

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO NARDINI

**Problemi di magnetodinamica in un fluido conduttore
soggetto a compressione crescente**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 68 (1982), p. 63-70

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__63_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Problemi di magnetodinamica in un fluido conduttore soggetto a compressione crescente.

RENATO NARDINI (*)

1. Introduzione e Riassunto.

Nel 1965 M. Primicerio ha studiato [1] l'andamento del campo magnetico in un fluido omogeneo, compressibile, non viscoso ed elettricamente conduttore che occupa il dominio $\mathcal{D}(t)$, variabile col tempo, limitato da due piani paralleli perfettamente conduttori, di cui uno Σ è fisso e l'altro Σ_1 trasla verso il primo con velocità costante perpendicolare alla giacitura comune a Σ e Σ_1 ; è presente inizialmente un campo magnetico \mathbf{H}_0 assegnato avente direzione costante parallela ai due piani e intensità dipendente solo dalla loro distanza. È così schematizzato un fenomeno che talvolta si utilizza in fisica del plasma per ottenere campi magnetici molto intensi: essendo infatti nullo il flusso del campo magnetico attraverso i due piani, nel volume da essi limitato e che via via si riduce, le linee di campo risulteranno sempre più compresse e quindi l'intensità aumenterà progressivamente.

Nella presente nota si studia lo stesso problema prendendo però in considerazione valori di \mathbf{H}_0 aventi simmetria assiale: scelto un sistema di coordinate cilindriche r, θ, z con l'asse z perpendicolare ai piani (orientata da Σ_1 a Σ) e con l'origine sul piano fisso, indicato con \mathbf{k} il versore dell'asse z , la traslazione di Σ_1 avvenga con velocità costante $w\mathbf{k}$ ($w > 0$). Dopo aver introdotto il problema (n. 2), si sup-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università - Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

pone (n. 3) che \mathbf{H}_0 sia ottenuto, secondo lo schema di Biot e Savart, mediante una corrente elettrica continua di intensità costante che percorre un filo rettilineo illimitato normale a Σ e Σ_1 . Si considera poi (n. 4) il caso in cui \mathbf{H}_0 è radiale.

2. Impostazione del problema.

Detto \mathbf{H} il campo magnetico, \mathbf{v} la velocità delle particelle del fluido, ρ la sua densità, η supposta costante la sua viscosità magnetica (è $\eta = 1/\mu\sigma$, dove μ è la permeabilità magnetica e σ la conducibilità elettrica), ci serviamo dell'equazione

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \eta \nabla^2 \mathbf{H},$$

che abitualmente si ricava dalle equazioni della magnetofluidodinamica galileiana nella quale, com'è noto, si trascurano la corrente elettrica di spostamento e la densità di carica elettrica spaziale. Ovviamente deve essere anche

$$(2) \quad \text{div} \mathbf{H} = 0.$$

Com'è stato fatto in [1], supponiamo che all'istante iniziale la densità del fluido sia costante ed uguale a ρ_0 e inoltre supporremo che la compressione graduale del fluido avvenga in maniera quasi-statica, ossia attraverso successivi stati di equilibrio in modo che la densità ρ risulti funzione solo del tempo. Allora alle (1) e (2) potremo associare soltanto l'equazione di continuità che, essendo $\rho = \rho(t)$, avrà la forma

$$(3) \quad \text{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Quali condizioni al contorno su Σ e Σ_1 supposti, come si è detto, perfettamente conduttori dell'elettricità, avremo [2]

$$(4) \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \times \mathbf{k} = 0.$$

Quale condizione iniziale, che riguarda il campo $\mathbf{H}(P, t)$ con $P \in \mathcal{D}(t)$,

supporremo di assegnare

$$(5) \quad \mathbf{H}(P, 0) = \mathbf{H}_0(P) \quad \text{con } P \in \mathcal{D}(0).$$

3. Caso di \mathbf{H}_0 secondo lo schema di Biot e Savart.

Supponiamo che \mathbf{H}_0 sia generato da una corrente continua che percorre con intensità costante i un filo rettilineo illimitato di raggio $\varepsilon > 0$ disposto secondo l'asse z ; tale filo sarà supposto isolato elettricamente sia da Σ che da Σ_1 . Detto \mathbf{u}_θ il versore delle linee θ , la (5) sarà specificata da

$$(6) \quad \mathbf{H}_0 = \frac{i}{2\pi r} \mathbf{u}_\theta \quad (r > \varepsilon).$$

Verifichiamo che per il problema introdotto al n. 2 è possibile la soluzione particolare per cui è

$$(7) \quad H_r = H_z = 0, \quad H_\theta = H_\theta(r, \theta, t);$$

$$v_r = v_\theta = 0, \quad v_z = v_z(r, \theta, z, t).$$

Osserviamo che le (4) sono certamente soddisfatte e che la (2) diventa

$$(8) \quad \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} = 0;$$

da (3) si ricava

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{d}{dt} \log \varrho$$

ossia, integrando,

$$(9) \quad v_z = -z \frac{d}{dt} \log \varrho + f(r, \theta, t)$$

con f funzione arbitraria, che deve essere identicamente nulla in quanto sul piano fisso Σ , cioè per $z = 0$, deve essere $v_z = 0$. D'altra parte su Σ_1 , la cui equazione è $z = -z_0 + wt$ (con $z_0 > 0$), deve essere

