

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO JABARA

Gruppi di operatori che fissano un sottogruppo di Sylow

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 105 (2001), p. 77-85

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_2001__105__77_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_2001__105__77_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Gruppi di operatori che fissano un sottogruppo di Sylow.

ENRICO JABARA(*)

SUMMARY - Let be A and G finite groups and suppose that A acts on G . In this note we study groups G admitting a unique A -invariant Sylow p -subgroup for every $p \in \pi(G)$.

1. Introduzione.

Sia G un gruppo finito, un gruppo A di operatori su G verrà detto S -gruppo di operatori di G se per ogni $r \in \pi(G)$ esiste uno ed un solo r -sottogruppo di Sylow di G normalizzato da A . La definizione di S -gruppo di operatori, sempre associata alla condizione di coprimalità $(|G|, |A|) = 1$, è stata presa in considerazione indipendentemente da svariati autori (si vedano in particolare [6], [7], [1], [8]) soprattutto perché si presta molto bene a generalizzare il concetto di gruppo di automorfismi (di ordine coprimo con $|G|$) che agisce senza punti fissi non banali su G . È ovvio che se un gruppo G ammette il gruppo identico come S -gruppo di operatori allora G risulta nilpotente; così in [1] si dice che un gruppo G è A -nilpotente se esso ammette un S -gruppo di operatori A di ordine coprimo con $|G|$.

Scopo di questo lavoro è lo studio dei gruppi finiti dotati di un S -gruppo di operatori A che sia un p -gruppo (per qualche numero primo p) con p non necessariamente coprimo con $|G|$; seguendo [1] si dirà che tali gruppi sono A - p -nilpotenti. Ricorrendo ad alcuni risultati che utilizzano la

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica Applicata e Informatica, Università «Ca' Foscari» di Venezia, Via Torino 155, 31073 Mestre, Venezia.

classificazione dei gruppi semplici finiti si dimostrerà che un gruppo A - p -nilpotente è necessariamente p -nilpotente e risolubile. Si proverà inoltre che se $|A| = p^n$, e sono soddisfatte alcune condizioni su A , allora la lunghezza di Fitting di G non supera $n + 2$; se poi A è ciclico, e sono soddisfatte alcune ulteriori condizioni su p e G , si proverà che la lunghezza di Fitting di G non supera $n + 1$. Alcuni esempi mostreranno che tali limitazioni non si possono migliorare.

2. Notazioni e risultati preliminari.

Tutti i gruppi considerati in questo lavoro sono finiti; con G si indica un gruppo e con A un gruppo che agisce su G . Con p, q, r si indicano sempre numeri primi. Se A è un S -gruppo di operatori che è un p -gruppo si dice che A è un S - p -gruppo di operatori e che G è A - p -nilpotente. Se $A = \langle \alpha \rangle$ è un S -gruppo di operatori e $\alpha \in \text{Aut}(G)$, si dice che α è un S -automorfismo di G .

In quanto segue si considerano i seguenti sottoinsiemi di G (definiti induttivamente per ogni numero naturale i):

$$K_G^{(0)}(A) = \{1\} \quad K_G^{(i+1)}(A) = \{g \in G \mid g^\alpha g^{-1} \in K_G^{(i)}(A) \quad \forall \alpha \in A\}$$

$$K_G(A) = \cup K_G^{(i)}(A).$$

Se non esiste pericolo di equivoci tali insiemi sono denotati con $K^{(i)}$ e con K rispettivamente; è elementare la verifica che si tratta di insiemi A -invarianti di G .

Per ogni $\alpha \in A$ si considera la funzione $\delta_\alpha: G \rightarrow G$ $g \mapsto g^\alpha g^{-1}$. Se i è un numero naturale e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i \in A$ con $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)}(g)$ si indica $\delta_{\alpha_1}(\delta_{\alpha_2}(\dots \delta_{\alpha_i}(g) \dots))$; si ha $g \in K^{(i)}$ se e solo se $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)}(g) = 1$ per ogni $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) \in A^i$.

