

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CORRADO MARASTONI

Varietà generiche rispetto a sistemi differenziali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 86 (1991), p. 233-237

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1991__86__233_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1991__86__233_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Varietà generiche rispetto a sistemi differenziali

CORRADO MARASTONI(*)

SUNTO - Si introduce la nozione di sottovarietà generica $S \subseteq X \simeq \mathbb{C}^n$ rispetto ad un sistema differenziale $\mathcal{N}$ e si dà la relazione tra le microfunzioni soluzioni di $\mathcal{N}$ e di $\mathcal{N}^b$ (= sistema indotto su $S^{\mathbb{C}}$). Si espone infine il caso $\mathcal{N} = \bar{\partial}$ ottenendo come applicazione i risultati di [D'A-D'A-Z].

1. Varietà generiche rispetto ad un sistema differenziale.

Sia $\phi: S \rightarrow M$ una mappa tra varietà reali, e siano Y ed X complessificati di S ed M rispettivamente.

Consideriamo il diagramma

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & M \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ Y & \xrightarrow[\phi^{\mathbb{C}}]{} & X \end{array}$$

ove i, j sono le mappe di inclusione e $\phi^{\mathbb{C}}$ la complessificata di ϕ .

Osserviamo che $S \times_Y TY \simeq TS \oplus_S iTS$, $M \times_X TX \simeq TM \oplus_M iTM$; ne segue che sussiste un diagramma canonico commutativo

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccccc} TS & \xrightarrow{\phi'} & TM \\ q \uparrow & \nearrow \tilde{\phi}' & \uparrow q \\ S \times_Y TY & \xrightarrow[\phi^{\mathbb{C}'}]{} & M \times_X TX \end{array}$$

(*) Indirizzo dell'A.: Università di Padova, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Via Belzoni 7, 35131 Padova, Italy.

ove le mappe q sono definite dai diagrammi

$$\begin{array}{ccc} S \times_Y TY & \xrightarrow{q} & TS \\ \downarrow & & \uparrow 1^{\text{a}} \text{ proiez.} \\ TS \oplus_S iTS & = & TS \oplus_S iTS \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} M \times_X TX & \xrightarrow{q} & TM \\ \downarrow & & \uparrow 1^{\text{a}} \text{ proiez.} \\ TM \oplus_M iTM & = & TM \oplus_M iTM. \end{array}$$

In particolare, come si ricava dall'osservazione di (1.2), resta individuata una mappa lineare

$$(1.3) \quad \tilde{\phi}' = q \circ \phi^{C'}$$

che però, nonostante la notazione ambigua, non è necessariamente la derivata di una mappa $\tilde{\phi}: Y \rightarrow M$.

Supponiamo ora che ϕ sia un'immersione, e sia $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_X$ -modulo coerente. Ricordiamo che la mappa ϕ^C è detta non caratteristica rispetto ad $\mathcal{N}$ se e solo se ${}^t\phi^{C'}$ è propria su $\text{char } \mathcal{N}$.

DEFINIZIONE 1.1. S è generica in M rispetto ad $\mathcal{N}$ se e solo se ϕ^C è non caratteristica rispetto ad $\mathcal{N}$.

$$\text{DEFINIZIONE 1.2.} \quad \mathcal{N}^b = (\phi^C)^* \mathcal{N}.$$

OSSERVAZIONE. Se S è generica in M rispetto ad $\mathcal{N}$ è classico che $\mathcal{N}^b$ è ancora un $\mathcal{O}_Y$ -modulo coerente (cf. [S]).

Il classico teorema di Cauchy-Kowalewski-Kashiwara (cf. [K-S]) dà immediatamente il seguente

$$\text{TEOREMA 1.3.} \quad (\phi^C)^{-1} \mathbf{R} \mathcal{H} \text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_X) = \mathbf{R} \mathcal{H} \text{om}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}^b, \mathcal{O}_Y).$$

Sia Ω un aperto di S con bordo $N = \partial\Omega$ analitico. Definiamo i seguenti fasci di microfunzioni:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \mathcal{C}_{\clubsuit|X} = \mu \text{ hom}(Z_{\clubsuit}, \mathcal{O}_X) \otimes \text{or}_{S|X}[\text{codim}_X S], \\ \mathcal{C}_{\clubsuit|Y} = \mu \text{ hom}(Z_{\clubsuit}, \mathcal{O}_Y) \otimes \text{or}_{S|Y}[\dim S], \quad \clubsuit = S, \Omega, N. \end{cases}$$

