RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

VOLKER TURAU

Zentralisatoren von p-Elementen in lokal endlichen Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 75 (1986), p. 227-234

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1986__75__227_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 75 (1986)

Zentralisatoren von p-Elementen in Lokal Endlichen Gruppen.

VOLKER TURAU (*)

1. Einleitung.

In lokal endlichen Gruppen haben die Eigenschaften von Elementen von Primzahlordnung, bzw. deren Zentralisatoren, einen entscheidenden Einfluß auf die Gruppenstruktur. In [1] hat Asar gezeigt, daß jede lokal endliche Gruppe, in der der Zentralisator einer Involution eine Černikovgruppe ist, fast auflösbar ist. Ist in einer lokal endlich-auflösbaren Gruppe G der Zentralisator eines Elementes von Primzahlordnung eine Černikovgruppe, so ist auch $G/R(G)$ eine Černikovgruppe (vgl. Hartley [4], Theorem A). Hierbei bezeichnet $R(G)$ das Hirsch-Plotkin-Radikal von G. Mit Hilfe der Klassifikation der endlichen, einfachen Gruppen werden in dieser Arbeit diese Resultate verfeinert. Unter Verwendung dieser Klassifikation haben Hartley und Shute ([5], Theorem B) gezeigt, daß jede unendliche, einfache, lokal endliche Gruppe, welche Min-p für eine Primzahl p erfüllt, eine Gruppe vom Chevalley-Typ (getwisted oder nicht getwisted) über einem unendlichen, lokal endlichen Körper ist. In [10] wurden die Eigenschaften der Zentralisatoren von Elementen von Primzahlordnung in lokal endlichen Gruppen vom Chevalley-Typ untersucht. Mit Hilfe dieser Resultate kann der Satz von Asar verallgemeinert werden.

SATZ A. *Es sei G eine lokal endliche Gruppe mit einer Involution i, deren Zentralisator fast lokal-auflösbar ist und Min-2 erfüllt. Dann ist G*

(*) Indirizzo dell'A.: Fachbereich Mathematik der Universität Mainz, Saarstr. 21, D-6500, Mainz.

fast lokal-auflösbar oder G besitzt eine Normalreihe

$$OG \leqq E \leqq M \leqq G$$

mit folgenden Eigenschaften

(1) *G/M ist fast auflösbar,*

(2) *$M/E \cong \bigotimes_{i=1}^{n} PSL(2, F_i)$, wobei die F_i unendliche, lokal endliche Körper ungerader Charakteristik sind,*

(3) *E/OG ist eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung kleiner gleich 2^n und E/OG ist gleich dem Zentrum von M/OG.*

Aus Satz A ergibt sich unmittelbar Folgerung A, welche eine Frage von Belyaev beantwortet (vgl. Belyaev [2], Conjecture A).

FOLGERUNG A. *Es sei G eine lokal endliche Gruppe, in der der Zentralisator jeder Involution fast lokal-auflösbar ist und Min-2 erfüllt. Dann ist G fast lokal-auflösbar oder es gibt eine Gruppe L isomorph zu $PSL(2, F)$ über einem lokal endlichen, unendlichen Körper F ungerader Charakteristik mit $L \leqq G/OG \leqq \mathrm{Aut}(L)$, so daß jeder Körperautomorphismus von L, welcher von einem Element aus G induziert wird, ungerade Ordnung hat.*

In Satz B wird das Resultat von Hartley auf beliebige lokal endliche Gruppen übertragen.

SATZ B. *Ist G eine lokal endliche Gruppe und x ein Element aus G von Primzahlordnung, so daß $C_G(x)$ eine Černikovgruppe ist, so ist $G/R(G)$ eine Černikovgruppe.*

Ist der Zentralisator $C_G(x)$ sogar endlich, so kann Satz B noch verschärft werden (vgl. auch Hartley und Meixner [3], Korollar).

FOLGERUNG B. *Ist, G eine lokal endliche Gruppe und x ein Element aus G von Primzahlordnung, so daß $C_G(x)$ endlich ist, dann ist G fast auflösbar.*

Es ist zu vermuten, daß auch im Falle von Satz B die Gruppe G fast auflösbar ist. Um diese Aussage zu beweisen, müßte man zuerst den Fall, daß G eine p-Gruppe und x ein q-Automorphismus ($q \neq p$ Primzahlen) von G ist, untersuchen.

