

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ELISABETTA BAROZZI

Il problema di Plateau in domini illimitati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 70 (1983), p. 89-98

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__70__89_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Il problema di Plateau in domini illimitati.

ELISABETTA BAROZZI (*)

Sia $\Omega \subset R^n$ un aperto con $\partial\Omega$ lipschitziana, sia $\Gamma \subset \partial\Omega$ e sia $V \in (0, H_n(\Omega))$. In questo lavoro consideriamo il problema

Minimizzare il funzionale dell'area

$$(1) \quad \mathcal{F}(E) = \int_{\Omega} |D\varphi_E| + \int_{\partial\Omega} |\varphi_E - \varphi_{\Gamma}| dH_{n-1}$$

nella classe

$$(2) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_V = \{E \subset \Omega: H_n(E) = V\}.$$

Qui, come al solito, abbiamo indicato con H_k la misura di Hausdorff k -dimensionale in R^n (vedi H. Federer [4], pagina 171). φ_E è la funzione caratteristica dell'insieme E , cioè

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

mentre $D\varphi_E$ è il gradiente di φ_E nel senso delle distribuzioni e $|D\varphi_E|$ è la sua variazione totale, i.e.

$$\int_A |D\varphi_E| = \sup \left\{ \int \varphi_E(x) \cdot \operatorname{div} g(x) dx, g \in C_0^1(A; R^n), \quad |g(x)| \leq 1, \forall x \in A \right\}$$

per $A \subset R^n$ aperto.

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Trento, Trento.

La quantità $\int_A |D\varphi_E|$ si chiama *perimetro di E in A* (vedi E. De Giorgi [3], E. Giusti [5], M. Miranda [8]).

È ben noto (vedi E. Giusti [5], M. Miranda [9]), che se $\int_E |D\varphi_E| < +\infty$ allora φ_E ha una traccia in $L^1_{\text{loc}}(\partial\Omega)$, che continueremo a chiamare, con abuso di notazione, φ_E .

Il problema (1)-(2) si risolve facilmente nel caso in cui $H_n(\Omega) < +\infty$, grazie alla semicontinuità inferiore del funzionale $\mathcal{F}$ rispetto alla convergenza $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ed al ormai classico teorema di compattezza in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ per gli insiemi di perimetro equilimitato (vedi [3], [5], [8]).

La situazione diventa più complessa se $H_n(\Omega) = +\infty$, perchè in questo caso il passaggio al limite in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ non preserva in generale il vincolo di volume $H_n(E) = V$.

Un primo esempio di questa situazione si ha quando $\Omega = R^n$ (e quindi $\partial\Omega$ e Γ sono vuoti). Il primo teorema di esistenza di minimo per il problema (1)-(2) in tale situazione fu dimostrato da E. De Giorgi in [2]. Una dimostrazione leggermente diversa si trova in E. Gonzalez - G. Greco [6].

Lo strumento fondamentale per la dimostrazione dell'esistenza di minimo (che di fatto è una sfera di misura V) in tale situazione è un procedimento di simmetrizzazione che conduce ad assicurare che la precedente compattezza $L^1_{\text{loc}}(R^n)$ è in realtà $L^1(R^n)$ sulle successioni minimizzanti. Tale procedimento di simmetrizzazione non è però applicabile in situazioni più generali. Tuttavia, in questo lavoro vedremo come dalla proprietà isoperimetrica della sfera (cioè, dalla risoluzione del problema (1)-(2) nella particolare situazione $\Omega = R^n$) si possa ottenere un teorema molto generale di esistenza e regolarità di minimo per il problema (1)-(2).

Facciamo le seguenti ipotesi:

- (3) Γ è un insieme limitato.
- (4) Esiste una sfera $B \subset \Omega$ con $H_n(B) = V$.

Mentre l'ipotesi (3) non sembra essenziale e dovrebbe essere una questione puramente tecnica sostituirla con l'ipotesi $H_{n-1}(\Gamma) < +\infty$, l'ipotesi (4) è necessaria, come mostra il seguente

ESEMPIO. Sia $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subset R^n$, dove $\{B_j\}_j$ è una famiglia disgiunta di sfere con

$$H_n(B_j) = V - \frac{V}{2^j}.$$

Sia $\Gamma = \emptyset$. Consideriamo la successione $\{E_j\}_j \subset \mathcal{E}$ definita da

$$E_j = B_j \cup F_j \quad (j \geq 2)$$

dove F_j è una sfera di misura $V/2_j^i$ contenuta in B_1 . È chiaro che

$$\mathcal{F}(E_j) \downarrow n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot V^{(n-1)/n}.$$

(Qui $\omega_n = H_n(\{x \in R^n: |x| \leq 1\})$ e quindi $n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot V^{(n-1)/n}$ è il perimetro di una sfera di misura V).

