Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Michel Gros

« Monodromie archimédienne » d'une courbe complexe : un appendice à [3]

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 103 (2000), p. 251-260

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_2000__103__251_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 103 (2000)

«Monodromie archimédienne» d'une courbe complexe: un appendice à [3].

MICHEL GROS (*)

0. Introduction.

Dans un article précédent [3], on a vu comment le formalisme (initié par Fontaine et Jannsen) des (K_0, φ, N)-structures sur la cohomologie de De Rham de la fibre générique d'une variété algébrique propre X à réduction semi-stable sur l'anneau des entiers O_K d'une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ permettait d'introduire naturellement pour une courbe de Mumford X_K (attachée à un sous-groupe discret co-compact Γ de $PGL_2(K)$) sur K un isomorphisme canonique (provenant naturellement par extension des scalaires de K_0 à K, d'un isomorphisme de K_0-espaces vectoriels)

$$H^0(X_K, \Omega^1_{X_K}) \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma, K) \tag{1}$$

via la considération de l'opérateur de monodromie N sur $H^1_{DR}(X_K/K)$ qui peut être vu comme une variante p-adique de l'isomorphisme d'Eichler-Shimura «classique» (1) (penser à X comme à un quotient du demi-plan de Poincaré par un sous-groupe discret co-compact Γ de $SL_2(\mathbb{R})$ et identifier $H^1(X, \mathbb{R})$ avec $H^1(X, \Gamma)$) valable pour n'importe quelle courbe projective et lisse X sur $\mathbb{C}$

$$Sh : H^0(X, \Omega^1_X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{R}). \tag{2}$$

(*) Indirizzo dell'A.: IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France. E-mail: gros@univ-rennes1.fr

(1) Ici, «en poids $n = 2$», il ne s'agit que de l'isomorphisme donné par la théorie de Hodge, mais je préfère garder une terminologie évoquant la possibilité de généralisations.

Une courbe de Mumford est un exemple de variété possédant une «réduction totalement dégénérée» (elle admet un modèle sur O_K dont la fibre spéciale est réunion de droites projectives se coupant transversalement) et si maintenant l'on veut bien accepter le point de vue [4] de Manin, toute variété algébrique projective lisse sur $\mathbb{C}$ devrait être elle-aussi à «réduction totalement dégénérée» (2). Il devient alors naturel de se demander si l'isomorphisme Sh ci-dessus ne pourrait lui aussi être vu comme étant obtenu par un opérateur de monodromie «archimédienne» (3), la courbe X sur $\mathbb{C}$ ayant «mauvaise réduction». Une façon de tester cela consiste à examiner ce que fournit la construction (valide pour toute variété algébrique projective et lisse sur $\mathbb{C}$) figurant dans la thèse de Consani [1]. Bien que l'on ne sache ni dire ce que pourrait être: l'anneau des entiers de $\mathbb{C}$, un modèle de X sur ce dernier, la «fibre spéciale» de X, l'espace $\widetilde{X}^*$, ..., ni a fortiori dire quelle théorie cohomologique il faut appliquer à cette situation (ce qui évidemment rejoint les questions posées par Deninger [2]) pour espérer définir sur celle-ci un opérateur de monodromie N, Consani sait définir, via la seule donnée de X des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels jouant le rôle des gradués pour la filtration par la monodoromie. L'analogue de l'isomorphisme ci-dessus est, dans les notations (et la numérotation des gradués) adoptées par Consani, un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$(3)\qquad N : gr_2^W H^1(\widetilde{X}^*)/\mathrm{Im}\,(N : gr_4^W H^1(\widetilde{X}^*) \hookrightarrow gr_2^W H^1(\widetilde{X}^*) \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} gr_0^W H^1(\widetilde{X}^*)/\mathrm{Im}\,(N^2 : gr_4^W H^1(\widetilde{X}^*) \hookrightarrow gr_0^W H^1(\widetilde{X}^*))$$

que nous identifierons à l'isomorphisme Sh ci-dessus.

Pour les seuls aspects de la structure de Module de Lefschetz bigradué polarisé «à la Deligne-Saito» figurant dans [1] que nous utilisons, on retrouve donc un résultat déjà bien connu (4), mais la considération de formes différentielles réelles et de formes non holomorphes permet

(2) On ne sait pas donner pour l'instant un sens à cette dernière expression.

(3) Opérateur se «réalisant» sur $\mathbb{R}$ comme l'isomorphisme p-adique se réalise sur K_0.