Infine se G è un gruppo e $r \in \pi(G)$ con $n_r(G)$ si indica il numero dei r -sottogruppi di Sylow contenuti in G .

Per il resto le notazioni sono quelle comunemente in uso (come, per esempio, in [3]).

OSSERVAZIONE 1. Dalla finitezza di $|G|$ discende che esiste un numero naturale t minimo per la proprietà $K^{(t)} = K^{(t+1)}$; si ha allora $K = K^{(t)}$. Se $(|G|, |A|) = 1$ allora $t = 1$ e $K = C_G(A)$.

LEMMA 1. Sia $\{G_r\}_{r \in \pi(G)}$ un insieme di sottogruppi di Sylow di G (uno per ogni divisore primo di $|G|$) e sia $N = \cap N_G(G_r)$. Allora N è un sottogruppo nilpotente di G .

DIM. Fissato $r \in \pi(N)$ sia N_r un r -sottogruppo di Sylow di N . Poiché G_r è l'unico r -sottogruppo di Sylow di $N_G(G_r)$ si ha $N_r \leq G_r$ e quindi $N_r \leq N \cap G_r$. D'altra parte $N \cap G_r$ è un r -sottogruppo di N e quindi, confrontando gli ordini, si ottiene $N_r = N \cap G_r$. Allora, per ogni $r \in \pi(N)$, N possiede come unico r -sottogruppo di Sylow $N \cap G_r$ e ciò dimostra che N è nilpotente. ■

LEMMA 2. Se A è un p -gruppo di operatori di G allora K contiene (almeno) un p -sottogruppo di Sylow di G .

DIM. Si consideri il prodotto semidiretto $\Gamma = GA$ con l'azione naturalmente indotta da A su G . Per i teoremi di Sylow in Γ esiste un p -sottogruppo di Sylow Γ_p contenente A . Allora, essendo $G \triangleleft \Gamma$, $G_p = G \cap \Gamma_p$ è un p -sottogruppo di Sylow di G che risulta A -invariante. Poiché Γ_p è nilpotente, esiste un numero naturale i tale che $[G_p, \underbrace{A, \dots, A}_{i \text{ volte}}] = 1$.

Dunque $G_p \subseteq K^{(i)} \subseteq K$. ■

La dimostrazione del seguente lemma è elementare.

LEMMA 3. Se $H \leq G$ è A -invariante allora $K_H(A) = H \cap K$. ■

LEMMA 4). Se $H \trianglelefteq G$ è A -invariante allora $K_{G/H}(A) \subseteq \frac{KH}{H}$; se poi $H \subseteq K$ allora $K_{G/H}(A) = \frac{KH}{H}$.

DIM. La prima parte dell'asserto è evidente. Sia allora $H \subseteq K$ e sia $gH \in K_{G/H}(A)$; esiste perciò un numero naturale i tale che per ogni $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) \in A^i$ si ha $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)}(gH) = H$ ovvero $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)}(g) \in H$. Poiché $H \subseteq K$ esiste un numero naturale j tale che per ogni $h \in H$ e ogni $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j) \in A^j$ si ha $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j)}(h) = 1$. Allora per ogni $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i+j}) \in A^{i+j}$ si ha $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i+j})}(g) = 1$ e $g \in K$. ■

In quanto segue se A è un S-gruppo di operatori di G con G_r si denota l'unico r -sottogruppo di Sylow di G che è A -invariante.

LEMMA 5. Se A è un S-gruppo di operatori di G allora $\langle K \rangle$ normalizza G_r per ogni $r \in \pi(G)$.

DIM. Fissato $r \in \pi(G)$ è sufficiente mostrare che gli elementi di $K^{(i)}$ normalizzano G_r per ogni $i \geq 0$. Si può procedere per induzione su i osservando che la base dell'induzione è banale. Sia allora $i > 0$ e $x \in K^{(i)}$, dunque per ogni $\alpha \in A$ è $x^\alpha x^{-1} \in K^{(i-1)}$ e, per l'ipotesi induttiva $G_r^{x^\alpha x^{-1}} = G_r$. Da ciò segue $G_r^x = G_r^{x^\alpha} = (G_r^x)^\alpha$ per ogni $\alpha \in A$ e G_r^x risulta essere un r -sottogruppo di Sylow A -invariante di G . L'ipotesi di unicità porge allora $G_r^x = G_r$. ■

LEMMA 6. Se A è un S-gruppo di operatori di G allora $\langle K \rangle$ è nilpotente.