Abbiamo:

TEOREMA 1.4. *Sia S generica in M rispetto ad $\mathcal{N}$. Allora*

$${}^t\phi_*^{C'} \mathbf{R} \mathcal{H} \text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{C}_{\clubsuit|X}) \simeq \mathbf{R} \mathcal{H} \text{om}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}^b, \mathcal{C}_{\clubsuit|Y})$$

per $\clubsuit = S, \Omega, N$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\mathcal{F} = \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_X)$ e notiamo che $(\phi^C)^{-1}(\mathcal{F}) = \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}^b, \mathcal{O}_Y)$.

Consideriamo inoltre il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S = S & \subseteq & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[\phi^C]{} & X. \end{array}$$

ϕ^C è un'immersione non caratteristica per $\mathcal{F}$ su T^*Y (in particolare su $T_S^*Y = SS Z_S$ e su $(\bar{Q} \times_S T_S^*Y) \oplus N^*Q^a = SS Z_Q$).

Per [K-S, Teorema 5.4.1], si ha allora che

$${}^t\phi_*^C \mu \operatorname{hom}(Z_{\blacktriangleright}, \mathcal{F}) \simeq \mu \operatorname{hom}(Z_{\blacktriangleright}, (\phi^C)^! \mathcal{F}) \quad \text{per } \blacktriangleright = S, \Omega, N.$$

Inoltre

$$(\phi^C)^! \mathcal{F} = (\phi^C)^{-1} \mathcal{F} \otimes \operatorname{or}_{Y|X}[\operatorname{codim}_X Y].$$

Perciò

$$\begin{aligned} {}^t\phi_*^C \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{C}_{S|X}) &= {}^t\phi_*^C \mu \operatorname{hom}(Z_S, \mathcal{F}) \otimes \operatorname{or}_{S|X}[\operatorname{codim}_X S] \simeq \\ &\simeq \mu \operatorname{hom}(Z_S, (\phi^C)^{-1} \mathcal{F}) \otimes \operatorname{or}_{S|Y}[\operatorname{codim}_Y S] \simeq \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}^b, \mathcal{C}_{S|Y}). \end{aligned}$$

Analogamente si ragiona per $\mathcal{C}_{Q|X}, \mathcal{C}_{Q|Y}$ e $\mathcal{C}_{N|X}, \mathcal{C}_{N|Y}$. ■

OSSERVAZIONE. Nelle precedenti ipotesi, se assumiamo che

$$(1.5) \quad H^R \pi^*(\theta) \notin C_{T_M^* X}(\operatorname{char} \mathcal{N}) \quad \forall \theta \in T_S^* M,$$

ove

$$T^* M \xrightarrow{\pi^*} T^* T_M^* X \xrightarrow{H^R} T_{T_M^* X} T^* X$$

con $T_M^* X \xrightarrow{\pi} M$ ed H^R isomorfismo hamiltoniano reale di $(T^* X)^R$, allora vale

$$(1.6) \quad {}^t\phi_*^C \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{C}_{M|X}) \simeq \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}^b, \mathcal{C}_{S|Y}).$$

2. Varietà di Cauchy-Riemann generiche.

Nelle notazioni del § 1, assumiamo ora che $M = Z^R$ ove Z sia una varietà complessa, $X = Z \times \bar{Z}$, $\mathcal{N} = \bar{\partial}$ (sistema di Cauchy-Riemann in X),

$r = \text{codim}_M^R S$, e che $X \xrightarrow{p} M$ sia la prima proiezione. È classica la seguente

DEFINIZIONE 2.1. S è generica in $M \Leftrightarrow TS \underset{S}{+} iTS \simeq S \underset{M}{\times} TM$.

Se S è localmente definita in M da $\phi_1 = \dots = \phi_r = 0$, si osserva che S è generica in $M \Leftrightarrow \partial\phi_1, \dots, \partial\phi_r$ sono C-indipendenti.

