RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. CARICATO

Formulazione relativa delle leggi di evoluzione di un sistema continuo in relatività generale. Nota II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 71 (1984), p. 239-247

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__71__239_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 71 (1984)

Formulazione relativa delle leggi di evoluzione di un sistema continuo in Relatività generale. Nota II.

G. CARICATO (*)

1. Introduzione.

In una recente Nota col medesimo titolo, inserita nel volume dedicato al prof. G. Grioli in occasione del suo 70° compleanno [1], ho iniziato lo studio sistematico dell'evoluzione relativistica di un sistema continuo a trasformazioni reversibili S rispetto a un determinato riferimento fisico. Scelta la congruenza $\{L\}$ delle linee d'universo delle particelle del continuo medesimo per rappresentare un riferimento fisico, e introdotto in un intorno di ogni particella P un riferimento (locale) di moto incipiente

$$R_P\colon \{\tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho \equiv \tilde{\partial}_\varrho P,\ \varrho = 1, 2, 3,\ \boldsymbol{e}_4 = \partial_4 P\}$$

ho precisato in qual modo è possibile definire nella generica configurazione $\mathcal{C}$ di S uno stress come campo di tensori doppi simmetrici, puramente spaziale, dello spaziotempo V_4. Ho indicato con X^{hk} le componenti controvarianti in coordinate euleriane di tale stress, e con Y^{hk} le analoghe componenti in coordinate lagrangiane. Ricordo anche che le coordinate lagrangiane introdotte hanno il pregio di essere adattate al riferimento fisico $\{L\}$.

Poi, limitatamente ai continui dentro i quali fra elementi contigui non avvengono scambi termici, ho scritto il corrispondente tensore

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico G. Castelnuovo, Città Universitaria, Piazzale A. Moro, 00185 Roma.

energetico materiale, ed ho imposto ad esso la condizione di conservazione, che ora richiamo in coordinate lagrangiane (cfr. [1] (3.2)):

$$\nabla_k \overset{*}{T}{}^{hk} \equiv \nabla_k \left[c^2 \mu \left(1 + \frac{w}{c^2}\right) \overset{*}{u}{}^h \overset{*}{u}{}^k + Y^{hk}\right] = 0 \,. \tag{1.1}$$

La proiezione spaziale di questa equazione mi ha permesso di dedurre l'equazione vettoriale indefinita (cfr. [1], (3.13))

$$\mu\left(1 + \frac{w}{c^2}\right) \boldsymbol{A} = - \overset{*}{C}_\tau Y^{\tau\varrho} \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho - \tilde{\nabla}_\tau Y^{\tau\varrho} \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho \qquad \forall P \in \mathcal{C} \tag{1.2}$$

che ho anche chiamato l'*equazione fondamentale della meccanica relativistica dei continui*, nonchè le condizioni al contorno (cfr. [1], (3.21))

$$Y^{h\tau} \tilde{n}_\tau = \overset{*}{f}{}^h(Q) \qquad \forall Q \in \partial\mathcal{C} \tag{1.3}$$

$\boldsymbol{f}(Q)$ essendo la proiezione spaziale del 4-vettore $\boldsymbol{F}(Q)$ che rappresenta la 4-forza agente sul generico evento Q della frontiera $\partial\mathcal{C}$ della configurazione $\mathcal{C}$.

2. Equazione simbolica della meccanica relativistica dei continui.

Tenendo presenti l'equazione fondamentale (1.2) e le condizioni al contorno (1.3), introduciamo i campi vettoriali

