo cual, hemos visto que si $\psi \sim_q \bar{\psi}$ entonces se cumple $T_q^t \psi \sim_q T_q^t \bar{\psi}$.

Introduzcamos ahora, desde un punto de vista matemático, los estados cuánticos. En mecánica cuántica el conjunto de los estados cuánticos es $\mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, de la misma forma que hemos hecho para los estados clásicos, demos la siguiente definición

DEFINICIÓN. El conjunto de los estados cuánticos, que denotaremos por EQ es el conjunto de los elementos $[\psi] \in \tilde{Q}$ que tienen al menos un representante ψ que verifica $\psi_\hbar \in \mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \forall \hbar \in (0, \hbar_0]$ y que al menos tienen un representante $\bar{\psi}$ tal que $\forall \hbar \in (0, \hbar_0]$ se cumple $\|\bar{\psi}_\hbar\|_{\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_m$, donde C_m es una constante independiente de \hbar .

OBSERVACIÓN. Según esta definición, si $[\psi] \in EQ$, cualquier representante ψ de $[\psi]$ cumplirá

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \|\psi_{\hbar}\|_2 = 1; \quad \|\psi_{\hbar}\|_{\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)} \leq K_m,$$

donde K_m es una constante independiente de \hbar .

4. Correspondencia entre la mecánica cuántica y la clásica.

En esta sección vamos a definir diferentes aplicaciones entre los conjuntos EQ y EC , con las cuales podremos comparar la dinámica cuántica definida en EQ y la clásica definida en EC .

4.1. La aplicación J .

DEFINICIÓN. Un paquete de ondas de espectro (x_0, p_0) es un elemento $[c] \in EQ$ tal que $c_{\hbar} \in \mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ y,

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \|(x - x_0)^{\alpha} c_{\hbar}\|_2 = 0; \quad \forall \alpha > 0.$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \|(p - p_0)^{\alpha} \widehat{c}_{\hbar}\|_2 = 0; \quad \forall \alpha > 0.$$

Una onda elemental de espectro (x_0, p_0) es un elemento $[\psi] \in EQ$ de manera que existe un paquete de ondas $[c]$ de espectro (x_0, p_0) , que verifica $\psi \sim_q c$.

EJEMPLO.

$$c : (0, \hbar_0] \rightarrow \mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}); \quad \hbar \rightarrow \frac{1}{(\pi \hbar)^{\frac{n}{4}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}.$$

LEMA 4.1. Si $[\psi]$ es una onda elemental de espectro (x_0, p_0) , entonces:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\psi_{\hbar}|^2 = \delta_{x_0} \quad \text{y} \quad \lim_{\hbar \rightarrow 0} |\widehat{\psi}_{\hbar}|^2 = \delta_{p_0},$$

en $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^n)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $[c]$ un paquete de ondas tal que $[\psi] = [c]$. Entonces hay que demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |c_h|^2 = \delta_{x_0} \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0} |\widehat{c}_h|^2 = \delta_{p_0},$$

en $\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$.

Primero calculemos $\forall \phi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int |c_h|^2(x)(\phi(x) - \phi(x_0)) dx &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int |c_h|^2(x)(x - x_0) \left[\int_0^1 D\phi(x - (x - x_0)t) dt \right] dx \leq \\ &\leq K \lim_{h \rightarrow 0} \int |c_h|^2(x) |x - x_0| dx = 0. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$. Para toda $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$ existe $\phi_k \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ de manera que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - f\|_\infty = 0$.

Calculemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int |c_h|^2(x)(f(x) - f(x_0)) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \int |c_h|^2(x)(\phi_k(x) - \phi_k(x_0)) dx + \\ &+ \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \int |c_h|^2(x)(f(x) - \phi_k(x)) dx + \\ &+ \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \int |c_h|^2(x)(\phi_k(x_0) - f(x_0)) dx = (1) + (2) + (3). \end{aligned}$$

Ya hemos visto que (1) = 0. Observemos que

$$(2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \int |c_h|^2(x)(f(x) - \phi_k(x)) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - f\|_\infty = 0.$$

Análogamente

$$(3) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k - f\|_\infty = 0.$$

La demostración de la otra parte del lema es totalmente análoga. ■

Definamos ahora J_c ,

$$J_c: EQ \rightarrow EC; [\psi] \rightarrow J_c[\psi] = [J_c \psi],$$

donde,

$$J_c \psi : (0, \hbar_0] \rightarrow \mathfrak{N}^+(\mathbb{R}^{2n})$$

$$\hbar \rightarrow J_c \psi(\hbar) = J_{c_\hbar} \psi_\hbar = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\hbar(y) c_\hbar(x-y) e^{-\frac{i}{\hbar}py} dy \right|^2,$$

con $[c]$ onda elemental de espectro $(0, 0)$.

LEMA 4.2. $\forall \hbar \in (0, \hbar_0]$ se verifica $\int_{\mathbb{R}^{2n}} J_{c_\hbar} \psi_\hbar = \|\psi_\hbar\|_2^2 y \left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} J_{c_\hbar} \psi_\hbar f \right| \leq \|f\|_\infty \|\psi_\hbar\|_2^2$.

La demostración de este lema se puede encontrar en [10] página 145.

OBSERVACIÓN. Si $\|\psi_\hbar\|_2 = 1$, entonces $J_{c_\hbar} \psi_\hbar$ es una densidad de probabilidad definida en el espacio de fases.

LEMA 4.3. La aplicación J_c está bien definida, i.e., si $\psi \sim_q \bar{\psi}$ entonces $J_c \psi \sim_c J_c \bar{\psi}$.