DIM. Segue immediatamente dai lemmi 5 e 1. ■

LEMMA 7. Se A è un S- p -gruppo di operatori di G allora $K = \langle K \rangle$ e risulta $K = G_p \times O_{p'}(C_G(A))$.

DIM. Sia $H = \langle K \rangle$; per il lemma 2 è $G_p \subseteq K$ e G_p deve essere un p -sottogruppo di Sylow di H . Poiché H è, per il lemma 6, nilpotente si ha che G_p è un fattore diretto di H : $H = G_p \times H_{p'}$. Sia $r \in \pi(H)$, $r \neq p$; poiché H normalizza G_r (lemma 5) si può considerare il prodotto semidiretto $S = G_r H_{p'}$ che è certamente A -invariante. Poiché G_r è l'unico r -sottogruppo di Sylow A -invariante di G esso è anche l'unico di S e quindi $H_r = H \cap G_r$. Poiché $(r, p) = 1$ si ha $H_r = C_{G_r}(A) \subseteq K$. Ciò dimostra che $H_{p'}$ è prodotto diretto di $C_{G_r}(A)$ al variare di $r \in \pi(H) \setminus \{p\}$ e che tutti i sottogruppi di Sylow di H sono contenuti in K . Per dimostrare che $H \subseteq K$ basta ricordare che ogni elemento di H è prodotto delle sue r -componenti che tra loro commutano e ognuna delle quali appartiene al sottogruppo A -invariante $H_r \subseteq K$. Si conclude osservando che se $q, r \in \pi(H)$, $r \neq q \neq p$, $x \in H_q$ e $y \in H_r$ allora $[\langle x \rangle^A, \langle y \rangle^A] \leq [H_q, H_r] = 1$ e quindi per ogni $\alpha \in A$ si ha $\delta_\alpha(xy) = (xy)^\alpha (xy)^{-1} = x^\alpha x^{-1} y^\alpha y^{-1} = \delta_\alpha(x) \delta_\alpha(y)$ e $\delta_\alpha(x) = 1$ in quanto $q \neq p$. Allora $\delta_\alpha(xy) = \delta_\alpha(y) \in H_p \subseteq K$ e $xy \in K$. ■

LEMMA 8. Sia G un gruppo dotato di un S- p -gruppo di operatori A . Se G contiene un p' -sottogruppo di Hall A -invariante T allora A induce su T un S- p -gruppo di operatori.

DIM. Per ogni $q \in \pi(T)$ esiste certamente un q -sottogruppo di Sylow di T che è A -invariante in quanto $(|T|, |A|) = 1$ e si può applicare il teo-

rema 6.2.2 di [3]. T_q è l'unico q -sottogruppo di Sylow normalizzato da A perché T_q è anche un q -sottogruppo di Sylow di G . ■

Se A è un S - p -gruppo di operatori di G si consideri il prodotto semidiretto $\Gamma = GA$ con l'azione indotta in maniera naturale da A su G . Sia poi $A^* = \Gamma_p = G_p A$. Con tali notazioni si può enunciare il:

LEMMA 9. A^* induce per coniugio su Γ un S - p -gruppo di operatori.