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}(P) \equiv -\mu\left(1 + \dfrac{w}{c^2}\right) c^2 \overset{*}{C}{}^\varrho \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho - \tilde{\nabla}_\sigma Y^{\varrho\sigma} \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho - \overset{*}{C}_\lambda Y^{\lambda\varrho} \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho & \forall P \in \mathcal{C} \\ \boldsymbol{W}(Q) \equiv \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\Phi}^\varrho \tilde{n}_\varrho & \forall Q \in \partial\mathcal{C} \end{cases} \tag{2.1}$$

e prendiamo in esame il funzionale

$$J(\boldsymbol{z}) \equiv \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{z} \, d\mathcal{C} + \int_{\partial\mathcal{C}} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{z} \, d\,\partial\mathcal{C} \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{z}$ essendo un arbitrario campo vettoriale regolare definito in $\mathcal{C}$. In virtù dell'equazione (1.2) e delle condizioni al contorno (1.3) $J(\boldsymbol{z})$ è nullo comunque sia scelto il campo di vettori $\boldsymbol{z}$; viceversa se il funzionale $J(\boldsymbol{z})$ risulta nullo per ogni scelta del campo di vettori regolari $\boldsymbol{z}$, necessariamente sussistono le equazioni

$$\left\{\begin{array}{ll} \boldsymbol{V}(P)=0 & \forall P\in\mathcal{C} \\ \boldsymbol{W}(Q)=0 & \forall Q\in\partial\mathcal{C}\,. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

La dimostrazione di questo risultato è immediata, come nel caso classico, procedendo per assurdo e sfruttando la continuità dei vettori $\boldsymbol{V}(P)$ e $\boldsymbol{W}(Q)$ nei rispettivi campi di esistenza (cfr. per es. [2], cap. V, § 1). Se sostituiamo in (2.2) a $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ le corrispondenti espressioni (2.1), e teniamo conto delle identità (cfr. per es. [3], II.3, IV.2)

$$\left|\begin{array}{l} \tilde{\partial}_\varrho \log\sqrt{\overset{*}{\gamma}}=\boldsymbol{\Gamma}_{\varrho}{}^{\sigma}{}_{\sigma}\,, \qquad \tilde{\partial}_\varrho\tilde{\boldsymbol{e}}_\tau=\boldsymbol{\Gamma}_{\varrho}{}^{\lambda}{}_{\tau}\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_\lambda \\ \dfrac{1}{\sqrt{\overset{*}{\gamma}}}\,\tilde{\partial}_\varrho(\sqrt{\overset{*}{\gamma}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho)=\tilde{\nabla}_\varrho Y^{\varrho\tau}\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_\tau \end{array}\right. \tag{2.4}$$

l'equazione

$$J(\boldsymbol{z})=0 \tag{2.5}$$

assume la forma

$$J(\boldsymbol{z})\equiv-\int_{\mathcal{C}}\mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C}-\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{\sqrt{\overset{*}{\gamma}}}\,\tilde{\partial}_\varrho(\sqrt{\overset{*}{\gamma}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho)\cdot\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C}+ \\ -\int_{\mathcal{C}}\overset{*}{C}_\lambda Y^{\lambda\varrho}\,\tilde{z}_\varrho\,d\mathcal{C}+\int_{\partial\mathcal{C}}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{z}\,d\,\partial\mathcal{C}-\int_{\mathcal{C}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho\tilde{n}_\varrho\cdot\boldsymbol{z}\,d\,\partial\mathcal{C}=0\,. \tag{2.6}$$

Tenendo conto inoltre della trasformazione seguente (cfr. [3], III.4.)

$$\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{\sqrt{\overset{*}{\gamma}}}\,\tilde{\partial}_\varrho(\sqrt{\overset{*}{\gamma}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho)\cdot\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C}=\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{\sqrt{\overset{*}{\gamma}}}\,\tilde{\partial}_\varrho(\sqrt{\overset{*}{\gamma}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho\cdot\boldsymbol{z})\,d\mathcal{C}-\int_{\mathcal{C}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho\cdot\tilde{\partial}_\varrho\boldsymbol{z}\cdot d\mathcal{C}= \\ =-\int_{\partial\mathcal{C}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho\cdot\boldsymbol{z}\,\tilde{n}_\varrho\,d\,\partial\mathcal{C}-\int_{\mathcal{C}}\boldsymbol{\Phi}^\varrho\cdot\tilde{\partial}_\varrho\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C}\,,$$

l'equazione (2.6) diventa

$$(2.7)\qquad J(\boldsymbol{z}) \equiv -\int_{\mathcal{C}} \mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} + \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\Phi}^{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} + $$

$$-\int_{\mathcal{C}} \overset{*}{C}_{\lambda} Y^{\lambda\sigma}\tilde{z}_{\varrho}\,d\mathcal{C} + \int_{\partial\mathcal{C}} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{z}\,d\,\partial\mathcal{C} = 0\,.$$