DEMOSTRACIÓN. Hay que probar que, $\lim_{\hbar \rightarrow 0} (J_{c_\hbar} \psi_\hbar - J_{c_\hbar} \bar{\psi}_\hbar) = 0$, i.e., que $\forall f \in C_0^0(\mathbb{R}^{2n})$ se obtiene

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x, p) \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\hbar(y) c_\hbar(x-y) e^{-\frac{i}{\hbar}py} dy \right|^2 - \left| \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\psi}_\hbar(y) c_\hbar(x-y) e^{-\frac{i}{\hbar}py} dy \right|^2 \right\} dx dp = 0.$$

Pero este límite es igual a

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x, p) [|(\psi_\hbar c_{\hbar, x})^\wedge|^2(p) - |(\bar{\psi}_\hbar c_{\hbar, x})^\wedge|^2(p)] dx dp,$$

donde hemos definido $c_{\hbar, x}(y) = c_\hbar(x-y)$.

Si ahora aplicamos la desigualdad de Schwarz, se ve que este límite es

menor o igual que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |((\psi_h - \bar{\psi}_h) c_{h,x})^\wedge|^2 dx dp \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |((\psi_h + \bar{\psi}_h) c_{h,x})^\wedge|^2 |f|^2(x, p) dx dp \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando la norma del supremo se ve que este límite es menor o igual que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |((\psi_h - \bar{\psi}_h) c_{h,x})^\wedge|^2 dx dp \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |((\psi_h + \bar{\psi}_h) c_{h,x})^\wedge|^2 dx dp \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora si se usan las propiedades de la transformada de Fourier se ve que el límite que estamos calculando es igual a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |(\psi_h - \bar{\psi}_h) c_{h,x}|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} |(\psi_h + \bar{\psi}_h) c_{h,x}|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

e integrando respecto la variable y y después aplicando la desigualdad de Schwarz se obtiene que el límite en cuestión es menor o igual que

$$2 \lim_{h \rightarrow 0} \|f\|_\infty \|\psi_h - \bar{\psi}_h\|_2 = 0. \quad \blacksquare$$

LEMA 4.4. Sean $[c]$ y $[\bar{c}]$ dos ondas elementales de espectro $(0, 0)$, entonces se verifica $J_c \psi \sim_c J_{\bar{c}} \psi$.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que probar que $\lim_{h \rightarrow 0} (J_{c_h} \psi_h - J_{\bar{c}_h} \psi_h) = 0$.

Antetodo veremos el siguiente resultado:

«Sea $[\xi]$ un paquete de ondas y $[c]$ una onda elemental, tal que $[\xi] = [c]$, entonces $\lim_{h \rightarrow 0} (J_{\xi_h} \psi_h - J_{c_h} \psi_h) = 0$ ».

Efectivamente $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^{2n})$ (según lo visto en el lema 4.3) se cumple

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x, p) [|(\psi_h c_{h,x})^\wedge|^2(p) - |(\psi_h \xi_{h,x})^\wedge|^2(p)] dx dp &\leq \\ &\leq 2 \lim_{h \rightarrow 0} \|f\|_\infty \|c_h - \xi_h\|_2 = 0. \end{aligned}$$

Una vez visto este resultado podemos suponer que $[c]$ y $[\bar{c}]$ son paquetes de onda. Usemos el resultado siguiente (véase [10], Teorema 9, pági-

na 154): « $\forall \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{2n})$ y $\forall [c]$ paquete de ondas de espectro $(0, 0)$ se verifica

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(J_{c_h} \psi_{\hbar}(\varphi) - \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \widehat{\psi}_{\hbar}(p) \psi_{\hbar}^*(x) \varphi(x, p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dx dp \right) = 0 .$$

De donde se deduce que $\forall \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{2n})$ se tiene

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} (J_{c_h} \psi_{\hbar}(\varphi) - J_{\bar{c}_h} \psi_{\hbar}(\varphi)) = 0 ,$$

ya que este límite unicamente depende del espectro del paquete de ondas.

Ahora, como $\mathcal{O}(\mathbb{R}^{2n})$ es denso en $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^{2n})$, para toda $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^{2n})$ existe $\varphi_k \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{2n})$ de manera que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - f\|_{\infty} = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} (J_{c_h} \psi_{\hbar}(f) - J_{\bar{c}_h} \psi_{\hbar}(f)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\hbar \rightarrow 0} (J_{c_h} \psi_{\hbar}(\varphi_k) - J_{\bar{c}_h} \psi_{\hbar}(\varphi_k)) + \\ &+ \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\hbar \rightarrow 0} (J_{c_h} \psi_{\hbar}(f - \varphi_k) - J_{\bar{c}_h} \psi_{\hbar}(f - \varphi_k)) = (1) + (2) . \end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que (1)=0, y además (2) $\leq \lim_{k \rightarrow \infty} 2\|\varphi_k - f\|_{\infty} = 0$. ■

Por lo tanto debido al lema 4.4, $\forall [c]$ onda elemental de espectro $(0, 0)$, podemos definir, $J = J_c$, y denotar $J_{c_h} \psi_{\hbar} = J_{\hbar} \psi_{\hbar}$.