DIM. G_p è l'unico p -sottogruppo di Sylow di G normalizzato da A e quindi Γ_p è l'unico p -sottogruppo di Sylow di Γ normalizzato da A^* . Se $r \in \pi(\Gamma)$ con $r \neq p$ sia G_r l'unico r -sottogruppo di Sylow di G normalizzato da A . Per il lemma 5 G_r è normalizzato da K e quindi da G_p perché (lemma 2) $G_p \subseteq K$. Dunque G_r è normalizzato da A^* ed esso è evidentemente l'unico r -sottogruppo di Sylow di G che gode di tale proprietà in quanto $A \leq A^*$. Poiché $r \neq p$ e A è un p -gruppo $G_r = \Gamma_r$ risulta essere un r -sottogruppo di Sylow di Γ ed esso è l'unico a essere normalizzato da A^* . ■

3. Risolubilità dei gruppi A - p -nilpotenti.

In questa parte si fa ricorso a due risultati che utilizzano la classificazione dei gruppi semplici finiti. Il primo è dovuto a A. Beltrán (teorema B di [1]):

(B) Se un gruppo G ammette un gruppo di operatori A con $(|G|, |A|) = 1$ e $C_G(A)$ nilpotente allora G è risolubile.

Il secondo è la dimostrazione, dovuta a N. Chigira (corollario 1 di [2]) della seguente congettura proposta da B. Huppert (e di una generalizzazione di essa):

(H) Un gruppo G è p -nilpotente se e solo se per ogni $r \in \pi(G)$ si ha:

i) $(n_r(G), p) = 1$;

ii) per ogni $r \in \pi(G)$ se R è un r -sottogruppo di Sylow di G allora $N_G(R)$ è p -nilpotente.

I risultati ottenuti in [2] permettono di dimostrare una forma più forte della congettura di Huppert:

LEMMA 10. Un gruppo G è p -nilpotente se e solo se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

- i) per ogni $r \in \pi(G)$ si ha $(n_r(G), p) = 1$.
 ii) se P è un p -sottogruppo di Sylow P di G allora $N_G(P)$ è p -nilpotente.

DIM. Per il teorema principale di [2] se G è un controesempio di ordine minimo all'asserto si deve avere $p = 3$ e $G \simeq U_3(q)$ con $q = 2^f$ e f numero pari non divisibile per 3. Si ha $3 \nmid q - 1$ e se P è un 3-sottogruppo di Sylow di G allora (dalla dimostrazione del teorema 1 di [2]) $N_G(P) = C \times D$ dove C è un sottogruppo ciclico di ordine $q + 1$ e D un sottogruppo diedrale di ordine $2(q - 1)$. Quindi $N_G(P)$ non è 3-nilpotente, contro il punto ii) delle ipotesi. ■

TEOREMA 1. Se G è un gruppo A - p -nilpotente allora G è p -nilpotente e risolubile.

DIM. Sia $\Gamma = GA$ allora, per il lemma 8, $A^* = G_p A$ induce su Γ un S -gruppo di operatori. Per dimostrare che G è p -nilpotente è sufficiente far vedere che Γ è p -nilpotente (infatti un p -complemento normale di Γ è anche un p -complemento normale di G).

Dal lemma 5 discende che per ogni $r \in \pi(\Gamma)$ il sottogruppo $K_r(A^*)$ è contenuto in $N_r(\Gamma_r)$, per il lemma 2 si ha $\Gamma_p \leq K_r(A^*)$ e quindi p non divide $|\Gamma : N_r(\Gamma_r)|$; dunque $(n_r(\Gamma), p) = 1$ per ogni $r \in \pi(\Gamma)$. Se c è la classe di nilpotenza di Γ_p , allora è immediato constatare che $[N_r(\Gamma_p), \underbrace{\Gamma_p, \dots, \Gamma_p}_{(c+1) - \text{volte}}] = 1$ da cui $[N_r(\Gamma_p), \underbrace{A^*, \dots, A^*}_{(c+1) - \text{volte}}] = 1$ e quindi $N_r(\Gamma_p) \leq K_r(A^*)$. Per i lemmi 6 e 7 $K_r(A^*)$ è un sottogruppo nilpotente e quindi $N_r(\Gamma_p)$, essendo nilpotente, ammette un p -complemento normale. Si può allora applicare il lemma 10 e concludere che Γ ammette un p -complemento normale T (che è anche un p -complemento normale di G).

