

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

E. VIRGA

Sulla diffusione del calore in un conduttore irradiato

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 70 (1983), p. 187-196

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__70__187_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1983__70__187_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sulla diffusione del calore in un conduttore irradiato.

E. VIRGA (*)

SUMMARY - We consider the heat diffusion equation, which arise from the study of Laser heating of metals and we give a rational proof for the structure of its source term. In Appendix we show that our proof can also be given within the framework of a recent theory about internal radiation in continua.

1. Introduzione.

In questo lavoro si fornisce una giustificazione, basata su considerazioni di elettromagnetismo classico, di una equazione per la propagazione del calore in un conduttore irradiato, introdotta altrove senza prova. In Appendice, poi, si dà una giustificazione basata su di una recente teoria dell'irraggiamento interno nei solidi, dedotta dai principi generali della meccanica dei continui. Mentre la prima parte è opera di E. Virga, l'Appendice è frutto di alcune discussioni con T. Manacorda.

Nell'applicazione del Laser di potenza alla realizzazione di diversi trattamenti tecnologici dei metalli, assume particolare interesse lo studio della diffusione del calore generato nel solido dall'assorbimento della radiazione incidente ⁽¹⁾. È noto che in un metallo la radiazione si propaga solo all'interno di un sottile strato superficiale, il cui spes-

(*) Indirizzo dell'A.: Ist. Scienza delle Costruz., Via Diotisalvi 2, Pisa.
Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

⁽¹⁾ Un'ampia rassegna delle applicazioni tecnologiche del Laser di potenza può trovarsi in [7].

sore (*skin depth*) dipende, oltre che da parametri caratteristici del metallo considerato, anche dalla frequenza della radiazione incidente. Lo spessore di penetrazione della radiazione emessa da un Laser di potenza, che generalmente irradia frequenze dello spettro infrarosso (la lunghezza d'onda di un Laser a CO_2 è di $10.6 \mu\text{m}$), è dell'ordine di qualche centesimo di micron. Pertanto, si può equivalentemente ritenere che l'effetto termico dovuto all'assorbimento della radiazione sia ascrivibile ad una sorgente superficiale distribuita su tutta l'area irraggiata.

Se, per maggior semplicità, si considera il caso di un conduttore semi-infinito investito da un'onda elettromagnetica monocromatica piana, con direzione di propagazione ortogonale alla superficie libera del semispazio ⁽²⁾, le precedenti considerazioni qualitative suggeriscono di scrivere l'equazione di diffusione del calore nella forma (v. [7], p. 840):

$$(1.1) \quad \rho c_v \theta_t - k \theta_{xx} = S(x).$$

In questa θ rappresenta la temperatura, t il tempo e x la coordinata equiversa alla direzione di propagazione, con origine sulla superficie libera. Inoltre, con c_v e k si è rispettivamente indicato il calore specifico (per unità di massa) a volume costante e la conducibilità termica del solido irraggiato. $S(x)$, infine, è il termine dovuto alla sorgente termica superficiale, che Sparks in [7] scrive

$$(1.2) \quad S(x) = \frac{1}{\delta} q_s H(\delta - x),$$

dove q_s è il flusso di potenza assorbito, H la funzione di Heaviside e δ lo spessore di penetrazione dell'onda. Nel limite in cui $\delta \rightarrow 0$, $S(x)$ può porsi nella forma:

$$(1.3) \quad S_0(x) = q_s \delta(x),$$

dove $\delta(x)$ è la distribuzione δ di Dirac con origine in $x = 0$.

Alla (1.1) sono inoltre associate in [7] le seguenti condizioni ini-

⁽²⁾ Questo semplice modello unidimensionale costituisce una rappresentazione sufficientemente fedele della realtà, quando la dimensione lineare dell'area irraggiata D , lo spessore del solido l e la profondità di penetrazione δ dell'onda soddisfano $\delta \ll l \ll D$.

ziale e al contorno:

$$(1.4)_1 \quad \theta(x, t) = \theta_0, \quad x \geq 0, t = 0,$$

$$(1.4)_2 \quad \theta_x(x, t) = 0, \quad x = 0, t \geq 0.$$

Nel paragrafo successivo scriveremo le equazioni che reggono la diffusione del calore in un conduttore irradiato di forma qualunque e le condizioni al contorno che esse devono soddisfare. Nel n. 3, daremo una dimostrazione rigorosa dell'equazione di diffusione (1.1), mostrando che la teoria classica dell'elettromagnetismo prevede per il termine di sorgente presente in essa un andamento esponenziale decrescente ⁽³⁾, che si riduce ugualmente a $S_0(x)$ nel limite $\delta \rightarrow 0$.