4.2. Diferentes comparaciones.

Consideremos el espacio $\mathcal{C}^0((0, \hbar_0]; \mathcal{O}'(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}))$, y definamos sobre él la siguiente relación de equivalencia

$$\phi \sim \bar{\phi} \text{ si y solo si } \lim_{\hbar \rightarrow 0} (\phi_{\hbar} - \bar{\phi}_{\hbar}) = 0 ,$$

para la topología de las distribuciones, i.e., $\forall \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{2n})$; $\lim_{\hbar \rightarrow 0} (\phi_{\hbar}(\varphi) - \bar{\phi}_{\hbar}(\varphi)) = 0$. Ahora podemos definir los espacios

$$\bar{\mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}^0((0, \hbar_0]; \mathcal{O}'(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}))}{\sim} ,$$

y podemos definir las aplicaciones

1.

$$J^1: EQ \rightarrow \bar{\mathcal{C}}; [\psi] \rightarrow J^1[\psi] = [J^1 \psi]$$

donde,

$$J^1 \psi : (0, \hbar_0] \rightarrow \mathcal{O}'(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$$

$$\hbar \rightarrow J^1 \psi \hbar = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi \hbar(y) c \hbar(x-y) e^{-\frac{i}{\hbar}py} dy \right|^2.$$

OBSERVACIÓN. Si denotamos por i a la inclusión

$$i : \mathfrak{N}^+(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{O}'(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}),$$

entonces $J^1 \psi \hbar = i \circ J \psi \hbar$, $\forall \psi \in \mathcal{Q}$ et $\hbar \in (0, \hbar_0]$.

2.

$$J^2: EQ \rightarrow \overline{C}; [\psi] \rightarrow J^2[\psi] = [J^2 \psi]$$

donde,

$$J^2 \psi : (0, \hbar_0] \rightarrow \mathcal{O}'(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$$

$$\hbar \rightarrow J^2 \psi \hbar = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \psi \hbar^*(x) \widehat{\psi} \hbar(p) e^{\frac{i}{\hbar}px}.$$

3.

$$J^3: EQ \rightarrow \overline{C}; [\psi] \rightarrow J^3[\psi] = [J^3 \psi]$$

donde,

$$J^3 \psi : (0, \hbar_0] \rightarrow \mathcal{O}'(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$$

$$\hbar \rightarrow J^3 \psi \hbar = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi \hbar^* \left(x - \frac{y}{2} \right) \psi \hbar \left(x + \frac{y}{2} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}py} dy.$$

OBSERVACIÓN. En un lenguaje más físico, a la aplicación $J^3 \psi \hbar$ se le llama «medida de Wigner».

A partir de estas definiciones se obtienen los siguientes lemas

LEMA 4.5. *Las aplicaciones J^1 , J^2 y J^3 están bien definidas.*

La demostración es totalmente análoga a la del lema 4.3.

LEMA 4.6. Si $T.F.$ designa la 1-transformada de Fourier, (i.e., la transformada de Fourier para $\hbar = 1$), entonces $\forall \psi_{\hbar} \in S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ se verifica

$$T.F.(J_{\hbar}^2 \psi_{\hbar})(P, X) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{\hbar}(x - \hbar X) \psi_{\hbar}^*(x) e^{-iPx} dx .$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición de transformada de una distribución se tiene que $T.F.(J^2 \psi_{\hbar})(\phi) = J^2 \psi_{\hbar}(T.F.(\phi))$. Entonces escribiendo

$$T.F.(\phi)(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(P, X) e^{-i(Px + Xp)} dX dP ,$$

se obtendrá

$$\begin{aligned} J^2 \psi_{\hbar}(T.F.(\phi)) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{\frac{i}{\hbar}px} \widehat{\psi}_{\hbar}(p) \psi_{\hbar}^*(x) \phi(P, X) e^{-i(Px + Xp)} dX dP dx dp , \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{5n}} e^{\frac{i}{\hbar}p(x - \bar{x})} \psi_{\hbar}(\bar{x}) \psi_{\hbar}^*(x) \phi(P, X) e^{-i(Px + Xp)} d\bar{x} dX dP dx dp ,$$

y haciendo el cambio de variable $x - \bar{x} = \hbar y$, obtendremos,

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{5n}} e^{ip(y - X)} \psi_{\hbar}(x - \hbar y) \psi_{\hbar}^*(x) \phi(P, X) e^{-iPx} dy dX dP dx dp ,$$

con lo cual, si integramos respecto a las variables y y p , llegaremos a ver que

$$T.F.(J^2 \psi_{\hbar})(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \psi_{\hbar}(x - \hbar X) \psi_{\hbar}^*(x) \phi(P, X) e^{-iPx} dX dP dx. \quad \blacksquare$$

LEMA 4.7. $\forall [\psi] \in EQ$ se verifica

$$J^1[\psi] = J^2[\psi] = J^3[\psi].$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de $J^1[\psi] = J^2[\psi]$ se puede encontrar en [10]. Por consiguiente nos falta probar que $J^2[\psi] = J^3[\psi]$. Calculemos pues

$$\begin{aligned} & \lim_{\hbar \rightarrow 0} (J_{\hbar}^3 \psi_{\hbar}(\varphi) - J_{\hbar}^2 \psi_{\hbar}(\varphi)) = \\ & = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \psi_{\hbar} \left(x + \frac{y}{2} \right) \psi_{\hbar}^* \left(x - \frac{y}{2} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}py} \varphi(x, p) dx dp dy - J_{\hbar}^2 \psi_{\hbar}(\varphi) \right). \end{aligned}$$

Usando la definición de la transformada de Fourier se ve que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \psi_{\hbar} \left(x + \frac{y}{2} \right) \psi_{\hbar}^* \left(x - \frac{y}{2} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}py} \varphi(x, p) dx dp dy = \\ & = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{5n}} \widehat{\psi}_{\hbar}(q) \widehat{\psi}_{\hbar}^*(w) e^{\frac{i}{\hbar}x(q-w)} e^{-\frac{i}{2\hbar}y(q+w-2p)} \varphi(x, p) dx dp dy dw dq. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $w = q - \hbar u$, e integrando respecto a p y u , se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \psi_{\hbar} \left(x + \frac{y}{2} \right) \psi_{\hbar}^* \left(x - \frac{y}{2} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}py} \varphi(x, p) dx dp dy = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \widehat{\psi}_{\hbar}(q) \widehat{\psi}_{\hbar}^*(q - \hbar u) e^{iux} \varphi \left(x, q - \hbar \frac{u}{2} \right) dx dq du. \end{aligned}$$