Attribuiamo ora a $\boldsymbol{z}$ il significato di un arbitrario spostamento infinitesimo

$$(2.8)\qquad \boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{u}\,dy^4 + \tilde{d}P = \overset{*}{u}{}^4\,\partial_4 P\cdot dy^4 + dy^{\tau}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_{\tau}$$

e costatiamo quale forma assume l'equazione scalare (2.7). A tale scopo esaminiamo innanzitutto come si trasforma il 2° integrale che compare in (2.7) in virtù della simmetria del tensore stress Y^{rs}: otteniamo

$$(2.9)\qquad \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\Phi}^{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} Y^{\varrho\lambda}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_{\lambda}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z}\,d\mathcal{C} = \tfrac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} Y^{\varrho\lambda}(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\lambda}\boldsymbol{z} + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\lambda}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z})\,d\mathcal{C}\,;$$

attribuendo a $\boldsymbol{z}$ l'espressione (2.8) veniamo ad avere

$$(2.10)\qquad Y^{\varrho\sigma}(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\sigma}\boldsymbol{z} + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\sigma}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z}) =$$

$$= Y^{\varrho\sigma}[\boldsymbol{e}_{\varrho}\cdot\overset{*}{u}{}^4\,\tilde{\partial}_{\sigma}\partial_4 P + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\sigma}\cdot\overset{*}{u}{}^4\,\tilde{\partial}_{\varrho}\partial_4 P]\,dy^4 + Y^{\varrho\sigma}[\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\sigma}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\tau} + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\sigma}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\tau}]\,dy^{\tau}\,.$$

Poichè valgono le identità

$$(2.11)\qquad \tilde{\partial}_{\sigma}\partial_4 P\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho} = \partial_4\tilde{\partial}_{\sigma}P\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho}\,,$$

l'espressione (2.10) diventa

$$(2.12)\qquad Y^{\varrho\sigma}(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\varrho}\cdot\tilde{\partial}_{\sigma}\boldsymbol{z} + \tilde{\boldsymbol{e}}_{\sigma}\cdot\tilde{\partial}_{\varrho}\boldsymbol{z}) = 2(Y^{\varrho\sigma}\,\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4\,\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\sigma}\cdot dy^4 + Y^{\varrho}{}_{\lambda}\,\tilde{\Gamma}_{\varrho}{}^{\lambda}{}_{\tau}\,dy^{\tau})\,;$$

pertanto l'equazione (2.7) assume la forma

$$(2.13)\qquad -\int_{\mathcal{C}}\mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\boldsymbol{A}\cdot\tilde{\partial}P\,d\mathcal{C}+dy^4\int_{\mathcal{C}}Y^{\varrho\sigma}\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\sigma}\,d\mathcal{C}+$$
$$+\int_{\mathcal{C}}Y_\lambda{}^\varrho\,\tilde{\Gamma}_\varrho{}^\lambda{}_\tau\,dy^\tau\,d\mathcal{C}-\int_{\mathcal{C}}Y_\lambda{}^\varrho\,\overset{*}{C}_\varrho\,dy^\lambda\,d\mathcal{C}+\int_{\partial\mathcal{C}}\boldsymbol{f}\cdot\tilde{\partial}P\,d\,\partial\mathcal{C}=0\,.$$

Nell'equazione (2.13) cui siamo pervenuti possiamo attribuire ad ognuno degli integrali presenti un preciso senso fisico relativo:

(2.14) $\partial L^{(m)}\equiv-\int_{\mathcal{C}}\mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\boldsymbol{A}\cdot\tilde{\partial}P\,d\mathcal{C}$ *lavoro elementare delle forze d'inerzia*;

(2.15) $\partial L^{(f)}\equiv\int_{\mathcal{C}}\boldsymbol{f}\cdot\tilde{\partial}P\,d\mathcal{C}$ *lavoro elementare delle forze superficiali*;

(2.16) $\partial L^{(i)}\equiv dy^4\int_{\mathcal{C}}Y^{\varrho\sigma}\overset{*}{u}{}^4\,\partial_4\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\sigma}\,d\mathcal{C}$ *lavoro elementare di deformazione delle forze intime*;

(2.17) $\partial L^{(c)}\equiv\int_{\mathcal{C}}Y^\varrho{}_\lambda\,\tilde{\Gamma}_\varrho{}^\lambda{}_\tau\,dy^\tau\,d\mathcal{C}$ *lavoro elementare complementare*;

(2.18) $\partial L^{(r)}\equiv-\int_{\mathcal{C}}Y^\varrho_\lambda\,\overset{*}{C}_\varrho\,dy^\lambda\,d\mathcal{C}$ *lavoro elementare delle forze d'interazione*.

Di conseguenza l'equazione (2.13) può essere scritta nella forma seguente:

$$(2.19)\qquad \partial L^{(m)}+\partial L^{(i)}+\partial L^{(c)}+\partial L^{(r)}+\partial L^{(f)}=0\,;$$

la chiameremo l'*equazione simbolica della meccanica relativistica dei continui.*

3. Sistemi a trasformazioni reversibili: equazioni costitutive.

Se teniamo conto del contributo dato dall'equazione (2.19) all'analisi del lavoro delle forze intime in una trasformazione infinitesima di un sistema continuo a trasformazioni reversibili, siamo indotti a tradurre il 1° principio della Termodinamica per il generico elemento C di $\mathcal{C}$, nel riferimento locale di moto incipiente R_P, nella seguente equazione:

$$E\mu\,\partial q\cdot dC = \mu\, dy^4 \mathcal{L}_u u\cdot dC + Y^{\varrho\tau}\mathcal{L}_u \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}\, dy^4\, dC \tag{3.1}$$

ove ∂q indica la quantità di calore assorbito (in senso algebrico) dall'unità di massa del corpo nel passaggio da una configurazione ad una infinitamente prossima, $\mathcal{L}_u u\cdot dy^4$ esprime la corrispondente variazione di energia interna e

$$\partial l^{(i)} \equiv Y^{\varrho\tau}\mathcal{L}_u \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}\, dy^4$$

il corrispondente lavoro di deformazione delle forze intime per unità di volume. Poichè abbiamo ammesso che il corpo S sia a trasformazioni reversibili, vale per esso la relazione

$$\frac{\partial q}{T} = \mathcal{L}_u s\cdot dy^4\,; \tag{3.2}$$

di conseguenza per la corrispondente variazione di energia libera

$$\mathcal{F} = u - EsT$$

deduciamo da (3.1) l'equazione

$$\mu\, \overset{*}{u}{}^4\, \partial_4 \mathcal{F} = -\, Y^{\varrho\tau}\, \overset{*}{u}{}^4\, \partial_4 \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} - E\mu s \overset{*}{u}{}^4\, \partial_4 T\,. \tag{3.3}$$

Supposta nota l'energia libera $\mathcal{F}$, come funzione caratteristica della struttura del corpo S, l'equazione (3.3) mostra la dipendenza di $\mathcal{F}$ dalla variabile evolutiva y^4, in ogni evento P di $\mathcal{C}$, per il tramite delle caratteristiche lagrangiane di deformazione $\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}$ e della temperatura assoluta T. Pertanto l'equazione (3.3), scritta nella forma

$$\mu\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}}\cdot \overset{*}{u}{}^4\, \partial_4 \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\, \overset{*}{u}{}^4\, \partial_4 T\right] = -\, Y^{\varrho\tau}\, \overset{*}{u}{}^4\, \partial_4 \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} - E\mu s \overset{*}{u}{}^4\, \partial_4 T \tag{3.3$'$}$$

consente di dedurre le relazioni

$$Y^{\varrho\tau} = -\,\mu\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}}\,, \qquad s = -\,\frac{1}{E}\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\,. \tag{3.4}$$