D'altra parte, dalla proprietà isoperimetrica della sfera, è chiaro che

$$\mathcal{F}(E) > n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot V^{(n-1)/n}, \quad \forall E \in \mathcal{E}.$$

Quindi in questo caso non esiste minimo per il problema (1)-(2).

(Si noti che in questo caso $E_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \emptyset$ in $L_{loc}^1(\Omega)$).

OSSERVAZIONE 1. Notiamo che le condizioni (3), (4) assicurano l'esistenza di insiemi $E \in \mathcal{E}$ tali che $\mathcal{F}(E) < +\infty$; basta infatti prendere $E = B$. Si ha

$$\mathcal{F}(B) \leq n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot V^{(n-1)/n} + H_{n-1}(\Gamma) < +\infty.$$

La dimostrazione dell'esistenza di minimo per il problema (1)-(2) con le ipotesi (3), (4) si farà secondo il seguente schema:

a) Per ogni intero positivo j , sia

$$\Omega_j = \{x \in \Omega: |x| < j\}.$$

Chiaramente esiste j_0 tale che

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_j \supset B \\ \Gamma \supset \partial\Omega_j \end{array} \right\} \quad \text{per ogni } j \geq j_0.$$

b) Per $j \geq j_0$, sia E_j minimo (non unico in generale) del problema

$$(1') \quad \text{minimizzare } \left\{ \int_{\Omega_j} |D\varphi_E| + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_E - \varphi_F| dH_{n-1} \right\}$$

nella classe

$$(2') \quad \mathfrak{E}_j = \{E \subset \Omega_j: H_n(E) = V\}.$$

Come già osservato, poichè $H_n(\Omega_j) < +\infty$, non ci sono problemi riguardo all'esistenza di E_j .

c) Esiste $j_1 > j_0$ tale che, per ogni $j \geq j_1$ esiste $r_j: j_0 \leq r_j \leq j_1$ tale che

$$\int_{|x|=r_j} \varphi_{E_j} dH_{n-1} = 0.$$

d) Da c) segue che, per ogni $j \geq j_1$ esiste $\tilde{E}_j \subset \Omega_{r_j}$, $\tilde{E}_j \in \mathfrak{E}$ con

$$\mathcal{F}(\tilde{E}_j) \leq \mathcal{F}(E_j).$$

Questo ci permette di sostituire la successione $\{E_j\}_j$ di minimi per i problemi (1')-(2') con la successione di minimi $\{\tilde{E}_j\}_j$ tutti contenuti nello stesso insieme limitato Ω_{j_1} .

e) Dalla proprietà di minimo degli $\tilde{E}_j$ si ha che essi hanno perimetro equilimitato in Ω . Tenendo allora conto di d), posso supporre, a meno di passare ad una sottosuccessione, che esiste $E_0 \in \mathfrak{E}$ tale che

$$\tilde{E}_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} E_0 \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

f) Dalla semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}$ e dalla proprietà di minimo degli insiemi approssimanti $\tilde{E}_j$ si vede facilmente che E_0 minimizza $\mathcal{F}$ tra tutti gli insiemi limitati di $\mathfrak{E}$. Ne segue allora che E_0 minimizza $\mathcal{F}$ su tutto $\mathfrak{E}$.

Le difficoltà per svolgere questo programma risiedono nei punti c) e d).

Per dimostrare c) abbiamo bisogno di un lemma di tipo isoperimetrico, la cui formulazione richiede l'introduzione di alcune notazioni:

Per $j_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq j_1$, poniamo

$$(t_1, t_2) = \Omega_{t_2} - \bar{\Omega}_{t_1}, \quad (t_2, t_3) = \Omega_{t_3} - \bar{\Omega}_{t_2}.$$

Sia $E = E_j$ per $j \geq j_1$. Poniamo

$$E_1 = E \cap (t_1, t_2), \quad E_2 = E \cap (t_2, t_3),$$

$$v_1 = H_n(E_1), \quad v_2 = H_n(E_2), \quad v = v_1 + v_2,$$

$$m = \max_{i=1,2,3} \int_{|x|=t_i} \varphi_E dH_{n-1}.$$

Sostituiamo l'insieme E con un nuovo insieme F nel seguente modo:

$$F = \begin{cases} E & \text{in } \Omega_j - (t_1, t_3) - B \\ \emptyset & \text{in } (t_1, t_3) \\ E \cup B_\varrho & \text{in } B \end{cases}$$

dove B_ϱ è una sfera contenuta in B e concentrica con B , scelta in modo che $H_n(B_\varrho - E) = v$ e quindi $H_n(F) = V$, cioè $F \in \mathcal{E}$.

