

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

OSCAR STEFANI

Condizioni di continuità in una misura approssimante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 73 (1985), p. 271-277

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__73__271_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1985__73__271_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Condizioni di continuità in una misura approssimante.

OSCAR STEFANI (*)

Sia (X, ρ) uno spazio metrico, sia $E \subset X$ e sia $d(E)$ il diametro di E ; si dice che l'insieme E è δ -massimale se $d(E) = \delta$ e se $X \supset A \supset E$, con $d(A) = \delta$, implica $A = E$. È noto che negli spazi euclidei gli insiemi δ -massimali coincidono con quelli ad ampiezza costante δ . In [S.Z] sono state date delle condizioni sufficienti affinché le misure approssimanti la misura unidimensionale di Hausdorff di un insieme δ -massimale E e della sua frontiera ∂E , non presentino discontinuità nel punto $t = \delta$.

Nel presente lavoro dimostreremo che le stesse condizioni sono anche necessarie, e ne daremo delle altre equivalenti (teorema § 2).

Per la terminologia e le notazioni usate facciamo riferimento a [S.Z] ed a [S]. In particolare per i simboli: $\mu(\cdot)$, $m(\cdot)$, $l(\cdot)$, $\nu_\delta(\cdot)$, $(\cdot)^s$, $s_\delta(\cdot)$, ω , N_R , K_0 , $\mathcal{K}$, $f(\cdot)$, $R(\cdot)$ si veda [S.Z]; per i simboli $\mu_\delta(\cdot)$, N^* , N' , e per la definizione di δ -ricoprimento ottimale si veda [S].

Per le proprietà degli insiemi ad ampiezza costante negli spazi euclidei si veda, tra l'altro, [V], Th. 12.19 e [E], Ch. VII.

Lo spazio in cui opereremo sarà sempre $\mathbb{R}^2$ euclideo e quando avremo a che fare con un ricoprimento $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ tale che $\sum d(F_i) < +\infty$, intenderemo sempre che gli insiemi F_i siano ordinati per diametri decrescenti, cioè: se $i > j$, allora $d(F_i) \leq d(F_j)$.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova, Via Belzoni 7 - 35131 Padova.

Ricerca effettuata con fondi erogati dal M.P.I.

1. Premettiamo due lemmi che useremo nella dimostrazione del Teorema del § 2.

LEMMA 1. Sia E δ -massimale in $\mathbb{R}^2$ euclideo, sia δ^* tale che $0 < \delta^* < \delta$ e sia $\mathcal{F} = \{F_i, i = 1, \dots, n\}$ un δ^* -ricoprimento ottimale finito di ∂E , allora esistono due indici p e q , con $p \neq q$, $1 < p \leq n$, $1 < q \leq n$, tali che $F_1 \cap F_p \neq \emptyset$ e $F_1 \cap F_q \neq \emptyset$.

DIM. Posto $d_1 = d(F_1)$, è $d_1 \leq \delta^* < \delta$; poichè $\mathcal{F}$ è ottimale, $d(F_1 \cap \partial E) = d_1$; esistono quindi, data la compattezza di $F_1 \cap \partial E$, $x_1, x_2 \in F_1 \cap \partial E$ tali che $|x_1 - x_2| = d_1$. Sia $u = (x_1 - x_2)/|x_1 - x_2|$, siano r ed s le due rette per x_1 e x_2 rispettivamente, ortogonali ad u , sia π_1 il semipiano delimitato da r e non contenente s , e π_2 il semipiano delimitato da s non contenente r ; ricordando le proprietà della rappresentazione canonica di $\partial E: f: \omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, costruita mediante le rette d'appoggio, poichè r ed s non possono essere rette d'appoggio, è immediato vedere che $f(u)$ è interno a π_1 e $f(-u)$ è interno a π_2 .

Sia Γ_1 l'arco di ∂E di estremi x_1 e $f(u)$ e contenuto in π_1 , e Γ_2 l'arco di ∂E gli estremi x_2 e $f(-u)$ e contenuto in π_2 , è evidente che:

$$1.A \quad \forall x \in \Gamma_1 \setminus \{x_1\}, |x - x_2| > d_1 \text{ e quindi } \Gamma_1 \cap F_1 = \{x_1\},$$

$$1.B \quad \forall x \in \Gamma_2 \setminus \{x_2\}, |x - x_1| > d_1 \text{ e quindi } \Gamma_2 \cap F_1 = \{x_2\}.$$