Con lo cual, el límite que estamos calculando es igual a

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \widehat{\psi}_{\hbar}(q) \widehat{\psi}_{\hbar}^*(q - \hbar u) e^{iux} \varphi(x, q) dx dq du - J_{\hbar}^2 \psi_{\hbar}(\varphi) \right),$$

i usando la definición de transformada de Fourier, se obtiene

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}} \mathbb{R}^{4n}} \int \widehat{\psi}_{\hbar}(q) \psi_{\hbar}^*(z) e^{i(x-z)u} e^{\frac{i}{\hbar}qz} \varphi(x, q) dx dz dq du - J_{\hbar}^2 \psi_{\hbar}(\varphi) \right).$$

Integrando respecto a u y z , se llega al siguiente resultado

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \widehat{\psi}_\hbar(q) \psi_\hbar^*(x) e^{\frac{i}{\hbar}qx} \varphi(x, q) dx dq - J_\hbar^2 \psi_\hbar(\varphi) \right) = 0. \quad \blacksquare$$

LEMA 4.8. Sean ϕ y $\bar{\phi} \in C$, con $|\phi_\hbar(f)| \leq k_1 \|f\|_\infty$ y $|\bar{\phi}_\hbar(f)| \leq k_2 \|f\|_\infty \forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^{2n})$ y $\forall \hbar \in (0, \hbar_0]$, entonces, $\phi \sim_c \bar{\phi}$ si y solamente si $\phi \sim \bar{\phi}$.

DEMOSTRACIÓN. Claramente se ve que si $\phi \sim_c \bar{\phi}$ entonces $\phi \sim \bar{\phi}$. Supongamos pues que $\phi \sim \bar{\phi}$, como \mathcal{D} es denso en \mathcal{C}_0^0 , si tomamos $f \in \mathcal{C}_0^0$, existe φ_j de forma que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - \varphi_j\|_\infty = 0$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow \infty} |f_\hbar(f) - \bar{\phi}_\hbar(f)| &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{\hbar \rightarrow \infty} |f_\hbar(\varphi_j) - \bar{\phi}_\hbar(\varphi_j)| + \\ &+ \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{\hbar \rightarrow \infty} |f_\hbar(f - \varphi_j) - \bar{\phi}_\hbar(f - \varphi_j)| < \lim_{j \rightarrow \infty} (k_1 + k_2) \|f - \varphi_j\|_\infty = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5. Operadores Fourier integrales.

Para $|t| \leq \varepsilon$, se puede definir (véase [8], [12], [13], [17]):

$$\bar{\alpha}_t: EQ \rightarrow EQ; [\psi] \rightarrow \bar{\alpha}_t[\psi] = [\bar{\alpha}_t \psi],$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_t \psi : (0, \hbar_0] &\rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \\ \hbar &\rightarrow \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \int \sqrt{s_t(x, q)} e^{\frac{i}{\hbar}S_t(x, q)} \widehat{\psi}_\hbar(q) dq, \end{aligned}$$

donde $T_{1, q}^{-t}$ es el inverso del difeomorfismo

$$T_{1, q}^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x \rightarrow T_1^t(x, q).$$

$S_t(x, q)$ es la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi con condición inicial xq . $s_t(x, q)$ es el determinante de la matriz $H_{12}(x, q)$.

OBSERVACIÓN. Para $|t| \leq \varepsilon$, $\bar{\alpha}_t$ está bien definido.

LEMA 5.1. Sea $[\psi] \in EQ$ entonces para $|t| \leq \varepsilon$, se verifica $\bar{\alpha}_t[\psi] = T_q^t[\psi]$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar el lema tendemos que usar el siguiente teorema (véase [10], [15])

TEOREMA 5.2. Si $\phi_{\hbar}(t)$ verifica la ecuación

$$i\hbar\partial_t\psi = H(x, -i\hbar\nabla)\psi + F(x, t; \hbar),$$

y se cumple

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar} \|F(t; \hbar)\|_2 = 0,$$

uniformemente en t , para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, entonces se satisface

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \|T_{\hbar}^t \psi_{\hbar}(0) - \phi_{\hbar}(t)\|_2 \leq \lim_{\hbar \rightarrow 0} \|\psi_{\hbar}(0) - \phi_{\hbar}(0)\|_2,$$

para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Observemos que $\bar{\alpha}_t \psi_{\hbar}$ cumple la ecuación

$$i\hbar\partial_t\psi = H(x, -i\hbar\nabla)\psi + F(x, t; \hbar),$$

con

$$F(x, t; \hbar) = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}_{\mathbb{R}^n}} \int e^{\frac{i}{\hbar}S_t(x, q)} \Delta_x \sqrt{s_t(x, q)} \widehat{\psi}_{\hbar}(q) dq.$$

Como $\psi_{\hbar} = \bar{\alpha}_0 \psi_{\hbar}$, para comprobar que $\bar{\alpha}_t \psi \in [T_q^t \psi]$, bastará con probar que

$$\frac{1}{\hbar} \|F(t; \hbar)\|_2 \leq C\hbar^{\frac{1}{2n+4}},$$

donde C es una constante independiente de \hbar y de t .