(La possibilità di una tale scelta di B_ϱ è immediata dal fatto che

$$H_n(B - E) \geq v$$

e la funzione $\varrho \mapsto H_n(B_\varrho - E)$ è continua).

Dalla proprietà di minimo di E si ha quindi

$$\mathcal{F}(E) \leq \mathcal{F}(F);$$

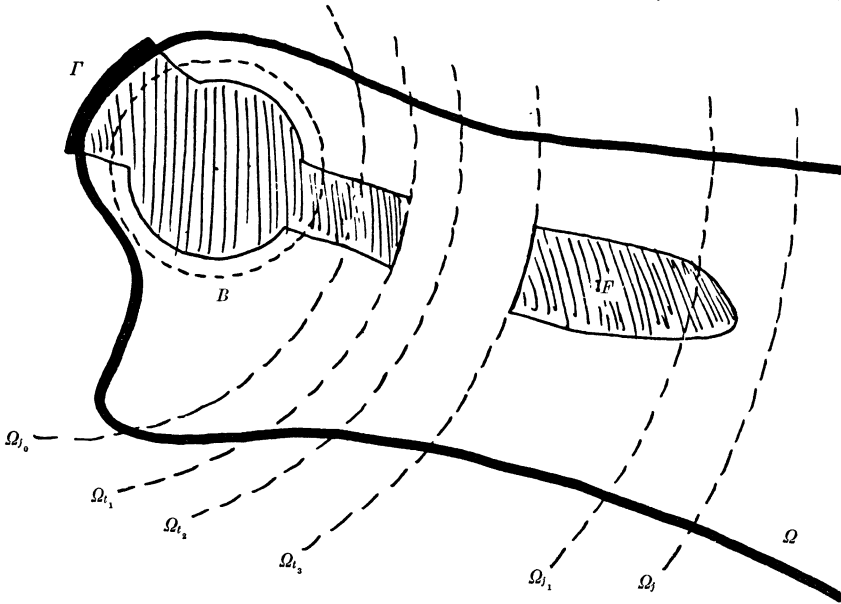
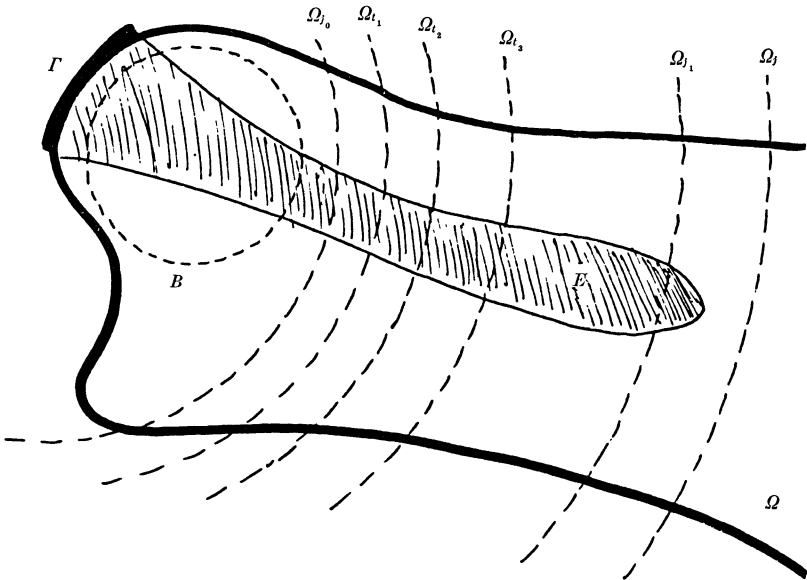
allora usando la disuguaglianza (1.10) dimostrata da I. Tamanini in [10] si ottiene:

$$\int_{(t_1, t_2)} |D\varphi_E| + \int_{\partial\Omega \cap (t_1, t_2)} \varphi_E + \int_{B_\varrho} |D\varphi_E| \leq$$

$$\leq \int_{|x|=t_1} \varphi_E dH_{n-1} + \int_{|x|=t_3} \varphi_E dH_{n-1} + \int_{B_\varrho} |D\varphi_E| + n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot v^{(n-1)/n}$$

cioè

$$(5) \quad \int_{(t_1, t_3)} |D\varphi_E| + \int_{\partial\Omega \cap (t_1, t_3)} \varphi_E dH_{n-1} \leq \int_{|x|=t_1} \varphi_E dH_{n-1} + \int_{|x|=t_3} \varphi_E dH_{n-1} + n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot v^{(n-1)/n}.$$