(4) La compatibilité que nous vérifions ne nous a pas semblé entièrement immédiate à partir de [1].

d'exhiber quelques analogies entre les courbes de Mumford et les courbes projectives lisses sur $\mathbb{C}$ en considérant les isomorphismes d'Eichler-Shimura classique et p-adiques comme des réécritures remarquables (et «uniformes») d'isomorphismes tout à fait généraux (valides en fait respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur K_0 et pour des classes de variétés extrêmement générales), c'est là notre seule motivation dans cet appendice.

Le plan de l'article est très simple: après avoir rappelé la construction de Consani [1] dans une première partie, nous faisons l'exercice de vérifier que la formulation générale de loc. cit. redonne effectivement l'isomorphisme déjà connu (noter toutefois le «twist»).

1. La construction de Consani. Corollaires.

Nous ne présenterons cette construction [1], 4 que pour les variétés X projectives lisses définies sur $\mathbb{C}$ et en nous bornant aux seuls objets dont nous avons besoin. On notera n la dimension de X.

On notera $(A^{a,b}+A^{b,a})_{\mathrm{R}}$ le groupe abélien des formes différentielles (analytiques ou C^{∞}: cela donne les mêmes résultats finaux) réelles de type $(a,b)+(b,a)$ sur X. Une expression du type $(A^{a,b}+A^{b,a})_{\mathrm{R}}(p)$ avec $p\in\mathbb{Z}$ signifie que l'on prend le twist («à la Tate»). de $(A^{a,b}+A^{b,a})_{\mathrm{R}}$, ie.

$$(A^{a,b}+A^{b,a})_{\mathrm{R}}(p) := (2\pi\sqrt{-1})^{p}(A^{a,b}+A^{b,a})_{\mathrm{R}}. \tag{4}$$

Soient $i, j, k\in\mathbb{Z}$. On pose

$$K^{i,j,k} :=$$

$$:= \begin{cases} \left(\bigoplus_{\substack{a+b=j+n\\ |a-b|\leq 2k-i}} A^{a,b}\right)_{\mathrm{R}}\left(\dfrac{n+j-i}{2}\right) & \text{si } n+j-i=0 \bmod 2 \text{ et } k\geq \max(0,\ i)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et

$$K^{i,j} := \bigoplus_{k} K^{i,j,k};\ K^{*} := \bigoplus_{i+j=*} K^{i,j} \tag{5}$$

On dispose également d'applications (pour la définition desquelles on renvoie à [1], 4)

$$d' : K^{i,j,k} \to K^{i+1,j+1,k+1} ; \; d'' : K^{i,j,k} \to K^{i+1,j+1,k} . \tag{6}$$

Muni de $d := d' + d''$, le module gradué K^* devient donc un complexe $(K^\cdot, d)$.

L'opérateur de «monodromie»

$$N : K^{i,j,k} \to K^{i+2,j,k+1} \tag{7}$$

est défini par $N(a) = (2\pi\sqrt{-1})^{-1} a$ pour $a \in K^{i,j,k}$. Il commute à d' et d''.

On pose, pour $q > 0$ et $r \in \mathbb{Z}$

$$gr^W_{q+r} H^q(\tilde{X}^*) := \frac{\mathrm{Ker}\,(d : K^{-r,q-n} \to K^{-r+1,q-n+1})}{\mathrm{Im}\,(d : K^{-r-1,q-n-1} \to K^{-r,q-n})} ; \tag{8}$$

$$gr^W_{q+r} H^q(Y) := \frac{\mathrm{Ker}\,(d : (\mathrm{Ker}\,N)^{-r,q-n} \to (\mathrm{Ker}\,N)^{-r+1,q-n+1})}{\mathrm{Im}\,(d : (\mathrm{Ker}\,N)^{-r-1,q-n-1} \to (\mathrm{Ker}\,N)^{-r,q-n})} \tag{9}$$

avec

$$(\mathrm{Ker}\,N)^{\cdot,\cdot} = \mathrm{Ker}\,(N : K^{\cdot,\cdot} \to K^{\cdot+2,\cdot}(-1)) ; \tag{10}$$

et

$$gr^W_{q+r} H^q_Y(X) := \frac{\mathrm{Ker}\,(d : (\mathrm{Coker}\,N)^{-r,q-n-2} \to (\mathrm{Ker}\,N)^{-r+1,q-n-1})}{\mathrm{Im}\,(d : (\mathrm{Coker}\,N)^{-r-1,q-n-3} \to (\mathrm{Coker}\,N)^{-r,q-n-2})} \tag{11}$$

avec

$$(\mathrm{Coker}\,N)^{\cdot,\cdot} := \mathrm{Ker}\,(N : K^{\cdot,\cdot} \to K^{\cdot+2,\cdot}(-1)) ; \tag{12}$$