Acotemos pues

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar^2} \|F(t; \hbar)\|_2^2 &= \\ &= \frac{\hbar^2}{4(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{\hbar}(S_t(x, q) - S_t(x, \bar{q}))} g_t(q, x) g_t(\bar{q}, x) \widehat{\psi}_{\hbar}(q) \widehat{\psi}_{\hbar}^*(\bar{q}) dq d\bar{q} dx, \end{aligned}$$

donde $g_t(q, x) = \Delta_x \sqrt{s_t(x, q)}$. Hagamos el cambio de variable $\bar{q} = q -$

– $\hbar u$ y usemos el Apéndice para obtener

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\hbar^2} \|F(t; \hbar)\|_2^2 \leq \\
& \leq \left| \frac{1}{\hbar^2} \|F(t; \hbar)\|_2^2 - \frac{\hbar^2}{4(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{iD_2 S_t(x, q)u} g^2(q, x) \widehat{\psi}_\hbar(q) \widehat{\psi}_\hbar^*(q - \hbar u) dq dx du \right| + \\
& + \left| \frac{\hbar^2}{4(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{iD_2 S_t(x, q)u} g^2(q, x) \widehat{\psi}_\hbar(q) \widehat{\psi}_\hbar^*(q - \hbar u) dq dx du \right| \\
& \leq K \hbar^{\frac{1}{n+2}} + \left| \frac{\hbar^2}{4(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{iD_2 S_t(x, q)u} g^2(q, x) \widehat{\psi}_\hbar(q) \widehat{\psi}_\hbar^*(q - \hbar u) dq dx du \right|.
\end{aligned}$$

Estudiemos

$$(1) = \left| \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{iD_2 S_t(x, q)u} g^2(q, x) \widehat{\psi}_\hbar(q) \widehat{\psi}_\hbar^*(q - \hbar u) dq dx du \right|.$$

Si hacemos el cambio de variable $x = T^t(y, q)$ (El lema 2.4 nos dice que es un difeomorfismo), y usamos el lema 2 obtenemos

$$(1) = \left| \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{iyu} g^2(q, T_1^t(y, q)) (s_t(T_1^t(y, q), q))^{-1} \widehat{\psi}_\hbar(q) \widehat{\psi}_\hbar^*(q - \hbar u) dq dy du \right|.$$

Usando la desigualdad de Schwarz con respecto a la variable p se obtiene

$$\begin{aligned}
(1) & \leq \int \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{iyu} g^2(q, T_1^t(y, q)) (s_t(T_1^t(y, q), q))^{-1} dy \right|^2 |\widehat{\psi}_\hbar(q)|^2 dq \right\}^{\frac{1}{2}} du \equiv \\
& \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_\hbar(u) du \leq \int_{\mathcal{B}_1^n(0)} \sigma_\hbar(u) du + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}_1^n(0)} \sigma_\hbar(u) du \equiv (1.1) + (1.2)
\end{aligned}$$

Observemos que

$$(1.1) \leq k \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (g^2(q, T_1^t(y, q))(s_t(T_1^t(y, q), q))^{-1} dy)^2 |\widehat{\psi}_h(q)|^2 dq \right\}^{\frac{1}{2}},$$

donde k es una constante.

Ahora bien usando el lema 2.9, deducimos que

$$g^2(q, T_1^t(y, q)) \leq C_m \frac{(1 + |q|^2)^{m+1}}{(1 + |T_1^t(y, q)|^2 + |q|^2)^m},$$

y usando el corolario 2.2, se deduce que

$$g^2(q, T_1^t(y, q)) \leq C_m \frac{(1 + |q|^2)^{m+1}}{(1 + |y|^2 + |q|^2)^m} \leq C_m \frac{(1 + |q|^2)^{m+1}}{(1 + |y|^2)^m}.$$

Por consiguiente, tomando $m = n$, se obtiene

$$(1.1) \leq k_1 \|f_h\|_{\mathcal{D}^{2n+2}(\mathbb{R}^n)}^2 = k_2.$$

Para acotar (1.2), hay que usar $n + 1$ veces la identidad $e^{iyu} = \frac{-iue^{iyu}}{|u|^2}$, y proceder como en el caso anterior para obtener

$$(1.2) \leq k_3 \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}_1^n(0)} \frac{1}{|u|^{n+1}} du \leq k_4.$$

Por tanto

$$\frac{1}{h^2} \|F(t; h)\|_2^2 \leq Kh \frac{1}{n+2} + \bar{K}h^2 \leq (K + \bar{K}) h \frac{1}{n+2} \equiv C^2 h \frac{1}{n+2}. \quad \blacksquare$$

COROLARIO 5.3. Si $[\psi] \in EQ$ entonces $\forall t \in [0, \varepsilon]$ se verifica

$$\bar{\alpha}_t T_q^{t_0}[\psi] = \bar{\alpha}_{t-\varepsilon} T_q^{t_0+\varepsilon}[\psi].$$

DEMOSTRACIÓN. Usemos el lema 5.1 para deducir que

$$\bar{\alpha}_{t-\varepsilon} T_q^{t_0+\varepsilon}[\psi] = \bar{\alpha}_{t-\varepsilon} [T_q^{t_0+\varepsilon}\psi] = (\text{lema 5.1}) = T_q^{t-\varepsilon} [T_q^{t_0+\varepsilon}\psi] = T_q^{t+t_0}[\psi]. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia del corolario 5.3, podemos definir $\forall t$ la aplicación

$$\alpha_t: EQ \rightarrow EQ; [\psi] \rightarrow \alpha_t[\psi] = [\alpha_t \psi],$$

donde, para $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ se define $\alpha_t \psi = \bar{\alpha}_{t-t_0} T_q^{t_0} \psi$.

OBSERVACIÓN. α_t está bien definido

LEMA 5.4. Si $[\psi] \in EQ$ entonces $\alpha_t[\psi] = T_q^t[\psi]$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es una consecuencia del corolario 5.3. En efecto si $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, por definición

$$\alpha_t[\psi] = \bar{\alpha}_{t-t_0}[T_q^{t_0} \psi] = (\text{corolario 5.3}) = T_q^{t-t_0}[T_q^{t_0} \psi] = T_q^t[\psi]. \quad \blacksquare$$

6. El límite clásico de la ecuación de Schrödinger.

En esta sección nos dedicaremos a enunciar y demostrar el resultado principal del trabajo.