2. Equazione di diffusione per un conduttore irradiato.

Sia B un corpo sensibilmente indeformabile investito da radiazione elettromagnetica e si supponga che la portata delle sorgenti radiative indotte sia trascurabile. Per un tal corpo l'energia totale può pensarsi decomposta nei contributi di origine interna ed elettromagnetica. Pertanto, se in B non sono presenti sorgenti termiche autonome, l'equazione di bilancio dell'energia ⁽⁴⁾ si scrive:

$$(2.1) \quad \rho \dot{e} + \rho \dot{e}^{em} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0,$$

dove e ed e^{em} sono rispettivamente la densità di energia interna ed elettromagnetica, $\mathbf{q}$ il flusso di calore e ρ la densità di massa. Se si separa il flusso $\mathbf{q}$ in una componente dovuta alla conduzione $\mathbf{q}^c$ ed in una di natura radiativa $\mathbf{q}^R$:

$$(2.2) \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^c + \mathbf{q}^R,$$

e si usa la legge costitutiva di Fourier per il flusso di conduzione:

$$(2.3) \quad \mathbf{q}^c = -k \operatorname{grad} \theta,$$

⁽³⁾ In appendice al lavoro [7], Sparks nota, senza darne giustificazione, che per un metallo l'andamento esponenziale del termine di sorgente è più realistico di quello a gradino (v. [7], p. 849).

⁽⁴⁾ Vedi p. es. [5], Cap. II, n. 1.

la (2.1) assume la forma seguente:

$$(2.4) \quad \varrho \dot{e} + \varrho \dot{e}^{em} + \operatorname{div} \mathbf{q}^R - k \Delta \theta = 0.$$

Inoltre il flusso radiativo $\mathbf{q}^R$ coincide con il vettore di Poynting. Pertanto, indicando con $\mathbf{E}$ il campo elettrico associato all'onda assorbita e con $\mathbf{J}$ la densità di corrente di conduzione da esso generata, sussiste l'equazione classica (cfr. [4], p. 236 e sgg.):

$$(2.5) \quad \varrho \dot{e}^{em} + \operatorname{div} \mathbf{q}^R = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J},$$

dove il termine $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ rappresenta la densità di potenza elettromagnetica convertita in potenza termica per effetto Joule. Introducendo la (2.5) nella (2.4), si ottiene:

$$(2.6) \quad \varrho \dot{e} - k \Delta \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}.$$

Se si suppone inoltre che il calore specifico a volume costante c_v sia indipendente dalla temperatura, la (2.6) diventa:

$$(2.7) \quad \varrho c_v \dot{\theta} - k \Delta \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J},$$

dove, poichè il corpo è indeformabile, la derivata temporale di θ può scriversi equivalentemente in forma euleriana:

$$(2.8) \quad \varrho c_v \theta_t - k \Delta \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}.$$

Se, in particolare, B è anche conduttore dell'elettricità e per esso vale la relazione costitutiva di Ohm:

$$(2.9) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E},$$

dove σ è la conducibilità elettrica, l'eq. (2.8) assume la forma seguente:

$$(2.10) \quad \varrho c_v \theta_t - k \Delta \theta = \sigma E^2.$$

Poichè il periodo di oscillazione dell'onda elettromagnetica è cer-

tamente molto minore del tempo caratteristico in cui si producono variazioni sensibili del campo di temperatura, nella (2.10) il termine σE^2 può essere sostituito dal valor medio $\sigma \langle E^2 \rangle$, relativo ad un periodo dell'onda:

$$(2.11)_1 \quad \varrho c_v \theta_t - k \Delta \theta = \sigma \langle E^2 \rangle.$$

A questa equazione va associata l'equazione di evoluzione per il campo elettrico ⁽⁵⁾:

$$(2.11)_2 \quad \Delta \mathbf{E} - \frac{4\pi\mu_c\sigma}{c^2} \mathbf{E}_t = 0,$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto e μ_c la permeabilità magnetica del conduttore. Le eq. (2.11)_{1,2} vanno, infine, corredate dalle seguenti condizioni iniziale ed al contorno:

$$(2.11)_3 \quad \theta(\mathbf{x}, t) = \theta_0, \quad \mathbf{x} \in B, \quad t = 0,$$

$$(2.11)_4 \quad \frac{d}{dn} \theta(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial B, \quad t \geq 0 \quad (6),$$

per il campo di temperatura, e dalla condizione al contorno ⁽⁷⁾:

$$(2.11)_5 \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{8\pi\sigma}} (1 - i) \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_{\parallel}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial B, \quad t \geq 0,$$

per il campo elettrico (v. [4], p. 337), dove $\mathbf{n}$ è la normale esterna a ∂B , $\mathbf{H}_{\parallel}$ la componente tangenziale del campo magnetico esterno a B ed ω la frequenza dell'onda incidente.