REMARQUE. Cette numérotation des gradués ne fournit pas des isomorphismes (cf. plus bas) tels que N^i envoie isomorphiquement gr^W_{-i} sur gr^W_i (contrairement à la numérotation usuelle) mais nous préférons garder pour la commodité des références à [1] la numérotation (qui fait apparaitre naturellement les «poids» dans la numérotation) adoptée par Consani.

On a $gr^W_{q+r} H^q(\tilde{X}^*) = 0$ sauf si $q + r = 2p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et, pour une meilleure lisibilité de ce qui va suivre, nous regroupons dans le diagramme commutatif suivant certains des résultats du corollaire 4.4 de [1] spécialisés au cas $q=1$ qui va nous occuper dans la suite

$$
(13)\qquad
\begin{array}{ccc}
\vdots & \xrightarrow{N^6} & \vdots \\
{\scriptstyle N}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle N} \\
gr_6^W(H^1(\widetilde{X}^*)) & \xrightarrow{N^4} & gr_{-2}^W(H^1(\widetilde{X}^*)) \\
{\scriptstyle N}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle N} \\
gr_4^W(H^1(\widetilde{X}^*)) & \xrightarrow{N^2} & gr_0^W(H^1(\widetilde{X}^*)) \\
{\scriptstyle N}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle N} \\
gr_2^W(H^1(\widetilde{X}^*)) & \xrightarrow{Id} & gr_2^W(H^1(\widetilde{X}^*)) \\
{\scriptstyle N}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle N} \\
gr_0^W(H^1(\widetilde{X}^*)) & \xleftarrow{N^2} & gr_4^W(H^1(\widetilde{X}^*)) \\
{\scriptstyle N}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle N} \\
gr_{-2}^W(H^1(\widetilde{X}^*)) & \xleftarrow{N^4} & gr_6^W(H^1(\widetilde{X}^*)) \\
{\scriptstyle N}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle N} \\
\vdots & \xleftarrow{N^6} & \vdots
\end{array}
$$

dans lequel:

– les flèches verticales N sont injectives si leur source est un gr_i^W avec $i>0$ et surjectives si leur but est un gr_i^W avec $i\leqslant 0$

– les flèches horizontales sont des isomorphismes (ce point est tout à fait non trivial; c'est, dans la présentation adoptée dans [1], une conséquence de la construction sur le complexe $K^{\cdot}$ d'une structure de module de Hodge mixte bigradué polarisable au sens de Saito).

D'autre part, on a une décomposition en somme directe (cf. [1], preuve de 4.12)

$$(14)\qquad gr_0^W H^1(\widetilde{X}^*) = gr_0^W H^1(Y) \oplus \mathrm{Im}\,(N^2\colon gr_4^W H^1(\widetilde{X}^*) \to gr_0^W H^1(\widetilde{X}^*))\,.$$

Il est donc naturel de considérer le sous-espace $\mathrm{Im}\,(N\colon gr_4^W H^1(\widetilde{X}^*) \to$ $\to gr_2^W H^1(\widetilde{X}^*))$ de $gr_2^W H^1(\widetilde{X}^*)$ et le quotient $gr_2^W H^1(\widetilde{X}^*)/\mathrm{Im}\,(N\colon gr_4^W H^1(\widetilde{X}^*) \hookrightarrow$

$\hookrightarrow gr_2^W H^1(\tilde{X}^*))$. La suite exacte de la proposition 4.9 de [1] permet d'identifier ce quotient: on a un isomorphisme

$$\begin{aligned}(15)\qquad \lambda : gr_2^W H^1(\tilde{X}^*)/\mathrm{Im}\,(N : gr_4^W H^1(\tilde{X}^*) \hookrightarrow gr_2^W H^1(\tilde{X}^*)) \\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,(gr_4^W H_Y^3(X) \to gr_4^W H^3(Y))\end{aligned}$$

Le lemme 4.3 de [1] dit alors que $gr_4^W H^3(Y) = 0$ et, finalement, on a donc le

COROLLAIRE On a un isomorphisme $N : gr_4^W H_Y^3(X) \xrightarrow{\sim} gr_0^W H^1(Y)$.