Da 1.A segue che $\Gamma_1 \setminus \{x_1\} \subset \bigcup_{i=2}^n (F_i \cap \Gamma_1)$ e pertanto $\Gamma_1 = \bigcup_{i=2}^n (F_i \cap \Gamma_1)$, ma allora esiste un $p > 1$ tale che $x_1 \in F_p$ e quindi $F_1 \cap F_p \neq \emptyset$. Da 1.B segue che $\Gamma_2 \setminus \{x_2\} \subset \bigcup_{i=2}^n (F_i \cap \Gamma_2)$, e da 1.B e dal fatto che $x_1 \in F_p$ e $d(F_p) \leq d_1$ segue che:

$$\Gamma_2 \setminus \{x_2\} \subset \bigcup_{\substack{2 \leq i \leq n \\ i \neq p}} (F_i \cap \Gamma_2) \quad \text{da cui} \quad \Gamma_2 = \bigcup_{\substack{2 \leq i \leq n \\ i \neq p}} (F_i \cap \Gamma_2)$$

e quindi esiste un $q > 1$, $q \neq p$ tale che $x_2 \in F_q$, pertanto $F_q \cap F_1 \neq \emptyset$. //

LEMMA 2. Sia C chiuso e convesso in $\mathbb{R}^2$ euclideo, sia $D \subset \partial C$; se esistono $\delta > 0$ e $k > 0$ tali che $v_\delta(D) < k$, allora si ha: $\mu(D) < \pi k$.

DIM. Poichè $v_\delta(D) < k$ esiste un δ -ricoprimento ottimale $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ di D (cfr. [S], Prop. 4) tale che:

$$2.A \quad \sum d(F_i) < k.$$

Si ha ovviamente:

$$2.B \quad \mu(D) \leq \sum \mu(D \cap F_i) \leq \sum \mu(\partial D \cap F_i) \leq \sum \mu(\partial(C \cap F_i)) .$$

Poichè $\mathcal{F}$ è ottimale, per ogni $i \in N^*$, F_i è ad ampiezza costante $d(F_i)$; dal fatto, poi, che $F_i \cap C$ è compatto e convesso ed $F_i \cap C \subset F_i$, per note proprietà dei convessi (cfr. [L], sec. 22 e sec. 11) si ha:

$$2.C \quad \mu(\partial(C \cap F_i)) \leq \mu(\partial F_i) = \pi d(F_i) .$$

Da 2.B, 2.C, 2.A segue subito la tesi. //

2. Sia $I \subset \mathbb{R}^2$ ricordiamo che dire che $v_t(I)$ è continua, come funzione di t , per $t = \delta$, equivale a dire che $s_\delta(I) = 0$. Con riferimento al seguente Teorema, in [S.Z] si è dimostrato che: viii $\Rightarrow$ v $\Rightarrow$ vi $\Rightarrow$ i.

TEOREMA. *Sia $\delta > 0$ e sia E δ -massimale in $\mathbb{R}^2$ euclideo, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- i) $s_\delta(\partial E) = 0$;
- ii) $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall \theta: 0 < \theta < \delta$, esiste un δ^* , con $0 < \delta^* < \delta$ e un δ^* -ricoprimento ottimale finito $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ di ∂E tale che $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$ e $\theta < d(F_1)$;
- iii) $\forall \varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento chiuso $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ di ∂E tale che $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$ e $\delta - \varepsilon < d(F_1) < \delta$;
- iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathcal{K}$ tale che $v_\delta(f(K)) < \varepsilon$;
- v) $\inf \{v_\delta(f(K)), K \in \mathcal{K}\} = 0$;
- vi) $s_\delta(E) = 0$;
- vii) $\forall \varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento chiuso $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ di E tale che $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$ e $\delta - \varepsilon < d(F_1) < \delta$;
- viii) $m(K_0) = \pi$.

DIM.

i $\Rightarrow$ ii. Poichè $s_\delta(\partial E) = 0$, $v_t(\partial E)$ è continua in $t = \delta$, allora è continua anche $\mu_t(\partial E)$ ed in particolare è:

$$\lim_{t \rightarrow \delta^-} \mu_t(\partial E) = \mu_\delta(\partial E) = v_\delta(\partial E) = \delta .$$

Fissati ε e θ , posto

$$3.A \quad \varepsilon_1 = \min \{\varepsilon, (\delta - \theta)/3\}$$

esiste un ricoprimento aperto, che per la compattezza di ∂E non è restrittivo supporre finito, $\mathfrak{G} = \{G_i, i = 1, \dots, n\}$, tale che

$$\sum d(G_i) < \delta + \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad d(G_1) < \delta.$$

Preso δ^* tale che:

$$3.B \quad \max \{\delta - \varepsilon_1, d(G_1)\} < \delta^* < \delta,$$

$\mathfrak{G}$ è un δ^* -ricoprimento di ∂E ; esiste quindi (vedi [S], Prop. 3) un δ^* -ricoprimento ottimale finito $\mathcal{F} = \{F_i, i = 1, \dots, m\}$ di ∂E tale che:

$$3.C \quad \sum_{i=1}^m d(F_i) \leq \sum_{i=1}^n d(G_i) < \delta + \varepsilon_1.$$