D'altra parte, dalla proprietà isoperimetrica della sfera, si ha

$$(6) \quad n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot v_i^{(n-1)/n} \leq \int_{(t_i, t_{i+1})} |D\varphi_E| + \int_{\partial\Omega \cap (t_i, t_{i+1})} \varphi_E dH_{n-1} + \int_{|x|=t_i} \varphi_E dH_{n-1} + \int_{|x|=t_{i+1}} \varphi_E dH_{n-1} \quad (i = 1, 2).$$

Dalle (5) e (6) ne segue

$$(7) \quad n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot (v_1^{(n-1)/n} + v_2^{(n-1)/n} - v^{(n-1)/n}) \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^3 \int_{|x|=t_i} \varphi_E dH_{n-1} \leq 6m.$$

Supponiamo $v_1 \leq v_2$, cioè $v_2 = s \cdot v_1$ con $s \geq 1$, $v = v_1 + s \cdot v_1 = (1 + s) \cdot v_1$. La (7) si scrive allora

$$(8) \quad n \cdot \omega_n^{1/n} \cdot v_1^{(n-1)/n} \cdot (1 + s^{(n-1)/n} - (1 + s)^{(n-1)/n}) \leq 6m$$

e quindi, poichè

$$\min_{s \geq 1} (1 + s^{(n-1)/n} - (1 + s)^{(n-1)/n}) = 2 - 2^{(n-1)/n} > 0,$$

risulta

$$v_1 \wedge v_2 \leq \left(\omega_n^{-1/n} \cdot \frac{1}{n} \cdot (2 - 2^{(n-1)/n}) \cdot 6m \right)^{n/(n-1)}.$$

Abbiamo così dimostrato il seguente

LEMMA 1. Con le notazioni precedenti, si ha

$$(9) \quad v_1 \wedge v_2 \leq c_1 \cdot m^N$$

dove $c_1 = c_1(n)$ dipende solo dalla dimensione ed $N = n/(n-1)$.

Ora, poichè $H_n(E_j) = V < +\infty$, $\forall j$, si ha

$$(10) \quad \frac{H_n(E_j \cap (\Omega_{j_1} - \Omega_{j_0}))}{j_1 - j_0} \leq \frac{V}{j_1 - j_0}, \quad \forall j$$

e quindi la quantità (10) può essere resa piccola a piacere uniformemente in j . Ragionando allora come nella dimostrazione del teorema 1 di E. Gonzalez - U. Massari - I. Tamanini in [7] (vedi anche S. Albano - E. Gonzalez [1]) si prova il seguente

LEMMA 2. Esiste $j_1 > j_0$ tale che, per ogni $j \geq j_1$ esiste $r_j: j_0 \leq r_j \leq j_1$ tale che

$$(11) \quad \int_{|x|=r_j} \varphi_{E_j} \cdot dH_{n-1} = 0.$$

Abbiamo così superato la tappa *c*); vediamo ora di dimostrare *d*):

PROPOSIZIONE 1. Siano j_0, j_1 come prima. Allora, per ogni $j \geq j_1$ esiste $\tilde{E}_j$ minimo del problema (1')-(2') tale che $\tilde{E}_j \subset \Omega_{j_1}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia E_j minimo del problema (1')-(2'), sia r_j come nel Lemma 2.

Costruiamo $\tilde{E}_j$ nel seguente modo:

$$\tilde{E}_j = \begin{cases} E_j & \text{in } \Omega_{r_j} - B \\ \emptyset & \text{in } \Omega - \Omega_{r_j} \\ E_j \cup B_{\varrho_j} & \text{in } B \end{cases}$$

dove B_{ϱ_j} è una palla concentrica con B scelta in modo da preservare il vincolo di volume, cioè