Alle betrachteten Gruppen sind lokal endlich. Es sei G eine Gruppe. Dann bezeichnet OG den maximalen $2'$-Normalteiler von G. Ist p eine Primzahl, so bezeichnet S_pG den größten lokal p-auflösbaren Normalteiler von G. Die Gruppe G erfüllt *Min*, falls G die Minimalbedingung für Untergruppen erfüllt und G erfüllt *Min-p* für eine Primzahl p, falls die p-Untergruppen von G Min erfüllen. Der maximale, teilbare, abelsche Normalteiler von G wird mit G^0 bezeichnet. Die Gruppe G heißt *Černikovgruppe*, falls $|G: G^0|$ endlich und G^0 das direkte Produkt von endlich vielen Prüfergruppen ist. Die Anzahl dieser Prüfergruppen wird mit Rang (G^0) bezeichnet. Eine lokal endliche Gruppe ist genau dann eine Černikovgruppe, wenn sie Min erfüllt (vgl. [9], Ch. 5). In diesem Falle heißt das geordnete Paar (Rang (G^0), $|G: G^0|$) der *size* von G und wird mit size (G) bezeichnet (vgl. [9], S. 92). Ist K ein Normalteiler von G und $h \in G$, so ist

$$C_{G/K}(h) = \langle x \in G: [x, h] \in K \rangle$$

der Zentralisator von h in G/K. Ist α ein Automorphismus von G, so ist

$$C_G(\alpha) = \{g \in G: \alpha(g) = g\}$$

der Zentralisator von α in G.

2. Hilfssätze.

Im folgenden werden einige Resultate über lokal endliche Gruppen zusammengestellt. Diese werden für die Beweise der Sätze benötigt. Unter Verwendung der Klassifikation der endlichen, einfachen Gruppen kann man die Struktur von lokal endlichen Gruppen, welche Min-p für eine Primzahl p erfüllen, genau angeben (vgl. Kegel [8], Theorem 2).

LEMMA 1. *Es sei G eine lokal endliche Gruppe mit Min-p für eine Primzahl p und $G \neq S_pG$. Dann besitzt G/S_pG einen Normalteiler N/S_pG, welcher das Produkt von endlich vielen, unendlichen, einfachen Gruppen vom Chevalley-Typ ist. Ferner besitzt G/N einen abelschen Normalteiler von endlichem Rang und endlichem Index.*

Unter Verwendung der Klassifikation ergeben sich aus [10] folgende Resultate, welche für den Beweis von Satz A und Satz B wesentlich sind.

Lemma 2 (vgl. [10], Satz A, Lemma 2.6, 2.8, 2.10 und 3.2). *Es sei p eine Primzahl, G eine lokal endliche, einfache Gruppe mit Min-p und* α *ein Automorphismus von G mit* $o(\alpha) = p$.

(a) *Ist* $C_G(\alpha)$ *eine Černikovgruppe, so ist G endlich.*

(b) *Ist G unendlich,* $p = 2$ *und* $C_G(\alpha)$ *fast lokal-auflösbar, so ist G isomorph zu* $PSL(2, F)$ *für einen lokal endlichen Körper F ungerader Charakteristik.*

Mit Hilfe des folgenden Lemmas können Satz A und Satz B auf den Fall $O_{p'}(G) = 1$ reduziert werden.

Lemma 3 (vgl. Hartley [4], Lemma 3.6). *Es sei G eine lokal endliche Gruppe und* $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, *wobei die Ordnung von* α *eine Primzahl p ist. Ist N ein* α*-invarianter Normalteiler von G, so daß* $N/O_{p'}(N)$ *eine Černikovgruppe ist, so ist* $|C_{G/N}(\alpha) : C_G(\alpha)N/N|$ *endlich.*

Bekanntlich sind Erweiterungen von lokal endlich-auflösbaren Gruppen durch lokal endlich-auflösbare Gruppen wieder lokal endlich-auflösbar. Im folgenden wird nun gezeigt, daß sich auch die Eigenschaft, fast lokal-endlich-auflösbare Gruppe zu sein, auf Erweiterungen vererbt.