$\mathcal{F}$ è il ricoprimento cercato. Siano, infatti, F_p ed F_q due insiemi intersecanti F_1 , di cui si è dimostrata l'esistenza nel Lemma 1; posto, per $1 \leq i \leq m$, $d_i = d(F_i)$, per proprietà dei ricoprimenti ottimali (cfr. [S], 5.1) e la 3.B si ha:

$$d_1 + d_p > \delta^* > \delta - \varepsilon_1, \quad d_1 + d_q > \delta^* > \delta - \varepsilon_1.$$

Dalla seconda relazione si ricava: $d_q > \delta - \varepsilon_1 - d_1$.

Ora se fosse $d_1 \leq \theta$ si avrebbe:

$$d_1 + d_p + d_q > 2\delta - 2\varepsilon_1 - \theta \geq \delta + \varepsilon_1,$$

ma questo sarebbe in contraddizione con 3.C; pertanto $d(F_1) > \theta$; 3.C e 3.A implicano inoltre che $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon$.

ii $\Rightarrow$ iii. Basta prendere $\theta = \max \{\delta/2, \delta - \varepsilon\}$.

iii $\Rightarrow$ iv. Dimostriamo che iii implica che, per ogni ε , esiste un aperto $A \subset \omega$ tale che:

$$3.D.1 \quad A \supset K_0;$$

$$3.D.2 \quad \text{se } u \notin A, \text{ allora } -u \in A;$$

$$3.D.3 \quad \nu_\theta(f(A)) < \varepsilon.$$

Non è restrittivo supporre $\varepsilon < \delta/2$. Poichè $\mu(f(K_0)) = 0$ ([S.Z], Coroll. 9.A) esiste un ricoprimento aperto $\mathfrak{G} = \{G_i, i \in N^*\}$ di $f(K_0)$ tale che $\sum d(G_i) < \varepsilon/2$.

Posto $G' = (\bigcup G_i) \cap \partial E$, G' è aperto in ∂E e poichè $\varepsilon < \delta$ si ha:

$$v_\delta(G') \leq \sum d(G_i) < \varepsilon/2.$$

In base a iii, fissato ε , esiste un ricoprimento chiuso $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N'\}$ tale che $\sum d(F_i) < \delta + \varepsilon/4$ e $\delta - \varepsilon/4 < d(F_1) < \delta$. Sia $G'' = \partial E \setminus F_1$; G'' è aperto in ∂E e $G'' \subset \bigcup_{N' \setminus \{1\}} F_i$; ne segue facilmente che:

$$v_\delta(G'') \leq \sum_{N' \setminus \{1\}} d(F_i) = \sum_{N'} d(F_i) - d(F_1) < \varepsilon/2.$$

Ma allora $v_\delta(G' \cup G'') < \varepsilon$.

Sia $A = f^{-1}(G' \cup G'')$, A è l'aperto di ω cercato. Infatti, $A \supset K_0$, poichè $f(K_0) \subset G'$; se $u \notin A$, allora $-u \in A$; infatti se $u \notin A$ e $-u \notin A$, allora $f(u), f(-u) \notin G' \cup G''$ e quindi in particolare $f(u), f(-u) \notin G''$. Quindi $f(u), f(-u) \in F_1$; il che è in contraddizione col fatto che $d(F_1) < \delta$. Ora, poichè $f(A) = G' \cup G''$, è $v_\delta(f(A)) < \varepsilon$. Pertanto A verifica le proprietà 3.D.

Si costruisca infine un insieme $K \in \mathcal{K}$ tale che $K \subset A$. Basta a tal fine considerare l'insieme K' di cui all'Osservazione 0.B di [S.Z] e prendere: $K = (A \cap K') \cup (K' \setminus A)^s$. Dalla disuguaglianza $v_\delta(f(K)) \leq v_\delta(f(A))$ segue la iv.

iv $\Rightarrow$ v. È immediata.

v $\Rightarrow$ vi. È immediata conseguenza della Prop. 11 di [S.Z].

vi $\Rightarrow$ i. È immediata.

vii $\Rightarrow$ iii. È immediata.

ii $\Rightarrow$ vii. Non è restrittivo supporre $\varepsilon < \delta/10$. Fissato $\theta = \delta - \varepsilon$, sia $\mathcal{F} = \{F_i, i = 1, \dots, n\}$ il δ^* -ricoprimento ottimale di ∂E di cui ii afferma l'esistenza. Per dimostrare che l'implicazione è vera, basterà dimostrare che $\mathcal{F}$ è un ricoprimento anche di E .