TEOREMA 6.1. Sea

$$H(x, p) = \frac{1}{2} |p - A(x)|^2 + V(x), (A, V) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$$[\psi] \in EQ.$$

Entonces la aplicación J definida en la sección 4 es una conjugación entre la dinámica cuántica y la clásica, i.e., se verifica

$$JT_q^t[\psi] = T_c^t J[\psi].$$

La interpretación física del teorema es la siguiente:

Dado un estado cuántico $T_h^t \psi_h \in \mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, solución de la ecuación de Schrödinger con $\|\psi_h\|_2 = 1$, que describe, desde el punto de vista cuántico, el estado de una partícula en el instante t , siempre podemos definir una medida de masa 1, que describe, desde el punto de vista de la mecánica clásica, el estado de una partícula en el instante t .

Esta medida es $\mu_t \equiv \lim_{h \rightarrow 0} J_h T_q^t \psi_h$ y evoluciona clásicamente, ya que cumple

$$\mu_t = T_c^t \mu_0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

es decir, μ_t es la medida de probabilidad clásica sobre el espacio de fases que define, desde el punto de la mecánica clásica, el estado de la partícula en el instante t .

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.1. De acuerdo con el lema 5.4 sabemos que $\alpha_t[\psi] = T_q^t[\psi]$, por lo tanto para probar el teorema solamente necesitamos verificar que $J\alpha_t[\psi] = T_c^t J[\psi]$, es decir, $J\alpha_t\psi \sim_c T_c^t J\psi$, y debido al lema 4.8, esto significa probar que $J^1\alpha_t\psi \sim T_c^t J^1\psi$, y según el lema 4.7, es equivalente a demostrar que $J^2\alpha_t\psi \sim T_c^t J^2\psi$, precisamente esta es la relación que vamos a demostrar.

Empezemos por $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, y calculemos, $\forall \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{2n})$, $\lim_{\hbar \rightarrow 0} (J_\hbar^2 \alpha_t \psi_\hbar(\varphi) - T_c^t J_\hbar^2 \psi_\hbar(\varphi))$, gracias al resultado del lema 4.6, este límite es igual a

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{5n}} e^{\frac{i}{\hbar}(S_t(z-hX, q) - S_t(z, \bar{q}))} \widehat{\psi}_\hbar(q) \widehat{\psi}_\hbar^*(\bar{q}) \sqrt{s_t(z-hX, q)} \cdot \right. \\ \left. \cdot \sqrt{s_t(z, \bar{q})} e^{-iPz} T.F.(\varphi)(-P, -X) dq d\bar{q} dz dP dX - T_c^t J_\hbar^2 \psi_\hbar(\varphi) \right).$$

Si ahora hacemos el cambio de variable $\bar{q} = q - \hbar u$, y usamos [7] página 111, deducimos que

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{5n}} e^{-i(D_1 S_t(z, q)X - D_2 S_t(z, q)u)} \widehat{\psi}_\hbar(q) \widehat{\psi}_\hbar^*(q - \hbar u) \cdot \right. \\ \left. \cdot e^{-iPz} s_t(z, q) T.F.(\varphi)(-P, -X) dq du dz dP dX - T_c^t J_\hbar^2 \psi_\hbar(\varphi) \right).$$

Integremos con respecto a las variables P y X , para obtener

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{iD_2 S_t(z, q)u} \widehat{\psi}_\hbar(q) \widehat{\psi}_\hbar^*(q - \hbar u) s_t(z, q) \cdot \right. \\ \left. \cdot \varphi(z, D_1 S_t(z, q)) dq du dz - T_c^t J_\hbar^2 \psi_\hbar(\varphi) \right).$$

Ahora si hacemos el cambio $x = T_{q,1}^{-t}(z)$, y aplicamos el lema 2.5, obtendremos

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{ixu} \widehat{\psi}_\hbar(q) \widehat{\psi}_\hbar^*(q - \hbar u) \varphi \circ T_c^t(x, q) dq du dx - T_c^t J_\hbar^2 \psi_\hbar(\varphi) \right),$$

y siguiendo los mismos pasos que en el lema 4.7 se ve que este límite es cero.

Por lo tanto hemos probado que para $|t| \leq \varepsilon$,

$$JT_q^t[\psi] = T_c^t J[\psi] \quad (*).$$

Finalmente, para prolongar el resultado tomemos $T_q^{\pm\varepsilon}[\psi]$ en (*) en lugar de $[\psi]$, así para $|t| \leq \varepsilon$, obtendremos

$$\begin{aligned} JT_q^{t \pm \varepsilon}[\psi] &= JT_q^t T_q^{\pm\varepsilon}[\psi] = ((* \text{ para } |t| \leq \varepsilon) = \\ &= T_c^t JT_q^{\pm\varepsilon}[\psi] = ((* \text{ para } t = \pm\varepsilon) = T_c^{t \pm \varepsilon} J[\psi]. \end{aligned}$$

Es decir, $\forall t \in [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$ hemos obtenido $JT_q^t[\psi] = T_c^t J[\psi]$. Análogamente se demuestra el teorema para $t \in [-3\varepsilon, 3\varepsilon]$, etc... ■

6.1. Aplicación a las ondas elementales.

Para toda onda elemental el Teorema 6.1 nos dice que

$$JT_q^t[\psi] = T_c^t[\delta_{(x_0, p_0)}] = [\delta_{T_c^t(x_0, p_0)}].$$

Interpretación: Las ondas elementales representan, en el límite, estados clásicos puntuales en el espacio de fases.