Per il lemma 8 A è un S -gruppo di operatori di T e $(|T|, |A|) = 1$ inoltre, per il lemma 6, $C_T(A)$ è nilpotente; si applica allora (B) per concludere che T è risolubile.

Dalla risolubilità di T discende immediatamente quella di G . ■

4. Struttura dei gruppi A - p -nilpotenti.

Sia W_p il prodotto intrecciato standard di due gruppi di ordine p . Un gruppo P si dice W_p -libero se non contiene sezioni isomorfe a W_p . Dato un p -gruppo A di operatori si consideri la seguente condizione:

(†) Se $p = 2$ oppure se p è un primo di Mersenne allora A è W_p -libero.

TEOREMA 2. Sia G un gruppo A - p -nilpotente. Se $|A| = p^n$ e se la condizione (†) è soddisfatta allora la lunghezza di Fitting di G non supera $n + 2$.

DIM Sia T il complemento normale e risolubile di G (teorema 1); per il lemma 8 A induce un S - p -gruppo di operatori su T . Utilizzando i risultati di [9] e il teorema di [5] come nella dimostrazione del teorema di [8] si può concludere che T ha lunghezza di Fitting al più $n + 1$. Poiché G/T è nilpotente l'asserto è dimostrato. ■

Si osservi che dalla dimostrazione del teorema precedente discende che, sotto le stesse ipotesi, anche $\Gamma = GA$ ha lunghezza di Fitting al più $n + 2$.

LEMMA 11. Sia A un S - p -gruppo di operatori del gruppo G e sia H un p' -sottogruppo normale e A -invariante di G . Allora A induce su G/H un S - p -gruppo di operatori.

DIM. Posto $\bar{G} = G/H$ sia $r \in \pi(\bar{G})$ e $R = G_r$ l'unico r -sottogruppo di Sylow A -invariante di G . Allora HR/H è un r -sottogruppo di Sylow A -invariante di $\bar{G}$. Per dimostrare che è l'unico si ragiona per assurdo supponendo che HQ/H sia un r -sottogruppo di Sylow A -invariante di $\bar{G}$ distinto dal precedente.

Si ha $HR \neq HQ$ e si devono distinguere due casi:

I) $r \neq p$.

Poichè HR e HQ hanno ordine coprimo con p essi, per il teorema 6.2.2 di [3], contengono un r -sottogruppo di Sylow A -invariante. Tale sottogruppo è anche un r -sottogruppo di Sylow A -invariante di G che quindi deve coincidere con R . Dunque $R \leq HQ$ e $HQ = HR$: contraddizione.

II) $r = p$.

Allora, per il lemma 2, $K_{HR}(A)$ e $K_{HQ}(A)$ contengono un p -sottogruppo di Sylow rispettivamente di HR e HQ . Per il lemma 3 si ha $K_{HR}(A) = K \cap HR$ e $K_{HQ}(A) = K \cap HQ$. Ma K è un sottogruppo A -invariante nilpotente di G (lemma 6) e quindi contiene R come unico p -sottogruppo di Sylow. Dunque $R \leq HQ$ e $HQ = HR$: contraddizione. ■

Dato un gruppo G che ammette un S - p -gruppo di operatori di ordine p^n si consideri la seguente condizione:

($\ddagger$) a) se p è un numero primo di Fermat i 2-sottogruppi di Sylow di G sono abeliani.

b) se $p = 2$ tutti i q -sottogruppi di Sylow di G , con q numero primo di Mersenne e $q < 2^n$, sono abeliani.

Si può allora enunciare il

TEOREMA 3. Sia G un gruppo e α un suo S -automorfismo di ordine p^n . Se la condizione ($\ddagger$) è soddisfatta allora la lunghezza di Fitting di G non supera $n + 1$.