Come nel caso classico, il potenziale termodinamico $\mathcal{F}$ deve verificare il postulato di Helmholtz perchè abbia senso fisico, e deve perciò soddisfare la limitazione

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2} < 0 . \tag{3.5}$$

Se, al contrario, supponiamo nota l'energia interna specifica u, ed esprimiamo la dipendenza di u dalla variabile y^4 per il tramite delle $\overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}$ e dell'entropia specifica s, per variazioni infinitesime di u lungo le linee di corrente, da (3.1) e (3.2) deduciamo l'equazione

$$\overset{*}{u}{}^4 \partial_4 u \cdot dy^4 = -\frac{1}{\mu} Y^{\varrho\tau} \overset{*}{u}{}^4 \partial_4 \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} \cdot dy^4 + ET \overset{*}{u}{}^4 \partial_4 s \cdot dy^4 \tag{3.6}$$

donde seguono, come da (3.3), le relazioni

$$Y^{\varrho\tau} = -\mu \frac{\partial u}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}} , \qquad T = \frac{1}{E} \frac{\partial u}{\partial s} . \tag{3.7}$$

Analogamente a ciò che avviene nel caso classico, l'energia interna specifica u deve soddisfare la limitazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} > 0 . \tag{3.8}$$

A questo punto ricordiamoci delle formule (2.17) cui siamo pervenuti nella Nota [1], che per comodità riscriviamo:

$$Y^{hr} = \left(\delta^h_\varrho - \delta^h_4 \frac{\overset{*}{u}_\varrho}{\overset{*}{u}_4}\right)\left(\delta^r_\tau - \delta^r_4 \frac{\overset{*}{u}_\tau}{\overset{*}{u}_4}\right) Y^{\varrho\tau} . \tag{3.9}$$

Sostituendo in esse alle $Y^{\varrho\tau}$ le corrispondenti espressioni assegnate dalle relazioni (3.4) o (3.7) dedotte poc'anzi, possiamo attribuire alle caratteristiche lagrangiane dello stress Y^{hk} le rispettive forme

$$Y^{hk} = -\mu \left(\delta^h_\varrho - \delta^h_4 \frac{\overset{*}{u}_\varrho}{\overset{*}{u}_4}\right)\left(\delta^k_\tau - \delta^k_4 \frac{\overset{*}{u}_\tau}{\overset{*}{u}_4}\right) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}} \quad \text{per trasformazioni isoterme;} \tag{3.10}$$

$$Y^{hk} = -\mu \left(\delta^h_\varrho - \delta^h_4 \frac{\overset{*}{u}_\varrho}{\overset{*}{u}_4}\right)\left(\delta^k_\tau - \delta^k_4 \frac{\overset{*}{u}_\tau}{\overset{*}{u}_4}\right) \frac{\partial u}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}} \quad \text{per trasformazioni isoentropiche.} \tag{3.11}$$

Osservazione. Le equazioni costitutive (3.10), (3.11) ci permettono di completare l'analisi dell'equazione (3.30) ottenuta in [1], che qui riscriviamo:

$$\mu \overset{*}{u}^4 \partial_4 w = -\tfrac{1}{2} Y^{\varrho\tau} \mathfrak{L}_u \overset{*}{\gamma}_{\varrho\tau} = - Y^{\varrho\tau} \overset{*}{u}^4 \partial_4 \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} . \tag{3.12}$$