⁽⁵⁾ L'equazione obbedita dal campo elettrico interno al conduttore si scrive nella forma (2.11)₂ se nell'equazione di Ampère-Maxwell si trascura la corrente di spostamento rispetto alla corrente di conduzione.

⁽⁶⁾ Essendo il flusso di conduzione al contorno nullo.

⁽⁷⁾ Tutte le formule relative ai campi elettromagnetici interni a B si intendono valide nell'approssimazione di buon conduttore, definita da $4\pi\sigma/\omega\epsilon_c \gg 1$, dove ϵ_c è la costante dielettrica del mezzo.

3. Caso unidimensionale.

Le eq. (2.11), applicate al caso unidimensionale considerato nel n. 1, diventano:

$$(3.1)_1 \quad \varrho c_v \theta_t - k \theta_{xx} = \sigma \langle E^2 \rangle (x),$$

$$(3.1)_2 \quad \mathbf{E}_{xx} - \frac{4\pi\mu_c\sigma}{c^2} \mathbf{E}_t = \mathbf{0},$$

$$(3.1)_3 \quad \theta(x, t) = \theta_0, \quad x \geq 0, \quad t = 0,$$

$$(3.1)_4 \quad \theta_x(x, t) = 0, \quad x = 0, \quad t \geq 0,$$

$$(3.1)_5 \quad \mathbf{E}(x, t) = \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{8\pi\sigma}} (1 - i) \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}(x, t), \quad x = 0, \quad t \geq 0,$$

dove $\mathbf{H}(0, t)$ è il campo magnetico dell'onda incidente calcolato sulla superficie del conduttore ⁽⁸⁾. Si prova facilmente (v. anche [4], n. 8.1) che l'eq. (3.1)₂ ammette la soluzione:

$$(3.2) \quad \mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{-x/\delta} e^{ix/\delta} e^{i\omega t}, \quad \delta := \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu_c\omega\sigma}},$$

che soddisfa la condizione al contorno (3.1)₅, se si pone:

$$(3.2') \quad \mathbf{E}_0 = \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{8\pi\sigma}} (1 - i) \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_0,$$

dove $\mathbf{H}_0$ è definito da

$$(3.3) \quad \mathbf{H}_1(0, t) = \mathbf{H}_0 e^{i\omega t}.$$

Nella (3.2) il parametro δ misura lo spessore di penetrazione dell'onda nel conduttore. Poichè il campo $\mathbf{E}(x, t)$ ha dipendenza armonica dal

⁽⁸⁾ $\mathbf{H}(0, t)$ coincide con la componente tangenziale del campo magnetico interno al conduttore, per l'assenza di correnti superficiali sulla frontiera del semispazio (v. [4], eq. (8.4)).

tempo, il valor medio $\langle E^2 \rangle$ è dato da (v. [4], eq. 6.129):

$$(3.4) \quad \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*),$$

e risulta:

$$(3.5) \quad \langle E^2 \rangle(x) = \frac{\mu_c \omega}{8\pi\sigma} e^{-2x/\delta} H_0^2.$$

Introducendo la (3.2) nell'equazione di Faraday-Maxwell:

$$(3.6) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mu_c \mathbf{H}_t,$$

si perviene alla seguente espressione per il campo magnetico interno al conduttore:

$$(3.7) \quad \mathbf{H}(x, t) = \mathbf{H}(0, t) e^{-x/\delta} e^{ix/\delta} = \mathbf{H}_0 e^{-x/\delta} e^{ix/\delta} e^{i\omega t}.$$

È, ora, possibile calcolare il flusso medio di potenza associato alla radiazione che si propaga nel conduttore, applicando la formula (v. [4], eq. (6.132)):

$$(3.8) \quad \langle \mathbf{q}^R \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*),$$

che dà

$$(3.9) \quad \langle \mathbf{q}^R \rangle = -\frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{8\pi\sigma}} H_0^2 e^{-2x/\delta} \mathbf{n}.$$

Eliminando H_0^2 da (3.9) e (3.5), si ottiene, infine:

$$(3.10) \quad \sigma \langle E^2 \rangle(x) = \frac{2}{\delta} q_s e^{-2x/\delta},$$

dove q_s è il modulo di $\langle \mathbf{q}^R \rangle$ calcolato per $x = 0$, ed esprime il flusso medio di potenza irraggiata che attraversa la superficie del semispazio conduttore. In virtù di (3.10), l'equazione di diffusione (3.1) si scrive dunque:

$$(3.11) \quad \varrho c_v \theta_t - k \theta_{xx} = \frac{2}{\delta} q_s e^{-2x/\delta}.$$

Ciò prova che la forma corretta per il termine di sorgente $S(x)$ che compare nell'eq. (1.1) è:

$$(3.12) \quad S(x) = \frac{2}{\delta} q_s e^{-2x/\delta},$$

e poichè, nel limite $\delta \rightarrow 0$, la (3.12) può considerarsi una buona rappresentazione della distribuzione δ di Dirac (normalizzata a q_s), la (3.11) si riconduce all'equazione applicata da Sparks in [7].