6.2. Aplicación a los estados semi-clásicos.

Sea $[\psi] \in EQ$ de manera que

$$\psi : (0, \hbar_0] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}); \hbar \rightarrow A(x) e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}.$$

Entonces se satisficera $J[\psi] = [A^2(x)\delta(p - \nabla S(x))]$, y si aplicamos el Teorema 6.1 obtendremos

$$JT_q^t[\psi] = T_c^t[A^2(x)\delta(p - \nabla S(x))].$$

Interpretación: Los estados semi-clásicos representan, en el límite, densidades de probabilidad definidas sobre variedades lagrangianas del espacio de fases.

7. Apéndice.

En este Apéndice vamos a demostrar el siguiente

LEMA 7.1. *Sea $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_{m, \alpha}$ tal que*

$$|\partial_x^\alpha g(x, q)| \leq C_{m, \alpha} \frac{(1 + |q|^2)^{m+1}}{(1 + |x|^2)^m}.$$

Sea también $f_\hbar \in \mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $\forall \hbar \in (0, \hbar_0]$ de manera que para $m \in \mathbb{N}$ existe una constante K_m (independiente de \hbar) tal que $\|f_\hbar\|_{\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^n)}^2 \leq K_m$.

Entonces se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^{3n}} \{g(x, p) g(x, p + \hbar u) e^{\frac{i}{\hbar}[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]} - g^2(x, p) e^{-iD_2 S_t(x, p)u}\} \cdot \widehat{f}_\hbar(p) \widehat{f}_\hbar(p + \hbar u) dx dp du \leq C \hbar^{\frac{1}{n+2}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Escribamos $g(x, p + \hbar u) = g(x, p) + \hbar \bar{g}(x, p, u; \hbar)u$, entonces veremos que

$$(1) = \left| \int_{\mathbb{R}^{3n}} \{e^{\frac{i}{\hbar}[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]} - e^{-iD_2 S_t(x, p)u}\} \cdot g^2(x, p) \widehat{f}_\hbar(p) \widehat{f}_\hbar(p + \hbar u) dx dp du \right| \leq \frac{C}{2} \hbar^{\frac{1}{n+2}}.$$

$$(2) = \left| \hbar \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{\frac{i}{\hbar}[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]} g(x, p) \bar{g}(x, p, u; \hbar) \cdot u \widehat{f}_\hbar(p) \widehat{f}_\hbar(p + \hbar u) dx dp du \right| \leq \frac{C}{2} \hbar^{\frac{1}{n+2}}.$$

Primero estudiemos (1), si se aplica la desigualdad de Schwarz con

respecto a p , se obtiene que (1) es menor o igual que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} g^2(x, p) (e^{\frac{i}{\hbar}[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]} - e^{-iD_2 S_t(x, p)u}) dx \right|^2 |\widehat{f}_\hbar(p)|^2 dp \right\}^{\frac{1}{2}} du \equiv$$

$$\equiv \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_\hbar(u) du .$$

Consideremos ahora los dos siguientes casos

$$(1.1) = \int_{\mathcal{B}_{1/\hbar^\alpha}^n(0)} \sigma_\hbar(u) du; \quad 0 < \alpha < \frac{1}{n+1} .$$

$$(1.2) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}_{1/\hbar^\alpha}^n(0)} \sigma_\hbar(u) du; \quad 0 < \alpha < \frac{1}{n+1} .$$

Comenzemos por (1.1), escribamos

$$S_t(x, q + \hbar u) = S_t(x, q) + \hbar D_2 S_t(x, q) u + \hbar^2 u \overline{S}_t(x, q, u; \hbar) u .$$

$$\text{Donde, } \overline{S}_t(x, q, u; \hbar) = \int_0^1 \int_0^1 s H_{22} S_t(x, q + rshu) dr ds .$$

Entonces se verifica

$$\overline{S}_t(x, q, u; \hbar) \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |s H_{22} S_t(x, q + rshu)| dr ds \leq (\text{lema 2.6}) \leq c \int_0^1 \int_0^1 s dr ds = \frac{c}{2} .$$

Para calcular (1.1), acotemos primero

$$(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ e^{\frac{i}{\hbar}[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]} - e^{-iD_2 S_t(x, p)u} \right\} g^2(x, p) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iD_2 S_t(x, p)u} \{ e^{-i\hbar u \overline{S}_t u} - 1 \} \varphi(x, p, p) dx .$$

Si se usa la identidad

$$(*) \quad e^{-iD_2 S_t(x, p)u} = i \frac{H_{12} S_t(x, p) u D_1 e^{-iD_2 S_t(x, p)u}}{|H_{12} S_t(x, p)u|^2} ,$$

y se integra por partes se llega a que

$$(A) = -i \int_{\mathbb{R}^n} D_1 \cdot \left[\frac{H_{12} S_t(x, p) u}{|H_{12} S_t(x, p) u|^2} \varphi(x, p, p) \{e^{-ihu \bar{S}_t u} - 1\} \right] e^{-iD_2 S_t(x, p) u} dx.$$

Ahora si se utiliza

$$|H_{12} S_t(x, p)| > \delta > 0 \text{ (lema 2.8).}$$

$$|\bar{S}_t(x, q, u; \hbar)| \leq \frac{c}{2}.$$

$$|\partial_1^r \partial_2^s S_t(x, p)| \leq c \text{ si } |r| + |s| \geq 2 \text{ (lema 2.6).}$$

$$|e^{iy} - 1| \leq |y|.$$

Y la hipótesis del lema sobre g con $m = n$, entonces se obtiene $(A) \leq \hbar K |u| (|p|^2 + 1)^{n+1}$, donde K es una constante. Usando ahora la hipótesis del lema sobre \hat{f}_\hbar obtendremos

$$(1.1) \leq \hbar K \|f_\hbar\|_{\mathcal{B}_{1/\hbar}^{2n+2}(\mathbb{R}^n)}^2 \int_{\mathcal{B}_{1/\hbar}^n(0)} |u| du = \bar{K} \hbar^{1-\alpha(n+1)}.$$

