RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RUGGERO FERRO

Una nota sulla nozione di molto maggiore

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 71 (1984), p. 223-227

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1984__71__223_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 71 (1984)

Una nota sulla nozione di molto maggiore.

RUGGERO FERRO (*)

SOMMARIO - Nel presente articolo si introduce la proprietà di quasi totalità goduta dalla relazione d'ordine parziale molto maggiore di Spigler [3]. Inoltre si propone una variante a detta nozione ed infine si assolutizza la stessa nozione con i metodi dell'analisi non standard pervenendo ad un confronto con la nozione di limite.

SUMMARY - In this paper we consider the property of being almost total of the partial ordering much bigger of Spigler [3]. Furthemore we present a variant of the same notion of much bigger and finally we make this notion absolute using the methods of non standard analysis, getting a comparison with the notion of limit.

R. Spigler in [1] ha introdotto la nozione di molto maggiore relativo a k nel seguente modo: se a e b sono numeri reali positivi si dirà che $a \gg_k b$ se $a > kb$ con k numero reale $\geqslant 1$ prefissato.

Spigler dimostra che per questa relazione valgono le proprietà antiriflessiva e transitiva per cui è una relazione d'ordine parziale (la sua pseudotricotomia è una proprietà di ogni relazione d'ordine parziale). Purtuttavia la relazione d'ordine parziale $\gg_k$ è, in un certo senso, vicina ad essere una relazione d'ordine totale poichè numeri reali positivi diversi a e b non confrontabili non sono poi del tutto slegati uno dall'altro nel senso che se $A_1 = \{c\colon a \gg_k c \text{ e } c > 0\}$ e $A_2 = \{c\colon c \gg_k a\}$ e $B_1 = \{c\colon b \gg_k c \text{ e } c > 0\}$ e $B_2 = \{c\colon c \gg_k b\}$ allora $A_1 \subset B_1$ e $A_2 \supset B_2$, o $A_1 \supset B_1$ e $A_2 \subset B_2$. Chiamiamo questa proprietà quasi to-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università di Padova, Via Belzoni, 7 - 35100 Padova, Italy.

talità. In effetti, se è pur vero che ogni ordine parziale può essere esteso ad un ordine totale, c'è un modo per così dire canonico per estendere un ordine parziale quasi totale $\ggcurly$ su un insieme I ad un ordine totale $\succ$ su I nel modo seguente $\succ = \{(i, j): i \in I, j \in I, \{k: k \in I, k \ggcurly i\} \subset \{k: k \in I, k \ggcurly j\}, \{k: k \in I, i \ggcurly k\} \supset \{k: k \in I, j \ggcurly k\}\}$.

Spigler, nel motivare l'introduzione della nozione di $\gg_k$ spiega che la nozione è rilevante in fisica dove è d'uso trascurare quantità molto minori di quelle in considerazione.

Ma, come si vede dalle proprietà formali di $\gg$ studiate da Spigler, in genere non si può ripetere l'operazione di trascurare qualcosa. Tecnicamente se $a \gg_k b$ e $a \gg_k c$ non è detto che $a \gg_k b + c$, mentre si ha $a \gg_{k/2} b + c$.

Potremmo dire che il concetto di trascurabile formalizzabile con la nozione di $\gg_k$ di Spigler è una nozione relativa, chiamiamola trascurabile relativa a k rispetto ad a, o k-trascurabile rispetto ad a, e la regola formale sopra scritta si potrebbe enunciare in questo modo: la somma di due grandezze k trascurabili è $k/2$ trascurabile.

Generalmente quando si vuole usare il concetto di trascurabile si vorrebbe che il quadrato di una quantità trascuraile sia ancora una quantità trascurabile, anzi lo sia a maggior ragione, cioè se b è k-trascurabile rispetto ad a, $a \gg_k b$, si vorrebbe che b^2 fosse h-trascurabile rispetto ad a, $a \gg_h b^2$, con $h \geqslant k$. Ciò non è sempre vero con la nozione di Spigler.

Altro aspetto, diciamo non ottimale, della nozione di Spigler è il seguente. La nozione di k-trascurabilità che se ne può dedurre è sempre rispetto ad un'unica grandezza a, mentre in pratica capita di considerare varie grandezze, diciamo $a_1, a_2, \ldots, a_n$, non a due a due una molto maggiore dell'altra e fare dei ragionamenti con quantità trascurabili rispetto a tutte le grandezze considerate.

Un modo per soddisfare le due esigenze qui esposte potrebbe essere quello di modificare la definizione di molto maggiore di Spigler, e quindi di trascurabile, nella seguente definizione.

Siano date le quantità positive $a_1, \ldots, a_n$. Sia u una unità di misura minore della a_i, $i = 1, \ldots, n$, e maggiore della quantità che vorremmo trascurare. Sia $k \geqslant 1$. Diremo che la quantità $b > 0$ è k-trascurabile se $u > kb$ ovvero, con la notazione di Spigler, se $u \gg_k b$.

Sostanzialmente abbiamo introdotto una nuova relazione binaria $\ggcurly_k$ tra numeri reali positivi a e b con $a > u$ e $b < u$ definibile come

$$a \ggcurly_k b \qquad \text{se } \frac{a}{u} > k\,\frac{b}{u}$$

relazione che possiamo estendere a qualsiasi coppia a, b di reali positivi semplicemente ignorando le limitazioni $a > u$ e $b > u$.

Questa definizione rende ben conto dell'importanza che ha la scelta dell'unità di misura nelle applicazioni.

Ancora la relazione $\gg_k$ è antiriflessiva transitiva, non tricotomica, e quasi totale e se $u = 1$ la relativa nozione di trascurabile va bene rispetto a qualsiasi insieme finito di quantità maggiori di 1 e vale anche la seguente proprietà: se b è k-trascurabile allora b^n è k^n-trascurabile e dunque anche k-trascurabile.