REMARQUE. Toutes ces écritures de groupes de cohomologie gardent un sens lorsque X est une courbe à réduction semi-stable sur O_K et que Y est sa fibre spéciale. Soient $Y^{(1)}$ la réunion disjointe des composantes irréductibles de Y et $Y^{(2)}$ la réunion disjointe des intersections de celles-ci. On a alors (lemma 3.3 de [1]) $(l \neq p)$

$$(16)\qquad gr_4^W H_Y^3(X) = \mathrm{Ker}\,(d'' : H^0(Y^{(2)}, \mathbb{Q}_l(-2)) \to H^2(Y^{(1)}, \mathbb{Q}_l(-1)))$$

avec d'' la flèche de Gysin (image directe) et

$$(17)\qquad gr_0^W H^1(Y) = \frac{H^0(Y^{(2)}, \mathbb{Q}_l)}{\mathrm{Im}\,(d' : H^0(Y^{(1)}, \mathbb{Q}_l) \to H^0(Y^{(2)}, \mathbb{Q}_l))}$$

avec d' la flèche de restriction (à la Cech); expressions qui interviennent dans la suite spectrale des poids (cf. [3] pour un rappel de celle-ci) et sont isomorphes (via l'opérateur de monodromie $N : gr_4^W H_Y^3(X) \xrightarrow{\sim} gr_0^W H^1(Y)$).

2. Isomorphisme d'Eichler-Shimura et monodromie archimédienne.

Nous allons donc comparer l'isomorphisme du corollaire précédent avec l'isomorphisme d'Eichler-Shimura (donné par la décomposition de Hodge).

On va tout d'abord décrire $gr_4^W H_Y^3(X)$ et $gr_0^W H^1(Y)$ et ensuite, on réexaminera comment ils sont apparus. On a, d'après le lemme 4.3 de [1] pour $gr_4^W H_Y^3(X)$:

$$(18)\quad gr_4^W H_Y^3(X) = \frac{\mathrm{Ker}\left(d'': \left(\bigoplus_{\substack{a+b=1\\|a-b|\leq 1}} A^{a,b}\right)_{\mathbb{R}}(1) \to \left(\bigoplus_{\substack{a+b=2\\|a-b|\leq 0}} A^{a,b}\right)_{\mathbb{R}}(1)\right)}{\mathrm{Im}(d'')}$$

et donc,

$$(19)\qquad gr_4^W H_Y^3(X) = \frac{\mathrm{Ker}(d'':(A^{0,1}\oplus A^{1,0})_{\mathbb{R}}(1)\to (A^{1,1})_{\mathbb{R}})(1)}{\mathrm{Im}(d'':(A^{0,0})_{\mathbb{R}}(1)\to (A^{0,1}\oplus A^{1,0})_{\mathbb{R}}(1))}$$

et, pour $gr_0^W H^1(Y)$:

$$(20)\quad gr_0^W H^1(Y) = \frac{\mathrm{Ker}\left(d': \left(\bigoplus_{\substack{a+b=1\\|a-b|\leq 1}} A^{a,b}\right)_{\mathbb{R}} \to \left(\bigoplus_{\substack{a+b=2\\|a-b|\leq 2}} A^{a,b}\right)_{\mathbb{R}}\right)}{\mathrm{Im}(d')}$$

et donc,

$$(21)\qquad gr_0^W H^1(Y) = \frac{\mathrm{Ker}(d':(A^{0,1}\oplus A^{1,0})_{\mathbb{R}}\to (A^{1,1})_{\mathbb{R}})}{\mathrm{Im}(d':(A^{0,0})_{\mathbb{R}}\to (A^{0,1}\oplus A^{1,0})_{\mathbb{R}})}.$$

Comme l'on a une résolution du faisceau constant $\mathbb{R}$ sur X,

$$(22)\qquad 0\to\mathbb{R}\to(A^{0,0})_{\mathbb{R}}\xrightarrow{d'}(A^{0,1}\oplus A^{1,0})_{\mathbb{R}}\xrightarrow{d'}(A^{1,1})_{\mathbb{R}}\to 0,$$

on en déduit une identification canonique

$$(23)\qquad gr_0^W H^1(Y)\simeq H^1(X,\mathbb{R}).$$

Passons maintenant à la source de N. On a

$$(24)\qquad gr_2^W H^1(\tilde{X}^*) := \frac{\mathrm{Ker}(d: K^{-1,0}\to K^{0,1})}{\mathrm{Im}(d: K^{-2,-1}\to K^{-1,0})}.$$