DIM. Sia T il p -complemento normale e risolubile di G (teorema 1). Allora, per il lemma 8, α induce su T un S -automorfismo di ordine (che divide) p^n . Poiché la condizione ($\ddagger$) è certamente soddisfatta da T , il teorema 1 di [6] porge che la serie:

$$1 \leq [T, \alpha^{p^{n-1}}] \leq \dots \leq [T, \alpha^{p^{n-1}}] \leq \dots \leq [T, \alpha] \leq T$$

è una serie di T che è normale, α -invariante, a quozienti nilpotenti e di lunghezza al più $n + 1$. Si verifica immediatamente che anche la serie

$$1 \leq [T, \alpha^{p^{n-1}}]^G \leq \dots \leq [T, \alpha^{p^{n-1}}]^G \leq \dots \leq [T, \alpha]^G \leq T$$

gode delle stesse proprietà. Su $T/[T, \alpha]^G$ l'automorfismo α induce l'identità. Posto $\overline{G} = G/[T, \alpha]^G$ si ha allora $K_{\overline{G}}(\alpha) = \overline{G}$. Per il lemma precedente α induce su $\overline{G}$ un S -automorfismo e quindi, per il lemma 6, $K_{\overline{G}}(\alpha)$ è nilpotente. Dunque G ammette una serie normale (A -invariante) a quozienti nilpotenti di lunghezza al più $n + 1$. ■

Nell'esempio 1 dato in [6] si sono costruiti, per ogni numero primo p e ogni numero intero n , dei p' -gruppi di lunghezza di Fitting $n + 1$ dotati di un S -automorfismo di ordine p^n (in tali esempi tutti i sottogruppi di Sylow di G sono abeliani). Quindi la limitazione fornita dal teorema 3 non è migliorabile.

Sia $q \geq 5$ un numero primo, V un gruppo abeliano elementare di ordine q^2 , Q il gruppo dei quaternioni (di ordine 8) e $\langle \alpha \rangle$ un gruppo di ordine 3. Sia G il gruppo di Frobenius avente come nucleo V e come complemento il prodotto semidiretto $Q\langle \alpha \rangle \cong SL(2, 3)$. Si verifica che α induce sul prodotto se-

midiretto VQ un S -automorfismo di ordine 3 (si veda l'esempio 2 di [6]); per il lemma 9 α induce un S -automorfismo di ordine 3 su $\Gamma = G\langle\alpha\rangle$. Poiché Γ ha lunghezza di Fitting 3 tale esempio mostra che la limitazione fornita nel teorema 2 non è migliorabile, inoltre la condizione $(\ddagger)$ a) è essenziale per ottenere il teorema 3 (per gli altri numeri primi di Fermat si costruiscono esempi analoghi utilizzando il teorema 3.5.3. di [4]).

L'autore non è a conoscenza di esempi che mostrino che la condizione $(\ddagger)$ b) è necessaria per ottenere il teorema 3.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BELTRÁN, *Actions with nilpotent fixed point subgroup*, Arch. Math. (Basel), **69** (1997), pp. 177-184.
- [2] N. CHIGIRA, *Number of Sylow subgroups and p -nilpotence of finite groups*, J. Algebra, **201** (1998), pp. 71-85.
- [3] D. GORENSTEIN, *Finite Groups*, Harper & Row, New York (1968).
- [4] P. HALL - G. HIGMAN, *On the p -length of p -soluble groups and reduction theorems for Burnside problem*, Proc. London Math. Soc., **6** (1956), pp. 1-42.
- [5] B. HARGRAVES, *The existence of regular orbits for nilpotent groups*, J. Algebra, **72** (1981), pp. 54-100.
- [6] E. JABARA, *Una generalizzazione degli automorfismi privi di coincidenze*, Rend. Acc. Naz. Sci. XL, **101** (1983), pp. 7-14.
- [7] H. MATSUYAMA, *On finite groups admitting a coprime automorphism of prime order*, J. Algebra, **174** (1995), pp. 1-38.
- [8] P. SHUMYATSKY, *Fitting height of A -nilpotent groups*, Rend. Sem. Mat. Padova, **104** (2000), in corso di pubblicazione.
- [9] A. TURULL, *Supersolvable automorphism groups of solvable groups*, Math. Z., **183** (1983), pp. 47-73.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 ottobre 1999.