Lemma 4. *Erweiterungen von fast lokal-endlich-auflösbaren Gruppen durch fast lokal-endlich-auflösbare Gruppen sind fast lokal-endlich-auflösbar.*

Beweis. Es sei N ein fast lokal-endlich-auflösbarer Normalteiler der Gruppe G, so daß G/N fast lokal-endlich-auflösbar ist. Da sich die Eigenschaft, lokal endliche Gruppe zu sein, auf Erweiterungen vererbt, ist G lokal endlich. Dann besitzt N einen lokal auflösbaren Normalteiler M von endlichem Index und G/N besitzt einen lokal auflösbaren Normalteiler L/N von endlichem Index. Da N/M endlich ist, besitzt N genau einen maximalen lokal auflösbaren Normalteiler, welcher o.B.d.A. gleich M ist. Somit ist M eine charakteristische Untergruppe von N. Ferner folgt aus der Endlichkeit von N/M, daß auch $|L/M : C_{L/M}(N/M)|$ endlich ist. Ferner ist

$$C_{L/M}(N/M)/Z(N/M) \cong N/MC_{L/M}(N/M)/N/M \leqq L/M/N/M \cong L/N .$$

Somit ist $C_{L/M}(N/M)$ ein lokal auflösbarer Normalteiler von endlichem Index in G/M. Da M lokal auflösbar ist, ist Lemma 4 damit bewiesen.

Ein analoger Beweis zeigt, daß sich die Eigenschaft, fast auflösbare Gruppe zu sein, ebenfalls auf Erweiterungen vererbt. Im nächsten Lemma wird unter Verwendung von Lemma 2 der Spezialfall von Satz A bewiesen, daß G eine p-'Gruppe ist.

LEMMA 5. *Es sei p eine Primzahl, G eine lokal endliche p'-Gruppe, und α ein Automorphismus der Ordnung p von G. Ist $C_G(\alpha)$ eine Černikovgruppe, so ist G fast lokal-auflösbar.*

BEWEIS. Angenommen die Behauptung von Lemma 5 ist falsch. Es sei G ein Gegenbeispiel, so daß size $(C_G(\alpha))$ minimal ist. Dann ist G unendlich und somit nach Lemma 2 (a) nicht einfach. Nach Lemma 3 kann man o.B.d.A. annehmen, daß G keinen lokal auflösbaren Normalteiler besitzt und daß kein epimorphes Bild von G lokal auflösbar ist.

Angenommen G besitzt keinen echten α-invarianten Normalteiler. Da G nicht einfach ist, besitzt G einen echten Normalteiler N. Da G keinen echten α-invarianten Normalteiler besitzt, ist dann

$$N \cap N^{\alpha} \cap \ldots \cap N^{\alpha^{p-1}} = 1 \, .$$

Setze nun $N_0 = N$ und $N_i = N_{i-1} \cap N_{i-1}^{\alpha}$ für alle $i \in \mathbf{N}$. Dann ist $N_{p-1} = 1$. Sei $j \in \mathbf{N}$ minimal mit der Eigenschaft, daß $L = N_j \neq 1$ und $N_{j+1} = 1$. ist. Dann ist L ein echter Normalteiler von G mit $L \cap L^{\alpha} = 1$. Mit dem gleichen Verfahren, jedoch mit L und α^2 anstelle von N und α, erhält man so einen echten Normalteiler K von G mit $K \cap K^{\alpha} = K \cap K^{\alpha^2} = 1$. Auf diese Weise erhält man einen echten Normalteiler M von G mit $M \cap M^{\alpha^i} = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Da G keinen echten α-invarianten Normalteiler besitzt, ist dann