Esaminando il diagramma

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\phi} & M & = & Z^R \\ i \downarrow & \tilde{\phi}' \nearrow & j \downarrow & & \uparrow p \\ Y & \xrightarrow{\phi^C} & X & = & Z \times \bar{Z} \end{array}$$

si vede come in questo esempio sia definita una mappa

$$(2.2) \quad \tilde{\phi} = p \circ \phi^C: Y \rightarrow M,$$

la cui derivata è la mappa $\tilde{\phi}'$ di (1.3).

OSSERVAZIONE. È immediato provare che S è generica in M se e solo se $\tilde{\phi}$ è una sommersione. Ciò permette di ottenere un'immersione $S \times_M T^*M \hookrightarrow T^*Y$, tramite la quale si definisce il « sistema di Cauchy-Riemann tangenziale » $\bar{\partial}^b$ come l'annullatore (nella dualità fra TY e T^*Y) di $S \times_M T^*M$ in T^*Y . Si osserva che $\bar{\partial}^b = (\phi^C)^* \bar{\partial}$ e che $\bar{\partial}^b$ è un $\mathcal{O}_Y$ -modulo coerente.

LEMMA 2.2. S è generica in M (nel senso di (2.1)) se e solo se S è generica in M rispetto $\bar{\partial}$ (nel senso di (1.1)).

DIMOSTRAZIONE. Si ha $\text{char } \bar{\partial} = (T^*X) \times \bar{X}$. Perciò S è generica in $M \Leftrightarrow {}^t\tilde{\phi}' (= {}^t\phi^C \circ {}^tp')$ è iniettiva $\Leftrightarrow {}^t\phi^C$ è iniettiva su ${}^tp'(T^*X) = \text{char } \bar{\partial}$. Ma una mappa lineare sopra un sottospazio vettoriale è iniettiva se e solo se è ivi propria. ■

OSSERVAZIONE. Ragionando come nel precedente Lemma si ha che, se $W \subseteq S \subseteq M$, allora

$$W \text{ è generica in } M \Leftrightarrow \begin{cases} W^C \hookrightarrow Y \text{ è non caratteristica per } \bar{\partial}^b, \\ Y \hookrightarrow X \text{ è non caratteristica per } \bar{\partial}. \end{cases}$$

In tale caso S è generica in M ma W non è generica in senso usuale in S perché S non ha struttura complessa.

Sussiste il seguente

COROLLARIO 2.3 (cf. [D'A-D'A-Z]). *Sia S generica. Allora*

$$\mathcal{C}_{\clubsuit|M} = \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\omega_Y}(\bar{\partial}^b, \mathcal{C}_{\clubsuit|Y}), \quad \clubsuit = S, \Omega, N.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 1.4 abbiamo

$${}^t\phi_*^{C'} \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\omega_X}(\bar{\partial}, \mathcal{C}_{\clubsuit|X}) = \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\omega_Y}(\bar{\partial}^b, \mathcal{C}_{\clubsuit|Y}).$$

Bisogna pertanto provare che

$$(\mathcal{C}_{\clubsuit|M} \simeq) {}^t\tilde{\phi}'_* \mathcal{C}_{\clubsuit|M} = {}^t\phi_*^{C'} \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\omega_X}(\bar{\partial}, \mathcal{C}_{\clubsuit|X}),$$

ossia

$$\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\omega_X}(\bar{\partial}, \mathcal{C}_{\clubsuit|X}) = {}^tp' \mathcal{C}_{\clubsuit|M}.$$

Ma ciò è evidente in quanto

$$\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\omega_X}(\bar{\partial}, \mathcal{O}_X) \simeq p^{-1} \mathcal{O}_M. \quad \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA

- [D'A-D'A-Z] A. D'AGNOLO - P. D'ANCONA - G. ZAMPIERI, *Extension of CR functions to «wedge type» domains*, Rend. Mat. Acc. Lincei, **9** (1) (1990), pp. 35-42.
- [K-S] M. KASHIWARA - P. SCHAPIRA, *Microlocal study of sheaves*, Astérisque de la S.M.F., **128** (1985).
- [S] P. SCHAPIRA, *Microdifferential systems in the complex domain*, Grundlehren der Math. Wiss., **289**, Springer-Verlag (1985).
- [S-K-K] M. SATO - M. KASHIWARA - T. KAWAÏ, *Hyperfunctions and Pseudo-differential Equations*, Springer Lecture Notes in Math., **287** (1973), pp. 265-529.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1991.