Appendice

In un lavoro in corso di pubblicazione [6], T. Manacorda presenta una teoria della radiazione interna in un corpo basata sugli assiomi classici della termomeccanica dei continui (v. [1]-[3]). Si prova, in tale teoria, che accanto all'equazione di bilancio dell'energia totale:

$$(1) \quad \rho \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \text{grad } \mathbf{v} - \text{div } \mathbf{q} + \rho r,$$

dove $\mathbf{T}$ è il tensore degli sforzi, $\mathbf{v}$ la velocità, $\mathbf{q}$ il vettore di propagazione dell'energia, di origine sia interna che esterna, r la densità delle sorgenti interne e di origine esterna, esiste un'equazione di bilancio del tipo

$$(2) \quad \rho \dot{e}^i = -\text{div } \mathbf{q}^i - \rho f.$$

In questa e^i è l'energia interna nel punto $\mathbf{x}$ relativa all'azione a distanza di tutte le altre particelle del corpo, $\mathbf{q}^i$ è la densità di flusso di energia dovuto alle particelle del corpo diverse da $\mathbf{x}$, mentre ρf è un termine di sorgente che misura l'energia irradiata da $\mathbf{x}$ che lascia il corpo ⁽⁹⁾. La (2) rappresenta un'equazione di bilancio per l'energia mutua tra le particelle del corpo.

Sottraendo membro a membro (2) da (1), si ottiene:

$$(3) \quad \rho \dot{e}^M := \rho(\dot{e} - \dot{e}^i) = \mathbf{T} \cdot \text{grad } \mathbf{v} - \text{div } \mathbf{q}^i + \rho r^i + \rho f,$$

⁽⁹⁾ In [6] si prova che f ha la forma $\int_{\partial B} \mathbf{q}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\sigma_y$, dove $\mathbf{q}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ rappresenta il flusso di energia che il punto $\mathbf{y}$ riceve da $\mathbf{x}$.

in cui $\mathbf{q}^l$ è il flusso totale di energia dovuto all'esterno ed r^l è la densità di sorgenti di origine esterna. Si può suddividere $\mathbf{q}^l$ in flusso di energia termica e radiativa, ponendo

$$(4) \quad \mathbf{q}^l = \mathbf{q}^c + \mathbf{q}^R.$$

Per $\mathbf{q}^R$ sussiste l'equazione di bilancio di Poynting:

$$(2.5) \quad \rho \dot{e}^{em} + \operatorname{div} \mathbf{q}^R = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}.$$

Pertanto, sostituendo nelle (3) ed assumendo, com'è naturale nel caso in esame, $r^l = 0$, si ottiene

$$\rho \dot{e}^M = \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q}^c + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \rho \dot{e}^{em} + \rho f,$$

ed infine

$$(5) \quad \rho(\dot{e}^M - \dot{e}^{em}) = \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q}^c + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \rho f.$$

Se il mezzo è sensibilmente indeformabile, risulta $\mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \simeq 0$, mentre è naturale assumere $f = 0$.

Si ottiene, in definitiva

$$(6) \quad \rho \dot{e} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \operatorname{div} \mathbf{q}^c, \quad \dot{e} := \dot{e}^M - \dot{e}^{em}.$$

Basta ora assumere $\mathbf{q}^c = -k \operatorname{grad} \theta$ per ottenere la (2.6).

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. E. GURTIN - W. O. WILLIAMS, *On the First Law of Thermodynamics*, Arch. Rat. Mech. An., **42** (1971), pp. 77-92.
- [2] M. E. GURTIN - W. O. WILLIAMS, *On Continuum Thermodynamics with Mutual Body Forces and Internal Radiation*, ZAMP, **22** (1971), pp. 293-298.
- [3] M. E. GURTIN, *Modern Continuum Thermodynamics*, in «Mechanics Today», vol. 1, pp. 168-213, Pergamon Press, New York, 1972.
- [4] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1975.

- [5] T. MANACORDA, *Introduzione alla Termomeccanica dei Continui*, Pitagora Editrice, Bologna, 1979.
- [6] T. MANACORDA, *Teoria Macroscopica della Radiazione Interna nei Continui*, in corso di pubblicazione.
- [7] M. SPARKS, *Theory of Laser Heating of Solids: Metals*, J. Appl. Phys., **47** (1976), pp. 837-849.

Manoscritto pervenuto alla redazione il 7 giugno 1982.