$$H_n(B_{\varrho_j} - E_j) = H_n(E_j \cap (\Omega - \Omega_{r_j})) = v_j.$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{E}_j) &= \int_{\Omega_j} |D\varphi_{\tilde{E}_j}| + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{\tilde{E}_j} - \varphi_R| dH_{n-1} = \\ &= \int_{\Omega_{r_j} - \bar{B}_{\varrho_j}} |D\varphi_{E_j}| + \int_{\bar{B}_{\varrho_j}} |D\varphi_{\tilde{E}_j}| + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{\tilde{E}_j} - \varphi_R| dH_{n-1} \leq \\ &\leq \int_{\Omega_{r_j} - \bar{B}_{\varrho_j}} |D\varphi_{E_j}| + \int_{B_{\varrho_j}} |D\varphi_{E_j}| + \frac{n}{\varrho_j} \cdot v_j + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{\tilde{E}_j} - \varphi_R| dH_{n-1} = \\ &= \int_{\Omega_{r_j}} |D\varphi_{E_j}| + \frac{n}{\varrho_j} \cdot v_j + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{\tilde{E}_j} - \varphi_R| dH_{n-1} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \int_{\Omega_{r_j}} |D\varphi_{E_j}| + n \cdot \omega_n^{1/n} v_j^{(n-1)/n} + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{\tilde{E}_j} - \varphi_F| dH_{n-1} \leq \\ & \leq \int_{\Omega_{r_j}} |D\varphi_{E_j}| + \int_{\Omega_j - \Omega_{r_j}} |D\varphi_{E_j}| + \int_{\partial\Omega_j} |\varphi_{E_j} - \varphi_F| dH_{n-1} = \mathcal{F}(E_j) \end{aligned}$$

e quindi $\mathcal{F}(\tilde{E}_j) = \mathcal{F}(E_j)$ c.v.d.

Concludiamo infine le tappe e), f) dimostrando il seguente risultato di esistenza:

TEOREMA. Nelle ipotesi (3)-(4) esiste soluzione del problema (1)-(2).

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{\tilde{E}_j\}_j$ come nella proposizione precedente. Come già osservato, possiamo supporre che esista $E_0 \in \mathcal{E}$ tale che

$$\tilde{E}_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} E_0 \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Sia $F \in \mathcal{E}$, F limitato.

Allora $F \in \mathcal{E}_j$ per j sufficientemente grande e quindi, dalla semi-continuità inferiore di $\mathcal{F}$ si ha

$$\mathcal{F}(E_0) \leq \liminf_j \mathcal{F}(\tilde{E}_j) \leq \mathcal{F}(F).$$

Sia ora $F \in \mathcal{E}$ arbitrario. Sostituiamo F con il seguente insieme $\tilde{F}_k$:

$$\tilde{F}_k = \begin{cases} F & \text{in } \Omega_{r(k)} - B \\ \emptyset & \text{in } \Omega - \Omega_{r(k)} \\ F \cup B_{\varrho_k} & \text{in } B \end{cases}$$

dove al solito B_{ϱ_k} è scelta in modo da preservare il vincolo di volume e dove $r(k)$ è un'opportuna successione divergente a $+\infty$.

Poichè $\tilde{F}_k \in \mathcal{E}$ ed è limitato, si ha

$$\mathcal{F}(E_0) \leq \mathcal{F}(\tilde{F}_k).$$

Il risultato segue notando che, per un'opportuna scelta di $r(k)$, risulta

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\tilde{F}_k) = \mathcal{F}(F) \quad \text{c.v.d.}$$

OSSERVAZIONI FINALI. La soluzione da noi trovata è contenuta nella regione Ω_1 precedentemente definita, ed è quindi limitata.

Con la tecnica usata per dimostrare i Lemmi 1 e 2 si può altresì dimostrare che ogni soluzione del problema (1)-(2) nelle ipotesi (3), (4) è in effetti limitata.

Inoltre, ogni soluzione del problema (1)-(2) è regolare, cioè la frontiera in Ω di ogni minimo è una varietà analitica $n - 1$ dimensionale tranne che su un eventuale insieme singolare chiuso Σ la cui dimensione di Hausdorff non supera $n - 8$ (vedi [7]).

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. ALBANO - E. GONZALEZ, *Rotating drops*. Apparirà sul Indiana J. of Math.
- [2] E. DE GIORGI, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Memorie Accad. Naz. Lincei, serie 8, **5** (1958).
- [3] E. DE GIORGI - F. COLOMBINI - L. PICCININI, *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate*, Pisa, Editrice Tecnico Scientifica, 1972.
- [4] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969.
- [5] E. GIUSTI, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Notes on Pure Math., Canberra, 1977.
- [6] E. GONZALEZ - G. GRECO, *Una nuova dimostrazione della proprietà isoperimetrica dell'ipersfera nella classe degli insiemi aventi perimetro finito*, Ann. Univ. Ferrara, **23**, 1977.
- [7] E. GONZALEZ - U. MASSARI - I. TAMANINI, *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint*. Apparirà sul Indiana J. of Math.
- [8] M. MIRANDA, *Distribuzioni aventi derivate misure, insiemi di perimetro localmente finito*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **18**, 1964.
- [9] M. MIRANDA, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. di Padova, **38**, 1967.
- [10] I. TAMANINI, *Il problema della capillarità su domini non regolari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **56**, 1977.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 aprile 1982.