$$G = M M^{\alpha} \ldots M^{\alpha^{p-1}} \, .$$

Setze $D = \{m m^{\alpha} \ldots m^{\alpha^{p-1}} \colon m \in M\}$ und sei Ψ die natürliche Einbettung von M in D. Ist l ein Element aus dem Kern von Ψ, so ist $l^{-1} = l^{\alpha} \ldots l^{\alpha^{p-1}}$. Nun folgt aus $M \cap M^{\alpha^i} = 1$ für alle i aus $\{1, \ldots, p-1\}$, daß l^{-1} im Zentrum von M liegt. Da G keinen lokal auflösbaren Normalteiler besitzt, ist $Z(M) = 1$. Somit ist Ψ ein Isomorphismus und M ist isomorph zu D. Wegen $D \leqq C_G(\alpha)$ ist M bzw. G eine Černikovgruppe. Dieser Widerspruch zeigt, daß G einen echten α-invarianten Normalteiler N besitzt.

Angenommen $C_G(\alpha)$ liegt in N. Nach Lemma 3 ist dann $C_{G/N}(\alpha) = 1$

und nach [6] ist G/N nilpotent. Da G jedoch kein echtes, lokal auflösbares epimorphes Bild besitzt, liegt $C_G(\alpha)$ nicht in N.

Wegen $C_N(\alpha) \lneqq C_G(\alpha)$ ist der size von $C_N(\alpha)$ eicht kleiner als size $(C_G(\alpha))$. Nach Wahl des Gegenbeispiels ist somit N fast lokal-auflösbar. Hieraus folgt, daß N endlich und $N \cap C_G(N) = 1$ ist. Wegen $C_N(\alpha) \neq 1$ ist size $(C_{C_G(N)}(\alpha))$ eicht kleiner als size $(C_G(\alpha))$. Nach Wahl des Gegenbeispiels ist somit $C_G(N)$ fast lokal-auflösbar. Da N endlich ist, ist auch G fast lokal-auflösbar. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

3. Beweis der Sätze A und B.

Beweis von Satz A. Es sei G nicht fast lokal-auflösbar. Wegen Lemma 3 kann o.B.d.A. $OG = 1$ angenommen werden. Nach [9], Korollar 3.2, erfüllt G Min-2. Es sei H der maximale lokal auflösbare Normalteiler von G. Wegen $OG = 1$ folgt aus [9], Theorem 3.17, daß H eine Černikovgruppe ist. Nach Lemma 1 besitzt G/H einen Normalteiler N/H, welcher das direkte Produkt von endlich vielen unendlichen, einfachen Gruppen ist, so daß G/N fast abelsch ist. Da H eine Černikovgruppe ist, ist $C_{N/H}(i)$ nach Lemma 3 fast lokal-auflösbar. Somit ist jeder einfache Normalteiler von N/H unter i invariant. Mit Hilfe von Lemma 2 (*b*) folgt nun, daß jeder einfache Normalteiler von N/H von Typ $PSL(2, F)$ ist, wobei F ein unendlicher, lokal endlicher Körper ungerader Charakteristik ist.

Setze $D = C_N(H)$; es ist $D \cap H \leqq Z(D)$ und nach [9], Lemma 1.F.3 ist N/D eine Černikovgruppe. Da H Min erfüllt, gibt es eine natürliche Zahl j, so daß $D^{(j)} \cap H = D^{(i)} \cap H$ für alle $i \geqq j$ ist. Setze $M = D^{(j)}$ und $E = M \cap H$. Dann ist N/M fast auflösbar und E liegt in M. Da N/HM ein fast auflösbares epimorphes Bild von N/H ist, ist $HM = N$. Hieraus ergibt sich, daß N/H isomorph zu M/E ist und daß M perfekt ist. Wegen

$$E = H \cap M \leqq Z(D) \cap M \leqq Z(M)$$

folgt aus [9], Lemma 3.15, daß E endlich ist. Somit existiert eine endliche Untergruppe U von M mit $E \leqq Z(U) \cap U'$ und U/E ist isomorph zu $\bigotimes_{i=1}^{n} PSL(2, q_i)$, wobei die q_i Potenzen ungerader Primzahlen sind und n die Anzahl der einfachen Faktoren von N/H ist. Nach [7], Satz V.25.10 und Satz V.25.7, ist somit E eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung kleiner gleich 2^n. Da N/M fast auflösbar ist, ist auch G/M fast auflösbar. Damit ist Satz A bewiesen.