Nous allons maintenant décrire explicitement comment est obtenu l'isomorphisme N. On a un morphisme de complexes

$$(25)\qquad \begin{array}{ccccc} K^{-2,-1} & \xrightarrow{d} & K^{-1,0} & \xrightarrow{d} & K^{0,1} \\ {\scriptstyle N}\downarrow & & {\scriptstyle N}\downarrow & & {\scriptstyle N}\downarrow \\ K^{0,-1} & \xrightarrow{d} & K^{1,0} & \xrightarrow{d} & K^{2,1} \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale du milieu est un isomorphisme, celle de droite surjective, celle de gauche injective (c'est évident sur la description qui va suivre). Pour écrire ce que sont ces complexes dans le cas présent, nous introduirons une indéterminée T qui nous servira uniquement à préciser le degré en k dans l'écriture $K^{i,j} := \oplus_k K^{i,j,k}$ et qui ne joue absolument aucun rôle nouveau par rapport à [1]. On a, pour la ligne du haut,

$$K^{-2,-1} = (A^{0,0})_{\mathrm{R}}(1).T^0 \oplus (A^{0,0})_{\mathrm{R}}(1).T^1 \oplus (A^{0,0})_{\mathrm{R}}(1).T^2 \oplus (A^{0,0})_{\mathrm{R}}(1).T^3 \oplus \dots \tag{26}$$

$$\begin{aligned} K^{-1,0} = (A^{0,1} \oplus A^{1,0})_{\mathrm{R}}(1).\ T^0 \oplus (A^{0,1} \oplus A^{1,0})_{\mathrm{R}}(1).\ T^1 \oplus \\ (A^{0,1} \oplus A^{1,0})_{\mathrm{R}}(1).\ T^2 \oplus (A^{0,1} \oplus A^{1,0})_{\mathrm{R}}(1).\ T^3 \oplus \dots \end{aligned} \tag{27}$$

$$K^{0,1} = (A^{1,1})_{\mathrm{R}}(1).T^0 \oplus (A^{1,1})_{\mathrm{R}}(1).T^1 \oplus (A^{1,1})_{\mathrm{R}}(1).T^2 \oplus (A^{1,1})_{\mathrm{R}}.T^3 \oplus \dots \tag{28}$$

et, pour la ligne du bas:

$$K^{0,-1} = (A^{0,0})_{\mathrm{R}}.\ T^0 \oplus (A^{0,0})_{\mathrm{R}}.\ T^1 \oplus (A^{0,0})_{\mathrm{R}}.\ T^2 \oplus (A^{0,0})_{\mathrm{R}}.\ T^3 \oplus \dots \tag{29}$$

$$\begin{aligned} K^{1,0} = 0.\ T^0 \oplus (A^{0,1} \oplus A^{1,0})_{\mathrm{R}}.\ T^1 \oplus \\ (A^{0,1} \oplus A^{1,0})_{\mathrm{R}}.\ T^2 \oplus (A^{0,1} \oplus A^{1,0})_{\mathrm{R}}.\ T^3 \oplus \dots \end{aligned} \tag{30}$$

$$K^{2,1} = 0.\ T^0 \oplus 0.\ T^1 \oplus (A^{1,1})_{\mathrm{R}}.\ T^2 \oplus (A^{1,1})_{\mathrm{R}}.\ T^3 \oplus \dots \tag{31}$$

La monodromie N est donc définie par la multiplication par $T.(2\pi\sqrt{-1})^{-1}$.

On passe maintenant à l'explicitation des différentielles pour la ligne du haut (cf. [1] pour le rappel des définitions des différents opérateurs): la différentielle $d\colon K^{-2,-1} \to K^{-1,0}$ est donnée par

$$\begin{aligned} d(\alpha_0.T^0 + \alpha_1.T^1 + \alpha_2.T^2 + \dots) := -\,d^c\alpha_0.T^0 + (d\alpha_0 - d^c\alpha_1).T^1 + \\ (d\alpha_1 - d^c\alpha_2).T^2 + (d\alpha_2 - d^c\alpha_3).T^3 + \dots \end{aligned} \tag{32}$$

et la différentielle $d: K^{-1,0} \to K^{0,1}$ est donnée par

$$\begin{aligned} d(\beta_0.T^0 + \beta_1.T^1 + \beta_2.T^2 + \dots) := -\,d^c_{rest}\beta_0.T^0 + (d\beta_0 - d^c\beta_1).T^1 + \\ (d\beta_1 - d^c\beta_2).T^2 + (d\beta_2 - d^c\beta_3).T^3 + \dots \end{aligned} \tag{33}$$