Estudiemos ahora (1.2). Consideremos por separado las dos siguientes integrales

$$(B) = \int_{\mathbb{R}^n} g^2(x, p) e^{\frac{i}{\hbar}[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]} dx.$$

$$(C) = \int_{\mathbb{R}^n} g^2(x, p) e^{-iD_2 S_t(x, p) u} dx.$$

Primero estudiemos (B). Usando la identidad

$$\begin{aligned} (**) e^{\frac{i}{\hbar}[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]} &= \\ &= -i\hbar \frac{D_1 S_t(x, p) - D_1 S_t(x, p + \hbar u)}{|D_1[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]|^2} D_1 e^{\frac{i}{\hbar}[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]}, \end{aligned}$$

e integrando por partes se obtiene

$$(B) = i\hbar \int_{\mathbb{R}^n} D_1 \cdot \left[\varphi(x, p, p) \frac{D_1 S_t(x, p) - D_1 S_t(x, p + \hbar u)}{|D_1[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]|^2} \right] \cdot e^{\frac{i}{\hbar}[S_t(x, p) - S_t(x, p + \hbar u)]} dx.$$

Escribamos, $D_1 S_t(x, p) - D_1 S_t(x, p + \hbar u) = \hbar G(x, p, u; \hbar) u$, segun

el lema 2.6 se verificará $|D_1 G(x, p, u; \hbar)| \leq c$, donde c es una constante. Teniendo en cuenta el lema 2.7 y la hipótesis sobre g con $m = n$, se llega a la siguiente acotación $(B) \leq \frac{k}{|u|}(|p|^2 + 1)^{n+1}$. Y si utilizamos (**)
 $n + 1$ veces, hallaremos la acotación $(B) \leq \frac{k}{|u|^{n+1}}(|p|^2 + 1)^{n+1}$.

Acotemos (C). Teniendo en cuenta la hipótesis sobre g con $m = n$, usando (*) $n + 1$ veces, e integrando por partes $n + 1$ veces, se halla que
 $(C) \leq \frac{k}{|u|^{n+1}}(|p|^2 + 1)^{n+1}$. Y por lo tanto se obtendrá

$$(1.2) \leq 2k \|f_h\|_{C^{2n+2}(\mathbb{R}^n)}^2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{1/\hbar^\alpha}(0)} \frac{1}{|u|^{n+1}} du = \tilde{K} \hbar^\alpha.$$

Tomemos ahora $\frac{C}{4}$ igual al máximo entre \bar{K} y \tilde{K} , y tomemos $\alpha = \frac{1}{n+2}$, entonces obtendremos

$$(1) \leq \frac{C}{2} \hbar^{\frac{1}{n+2}}.$$

La demostración de (2) es análoga a la de (1). ■

REFERENCIAS

- [1] S. ALBEVERIO - R. HOEGH-KROHN, *Oscillatory Integrals and the Method of Stationary Phase in Infinitely Many Dimensions*, with applications to the Classical Limit of Quantum Mechanics; Inv. Math., Vol. 40 (1977), pp. 59-106.
- [2] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson Editeur, Paris (1983).
- [3] J. CHAZARAIN - A. PIRIOU, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars, Paris (1981).
- [4] J. CHAZARAIN, *Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique*, Comm. Partial Diff. Equat., 5, no. 6 (1980), pp. 595-644.
- [5] J. J. DUISTERMAT, *Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities*, Comm. Pure and Appl. Math., Vol. 27 (1974), pp. 207-281.
- [6] G. A. HAGEDORN, *Semiclassical quantum mechanics I. The $\hbar \rightarrow 0$ limit for coherent states*, Comm. Math. Phys., 71, no. 1 (1980), pp. 77-93.
- [7] J. HARO, *El limit clàssic de la mecànica quàntica*, Tesi Doctoral, U.A.B. (1997).
- [8] J. HARO, *Étude classique de l'équation de Dirac*, Ann. Fond. Louis de Broglie, 23, no. 3-4 (1998), pp. 166-172.
- [9] J. HARTHONG, *La propagation des ondes; I.R.M.A.*, Strasbourg (1978).

- [10] J. HARTHONG, *Études sur la mécanique quantique*; Asterisque, **111** (1984).
- [11] B. HELFFER, *Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques*, Asterisque **112** (1984).
- [12] B. HELFFER - D. ROBERT, *Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **31**, **3** (1981), pp. 169-223.
- [13] L. HORMANDER, *Fourier Integral Operators I*, Acta Math., **127** (1971), pp. 79-183.
- [14] V. P. MASLOV, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Dunod, Paris (1972).
- [15] V. P. MASLOV - M. V. FEDORIUK, *Semi-classical approximation in quantum mechanics*, D. Riedel Publishing Company, Dordrecht, Holland (1981).
- [16] V. P. MASLOV - V. E. NAZAIKINSKI, *Asymptotics of operators and Pseudo-Differential Equations*, Consultants Bureau, New York (1988).
- [17] D. ROBERT, *Autour de l'approximation Semi-classique*, Progress in Mathematics, **68**, Birkhäuser (1987).
- [18] A. TRUMAN, *Feynman Path Integrals and Quantum Mechanics as $\hbar \rightarrow 0$* , J. Math. Phys., Vol. **17**, no. 10 (1976), pp. 1852-1862.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 Ottobre 2002
e in forma finale il 25 novembre 2002.