Ad essa eravamo pervenuti considerando la proiezione temporale dell'equazione di conservazione (3.2)

$$\nabla_k \overset{*}{T}^{hk} = 0 .$$

In virtù delle equazioni costitutive (3.10) o (3.11), valide per un sistema continuo a trasformazioni reversibili, possiamo sostituire in (3.12) alle $Y_{\varrho\tau}$ le espressioni

$$Y^{\varrho\tau} = -\mu \frac{\partial w}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}} \tag{3.13}$$

intendendo w coincidente con $\mathcal{F}$ nelle trasformazioni isoterme e con u nelle trasformazioni adiabatiche. Ne consegue l'identità

$$\mu \overset{*}{u}^4 \partial_4 w = \mu \overset{*}{u}^4 \frac{\partial w}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}} \cdot \frac{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}}{\partial y^4} = \mu \overset{*}{u}^4 \frac{\partial w}{\partial y^4} . \tag{3.14}$$

Pertanto la proiezione temporale (3.12) nel caso di un sistema continuo a trasformazioni reversibili si riduce a una identità.

4. Qualche cenno sul problema di evoluzione.

Nel dedurre l'equazione fondamentale (3.3) nella Nota [1] e l'equazione simbolica (2.19) nonchè le equazioni costitutive (3.10), (3.11) in questa Nota, abbiamo supposto che la struttura metrica dello spazio tempo V_4 e il campo di vettori u^h fossero noti. Ma in realtà struttura metrica di V_4, riferimento fisico $\{L\}$ e leggi finite di evoluzione del sistema S sono intimamente connessi fra loro sì che la conoscenza effettiva delle leggi finite di evoluzione del corpo S implica la conoscenza del campo di vettori u^h e della metrica di V_4, e viceversa.

Pertanto la risoluzione del problema di evoluzione del corpo S in Relatività generale esige che accanto alle equazioni evolutive stabilite sia posto il sistema di equazioni gravitazionali einsteiniane; e il complesso di equazioni atte a studiare l'evoluzione del continuo S viene ad essere così il seguente:

$$
(4.1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\overset{*}{R}_{hk} - \frac{1}{2} R \overset{*}{g}_{hk} = -\chi \left[c^2 \mu \left(1 + \frac{w}{c^2}\right) \overset{*}{u}_h \overset{*}{u}_k + Y_{hk} \right], \\
&\qquad\qquad\qquad [\mu(c^2 + w)\,\delta_\varrho^\tau + Y_\varrho^\tau]\, \overset{*}{u}{}^4 \nabla_4 \overset{*}{u}_\tau = -\tilde{\nabla}_\tau Y_\varrho{}^\tau, \\
&Y^{\varrho\tau} = -\mu \frac{\partial w}{\partial \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau}}, \quad \mu \sqrt{\frac{\overset{*}{\gamma}}{m}} = \overset{*}{\mu}, \quad \overset{*}{\varepsilon}_{\varrho\tau} = \frac{1}{2} (\overset{*}{\gamma}_{\varrho\tau} - m_{\varrho\tau}).
\end{aligned}
\right.
$$

Tenendo presente che la configurazione di riferimento dev'essere supposta nota, e che quindi sia la densità μ^* sia il tensore m_{hk} sono da ritenere assegnati, come è da supporre assegnata la funzione energètica w, caratteristica della struttura materiale del corpo, le incognite essenziali presenti nel sistema di equazioni (4.1) sono il tensore metrico spaziale $\overset{*}{\gamma}_{hk}(y)$ e il campo di vettori $\overset{*}{u}_h(y)$.

Siamo così giunti a disporre di tutto ciò che serve per formulare correttamente il problema di Cauchy per lo studio dell'evoluzione di un continuo a trasformazioni reversibili. Tale argomento sarà l'oggetto di una prossima Nota.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Caricato, *Formulazione relativa delle leggi di evoluzione di un sistema continuo in Relatività generale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **68** (1982).

[2] A. Signorini, *Lezioni di Fisica Matematica*, anno accad. '52-'35, Veschi, Roma.

[3] G. Caricato, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, anno accad. '81-'82, Ist. Mat. G. Castelnuovo, Roma.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 dicembre 1982.