Pour la ligne du bas, la différentielle $d: K^{0,-1} \to K^{1,0}$ est donnée par

$$\begin{aligned} d(0.\ T^0 + \gamma_1.\ T^1 + \gamma_2.\ T^2 + \dots) := 0.\ T^0 + (-d^c_{rest}\gamma_1).\ T^1 + \\ (d\gamma_1 - d^c\gamma_2).\ T^2 + (d\gamma_2 - d^c\gamma_3).\ T^3 + (d\gamma_3 - d^c\gamma_4).\ T^4 + \dots \end{aligned} \tag{34}$$

et la différentielle $d: K^{1,0} \to K^{2,1}$ est donnée par

$$d(0.T^0 + v_1.T^1 + v_2.T^2 + \dots) := 0.T^0 + 0.T^1 + (dv_1 - d^c v_2).T^2 + (dv_2 - d^c v_3).T^3 + \dots \tag{35}$$

L'examen des premiers termes non nuls des deux dernières expressions permet d'exhiber l'inclusion de $gr_0^W H^1(Y)$ dans $gr_0^W H^1(\tilde{X}^*)$: à une classe x de $gr_0^W H^1(Y)$ représentée par un cycle (ie. donne 0 si on lui applique d) γ dans $(A^{0,1} \oplus A^{1,0})_{\mathbb{R}}$, on associe l'élément de $\gamma . T$ de $K^{1,0}$ qui est bien un cycle dont on prend la classe, ce qui fournit un élément de $gr_0^W H^1(\tilde{X}^*)$.

De même avec une classe y de $gr_4^W H_Y^3(X)$ représentée par un cycle (ie. donne 0 si on lui applique d) β dans $(A^{0,1} \oplus A^{1,0})_{\mathbb{R}}$, on associe l'élément $2\pi\sqrt{-1}) \cdot \beta . T^0$ qui est bien un cycle dont on prend la classe, ce qui fournit un élément de $gr_2^W H^1(\tilde{X}^*)$.

Partant maintenant d'une forme $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$, comme celle-ci est holomorphe, on a $\bar{\partial}(\omega) = 0$ et, puisque X est Kählérienne (et donc ordinaire, comme une courbe de Mumford!), $d'(\omega) = 0$; d'où par suite aussi $\partial(\omega) = 0$ et $d''(\omega) = 0$. On dispose donc d'une flèche naturelle

$$H^0(X, \Omega_X^1) \to gr_4^W H_Y^3(X) \tag{36}$$

qui à ω associe $2\pi\sqrt{-1} . Re\omega$. Les descriptions précédentes rendent alors claire la

PROPOSITION. L'isomorphisme d'Eichler-Shimura s'identifie à l'isomorphisme de monodromie archimédienne, ie. on a un diagramme commutatif dans lequel toutes les flèches sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \Omega_X^1) & \xrightarrow{Sh} & H^1(X, \mathbb{R}) \\ {\scriptstyle (36)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (23)} \\ gr_4^W H_Y^3(X) & \xrightarrow{N} & gr_0^W H^1(Y) \end{array} \tag{37}$$

REMARQUE. La définition de la flèche (3) suggère d'écrire l'isomorphisme d'Eichler-Shimura $Sh : H^0(X, \Omega^1_X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{R})(1)$, lequel «twist» est parfaitement en accord avec l'écriture de l'isomorphisme d'Eichler-Shimura p-adique lorsque l'on tient compte de l'action de frobenius.

RÉFÉRENCES

[1] K. CONSANI, *Double complexes and Euler L-factors*, Compositio Math., **111**, n. 3 (1998), pp. 323-358.

[2] C. DENINGER, *Motivic L-functions and regularized determinants*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume **55** (1994), part 1, pp. 707-743.

[3] M. GROS, *Sur les* (K_0, φ, N)*-structures attachées aux courbes de Mumford*, Preprint.

[4] YU I MANIN, *Three-dimensionnal hyperbolic geometry as* ∞*-adic Arakelov geometry*, Inv. Math., **104** (1991), pp. 223-244.

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 settembre 1998.