Beweis von Satz B. Wegen [4], Theorem A, genügt es zu zeigen, daß G fast lokal-auflösbar ist. Nach [9], Korollar 3.2, erfüllt G Min-p, wobei p die Ordnung von x ist. Nach Lemma 1 und [9], Theorem 3.17, besitzt G eine Reihe von Normalteilern

$$1 \leqq D \leqq E \leqq F \leqq G$$

derart, daß D eine p'-gruppe, E/D eine Černikovgruppe, F/E das direkte Produkt von endlich vielen, unendlichen, einfachen Gruppen vom Chevalley-Typ und G/F fast abelsch ist. Nach Lemma 4 und Lemma 5 ist E fast lokal-auflösbar. Da $C_{G/E}(x)$ nach Lemma 3 eine Černikovgruppe ist und die Ordnung von x eine Primzahl ist, ist jeder einfache Normalteiler von F/E unter x invariant. Nach Lemma 2(a) ist somit $F/E = 1$. Nun folgt aus Lemma 4, daß G fast lokal-auflösbar ist. Damit ist Satz B bewiesen.

Beweis von Folgerung B. Nach Satz B ist G fast lokal-auflösbar. Ist $p = o(x)$, so folgt aus [9], Theorem 3.17, daß $G/O_{p'}(G)$ eine Černikovgruppe ist. Es genügt also zu zeigen, daß $H = O_{p'}(G)$ auflösbar ist. Nach [6], Theorem 3 und 4, gibt es eine Zahl k, so daß die Ableitungslänge jedes endlichen Faktors von H auf dem x fixpunktfrei operiert kleiner gleich k ist. Ist E eine x-invariante endliche Untergruppe von H, so zeigt man durch Induktion nach der Ordnung von $C_E(x)$, daß die Ableitungslänge von E kleiner gleich $k|C_E(x)|$ ist. Es sei $1 = E_0, E_1, \ldots$ $\ldots, E_n = E$ die Kommutatorreihe von E. Ferner sei $j \in N$ so gewählt, daß $C_{E_j}(x) = 1$ und $C_{E_{j+1}}(x) \neq 1$ ist. Dann ist $j \lneqq k$ und $|C_{E/E_{j+1}}(x)| \lneqq |C_E(x)|$. Per Induktion folgt nun für die Ableitungslänge d von E:

$$d \leqq k + k|C_{E/E_{j+1}}(x)| \leqq k|C_E(x)|\,.$$

Somit ist die Ableitungslänge einer beliebigen endlichen Untergruppe von H kleiner gleich $k|C_H(x)|$. Hieraus folgt, daß H auflösbar ist. Damit ist Folgerung B bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. O. ASAR, *The solution of a problem of Kegel and Wehrfritz*, Proc. London Math. Soc., (3) **45** (1982), pp. 337-364.

[2] V. V. BELYAEV, *Locally finite groups with Chernikov Sylow-p-subgroups*, Algebra Logika, **20** (1981), pp. 605-619.

[3] B. HARTLEY - T. MEIXNER, *Finite soluble groups in which the centralizer of an element of prime order is restricted*, Arch. Math., **36** (1981), pp. 211-213.

[4] B. HARTLEY, *Periodic locally soluble groups containing an element of prime order with Černikov centralizer*, Quarterly J. Math. Oxford, (2) **33** (1982), pp. 309-323.

[5] B. HARTLEY - G. SHUTE, *Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type*, Quarterly J. Math. Oxford, (2) **35** (1984), pp. 49-71.

[6] G. HIGMAN, *Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed-elements*, J. London Math. Soc., **32** (1957), pp. 321-334.

[7] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[8] O. H. KEGEL, *The structure of locally finite groups with min p*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. IV, **6** (1982), pp. 383-385.

[9] O. H. KEGEL - B. A. F. WEHRFRITZ, *Locally finite groups*, Amsterdam, London, 1973.

[10] V. TURAU, *Zentralisatoren in lokal endlichen Gruppen vom Chevalley-Typ.*, Arch. Math., **44** (1985), pp. 297-308.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 novembre 1984.