Data l'ipotesi su ε ed il valore di θ è immediato che:

$$\sum_{i=2}^n d(F_i) < 2\varepsilon < 2\delta/10 < \delta^*/2; \quad \text{allora } d(F_i) < \delta^*/2, \text{ per } i \geq 2.$$

Questo per proprietà dei ricoprimenti ottimali (cfr. [S], 5.2) implica $F_i \cap F_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e $i, j > 1$.

Sia $G = \partial E \setminus F_1$, G è aperto in ∂E , pertanto $G = \bigcup \Delta_i$, ove Δ_i sono archi aperti disgiunti e l'unione indicata è al più numerabile. Dimostriamo che:

3.E Per ogni i , esiste un j^* con $2 \leq j^* \leq n$ tale che $\Delta_i \subset F_{j^*}$.

In caso contrario, infatti, poichè $G \subset \bigcup_{j=2}^n F_j$, si avrebbe

$$\Delta_i = \bigcup_{j=2}^n (F_j \cap \Delta_i)$$

che, essendo per ogni j , $F_j \cap \Delta_i$ chiuso in Δ_i , sarebbe in contraddizione con la connessione di Δ_i .

Poichè $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di ∂E , per dimostrare che è un ricoprimento anche di E basterà dimostrare che $E^\circ \setminus F_1 \subset \bigcup_{j=2}^n F_j$. A tal fine, sia $x \in E^\circ \setminus F_1$, poichè $x \notin F_1$, che è compatto e convesso, esiste una retta r passante per x , senza punti in comune con F_1 ; è facile vedere che r incontra ∂E in due punti x_i, y_i appartenenti ad uno stesso Δ_i ; per la 3 E esiste quindi un j^* : $2 \leq j^* \leq n$ tale che $x_i, y_i \in F_{j^*}$, ma poichè F_{j^*} è convesso anche $x \in F_{j^*}$ e quindi $x \in \bigcup_{j=2}^n F_j$.

viii $\Rightarrow$ v. È il Coroll. 11.B di [S.Z].

v $\Rightarrow$ viii. Se $\inf \{\nu_\delta(f(K)), K \in \mathcal{K}\} = 0$, esiste una successione K_n di elementi di $\mathcal{K}$ tali che $\nu_\delta(f(K_n)) < 1/(\pi n^2)$. Per il Lemma 2 segue che $\mu(f(K_n)) < 1/n^2$ e quindi (vedi [S.Z], 0.1) $l(K_n) < 1/n^2$.

Posto $H_n = \{u \in \omega \setminus N_R : R(u) < 1/n\}$ si ha $K_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ e quindi:

3.F $m(H_n) \rightarrow m(K_0)$.

Poichè (cfr. [S.Z], 0.3):

$$\frac{1}{n^2} > l(K_n) = \int_{K_n} R(u) m(du) \geq \int_{K_n \setminus H_n} R(u) m(du) \geq \frac{1}{n} m(K_n \setminus H_n)$$

si ha: $m(K_n \setminus H_n) < 1/n$ e quindi:

3.G $m(K_n \setminus H_n) \rightarrow 0$.

Tenuto conto che (cfr. [S.Z], Prop. 1): $\pi = m(K_n) = m(K_n \setminus H_n) + m(K_n \cap H_n)$ da 3.G segue che:

$$3.H \quad m(K_n \cap H_n) \rightarrow \pi.$$

Ora, se $m(K_0) \neq \pi$, deve essere $m(K_0) < \pi$.

Ma è facile vedere che, se fosse $m(K_0) < \pi$, tenendo conto del fatto che $m(K_n \cap H_n) \leq m(H_n)$, 3.F e 3.H sarebbero in contraddizione tra loro. //

COROLLARIO. *Se E è δ -massimale in $\mathbb{R}^2$ euclideo allora $v_i(E)$ è continua in $t = \delta$ se e solo se è ivi continua $v_i(\partial E)$.*

DIM. È: $i \Leftrightarrow vi$. //

BIBLIOGRAFIA

- [E] EGGLESTON H. G., *Convexity*, Cambridge University Press, 1963.
- [L] LAY S. R., *Convex Sets and Their Applications*, Wiley & Sons, 1982.
- [Le] LEICHTWEISS K., *Konvexe Mengen*, Springer, Berlin, 1980.
- [R] ROGERS R. A., *Hausdorff measures*, Cambridge University Press, 1970.
- [S] STEFANI O., *Ricoprimenti e misure approssimanti*, Rend. Acc. Naz. di Scienze detta dei XL, Memorie di Matematica, 102° (1984), vol. VIII. pagg. 121-136.
- [S.Z] STEFANI O. - ZIRELLO G., *Misure approssimanti ed insiemi ad ampiezza costante*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 72 (1984), pp. 191-202.
- [V] VALENTINE F. A., *Convex Sets*, McGraw-Hill, New York, 1964.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1984.