Ancora la nozione di trascurabilità è relativa a k e si ha la proprietà che la somma di due grandezze k-trascurabili è $k/2$ trascurabile, ed analoghe proprietà. Cioè operando su grandezze trascurabili si ottengono in genere risultati trascurabili relativamente ad altri indici. Sicchè, poichè nella pratica interessa arrivare a dei risultati in cui certe quantità siano trascurabili relativamente ad un k prefissato, si presenterà il problema di stabilire rispetto a quali indici dovranno essere trascurabili le quantità considerate inizialmente perchè alla fine dei calcoli si abbia la k-trascurabilità.

Il problema è del tutto analogo e seguente: dato un $\varepsilon = 1/k$ trovare un $\delta > 0$ tale che per i vari valori positivi che vorremo considerare minori di δ una funzione di questi valori risulti in modulo minore di ε. Siamo cioè al problema di affrontare i limiti mediante approssimazioni.

La speranza nascosta di ogni studio di questo tipo è evitare il problema sopra esposto e, in questo caso, poter parlare di trascurabilità e non di k trascurabilità come, d'altra parte, si parla anche di limiti piuttosto che di maggior vicinanza di una quantità prefissata.

Si potrebbe tentare la via di una assiomatizzazione del concetto di trascurabile partendo con l'osservare che ogni somma di un numero numerabile arbitrario di trascurabili dovrebbe dare un trascurabile, da cui già si può dedurre che le grandezze trascurabili devono essere associate agli infinitesimi di un corpo ordinato non archimedeo.

Noi invece seguiremo la via dell'analisi non standard, come viene anche usata per precisare la nozione di limite.

Osserviamo anzitutto che la relazione $R(a, k)$ che sussiste tra a e k quando a è k-trascurabile ($a > 0$, $k \geqslant 1$), cioè quando $1 \gg_k a$, è una relazione di concorrenza (finitamente simultaneamente soddisfacibile) nella prima variabile. Infatti scelti comunque n valori $k_1, \ldots, k_n$, con $k_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, esiste un valore $a_0 > 0$ tale che $R(a_0, k_i)$ con $i = 1, \ldots, n$. Sia dunque $^*\mathbf{R}^+$ l'insieme dei positivi in un allargamento

$^*\mathbf{R}$ dei reali $\mathbf{R}$ in una superstruttura su questi (qui allargamento è usato nel senso tecnico dell'analisi non standard, cioè estensione elementare in cui è vero il teorema di concorrenza per ogni relazione concorrente), allora esiste in $^*\mathbf{R}^+$ almeno un elemento $^*a > 0$ tale che $^*R(^*a, k)$ per ogni $k \in \mathbf{R}$ e $k > 1$, dove $^*R$ è l'estensione naturale della relazione R. Di fatto si vede che $^*a$ non è l'unico elemento che gode di questa proprietà ma anche ad esempio n^*a, $^*a^n$ con n naturale godono di questa proprietà.

Se chiamiamo elementi trascurabili gli elementi di $^*\mathbf{R}^+$ che godono di detta proprietà abbiamo i seguenti notevoli risultati: Somma e differenza di elementi trascurabili è un elemento trascurabile, prodotto di elementi trascurabili è un elemento trascurabile, prodotto di un elemento trascurabile e un reale positivo (quindi anche per un naturale) è un elemento trascurabile, elevamento a potenza di un elemento trascurabile ad un esponente reale positivo è un elemento trascurabile. Questi risultati giustificano l'appellativo dato di elemento trascurabile.

Analizzando gli elementi trascurabili in $^*\mathbf{R}^+$ ci accorgiamo che essi sono esattamente gli infinitesimi positivi, cioè gli elementi di $^*\mathbf{R}$ che sono positivi e minori di ogni numero reale positivo, come si dimostra facilmente.

Il fatto che gli infinitesimi positivi siano esattamente gli elementi trascurabili lega la nozione di molto maggiore con quella di limite.

In effetti l'usuale nozione di limite in terminologia non standard può essere formulata così L è il limite di $f(x)$ per x tendente a c se $f(c + \varepsilon) \approx L \approx f(c - \varepsilon)$ per ogni infinitesimo positivo ε; cioè, detto in modo euristico, se ε è un elemento trascurabile (infinitesimo) allora la distanza da $f(x + \varepsilon)$ o $f(x - \varepsilon)$ a L è pure un elemento trascurabile.

Questo mostra che mentre l'infinitesimo può essere considerato una assolutizzazione del concetto di trascurabile, cioè trascurabilità relativa ad ogni k, la nozione di molto maggiore può essere considerata una approssimazione del concetto di trascurabile.

Poichè anche la classica nozione di limite mediante la definizione ε, δ è da considerarsi una approssimazione reale della nozione di limite data mediante gli infinitesimi, risulta che sia la nozione classica di limite che la nozione di molto maggiore sono approssimazioni della stessa nozione e in questo senso è stabilito un legame tra le due. Questo giustifica anche l'uso intuitivo che si fa spesso in fisica della nozione di molto maggiore essendo questo metodo precisabile nella nozione presentata ed assolutizzabile mediante la formulazione non standard della nozione di limite.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. DAVIS, *Applied non standard analysis*, Wiley, New York, 1977.
[2] H. J. KEISLER, *Elementary calculus*, Prindle Weber Schmidt, Boston, 1976.
[3] R. SPIGLER, *La struttura delle relazioni « molto maggiore » e « molto minore » nel calcolo approssimato*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 63 (1980), pp. 27-39.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 settembre 1982.