$v_z = w$, per cui la (9) diventa

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \log \varrho = \frac{1}{t_1 - t} \quad (t_1 = z_0/w);$$

tenendo conto del valore iniziale di ϱ , si ha perciò

$$(11) \quad \varrho = \frac{\varrho_0 t_1}{t_1 - t}, \quad v_z = -\frac{z}{t_1 - t}.$$

È immediato verificare che è $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, com'era prevedibile. Naturalmente il fenomeno sarà studiato solo per

$$t \in [0, t_1[, \quad z \in [-z_0 + wt, 0].$$

Volendo ora utilizzare la (1), osserviamo che, in base alle (2), (7), (8) e (11₂) si ha

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\text{rot rot } \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r H_\theta}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\theta, \quad \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = -H_\theta \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{u}_\theta.$$

Pertanto dalle tre equazioni scalari deducibili dalla (1) la sola che non si riduce ad un'identità è

$$(12) \quad \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = \frac{1}{t_1 - t} H_\theta + \eta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r H_\theta}{\partial r} \right) \quad (r > \varepsilon),$$

che va risolta con la condizione iniziale (6). Per la (12) consideriamo la soluzione particolare

$$H_\theta = \frac{1}{r} \Phi(t)$$

che è in accordo con le (8) e (6); quest'ultima ci dà

$$\Phi(0) = \frac{i}{2\pi},$$

mentre $\Phi(t)$ deve soddisfare all'equazione

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{t_1 - t} \Phi(t)$$

identica alla (10). Si conclude che la soluzione particolare considerata è

$$(13) \quad \mathbf{H}(r, t) = \frac{it_1}{2\pi r(t_1 - t)} \mathbf{u}_\theta,$$

per cui H_θ per $t \in [0, t_1[$ ha lo stesso andamento temporale di ϱ , mentre la dipendenza da r è quella del campo di Biot e Savart. È da notare anche che la soluzione ricavata non dipende dal valore della viscosità magnetica η ; osserviamo che per $\eta = 0$ la (12) si può scrivere nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \log H_\theta = \frac{1}{t_1 - t}$$

per la quale la (13) è l'unica soluzione possibile.

4. Caso di H_θ radiale.

Sempre supponendo

$$v_r = v_\theta = 0$$

e restando quindi valide le (11), ci limiteremo al caso in cui sia

$$H_\theta = H_z = 0, \quad H_r = H_r(r, z, t).$$

Dalla (2) si ottiene allora

$$\frac{\partial(rH_r)}{\partial r} = 0$$

da cui segue

$$(14) \quad H_r = \frac{1}{r} \Phi(z, t) \quad (r > \varepsilon)$$

con Φ da determinare.

Detto \mathbf{u}_r il versore delle linee r , nella (1) si ha allora

$$(15) \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} \mathbf{u}_r, \quad \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = - \frac{\partial(v_z H_r)}{\partial z} \mathbf{u}_r.$$

Considereremo il caso in cui nella (5) \mathbf{H}_0 sia radiale della forma

$$(16) \quad \mathbf{H}_0 = \frac{1}{r} \varphi(z) \mathbf{u}_r \quad (r > \varepsilon; z \in [-z_0, 0])$$

essendo $\varphi(z)$ una funzione assegnata. Tenendo conto delle (11₂), (14) e (15), si ha un'unica equazione scalare (dove non compare la variabile r)

$$(17) \quad \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{t_1 - t} \Phi(z, t) + \frac{z}{t_1 - t} \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 \Phi(z, t)}{\partial z^2}$$

con

$$t \in]0, t_1[, \quad z \in]-z_0 + wt, 0[,$$

che va risolta con la condizione iniziale

$$\Phi(z, 0) = \varphi(z)$$

dedotta dalle (14) e (16). Per quanto riguarda le condizioni al contorno, osserviamo che la (4₁) è soddisfatta, mentre la (4₂) impone che sia

$$(18) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=-z_0+wt} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0.$$

Poichè la (4₂) deve valere anche per \mathbf{H}_0 espresso dalla (16), si ha

$$(19) \quad \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)_{z=-z_0+wt} = \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)_{z=0} = 0.$$

Una soluzione particolare immediata è fornita da $\varphi(z) = C$ (costante) che soddisfa senz'altro le (19), è compatibile con la condizione $\partial \Phi / \partial z = 0$ e quindi dà immediatamente la soluzione

$$(20) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(r, t) = \frac{Ct_1}{r(t_1 - t)} \mathbf{u}_r,$$

valida qualunque sia la viscosità magnetica η .

Volendo invece mantenere per la Φ la dipendenza anche dalla z ,

segundo [1] si può nella (17) porre

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{t_1 - t} U(z, t)$$

ottenendo che la nuova funzione incognita $U(z, t)$ deve soddisfare al problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{z}{t_1 - t} \frac{\partial U}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad z \in]-z_0 + wt, 0[; t \in]0, t_1[\\ \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=-z_0+wt} = 0 \quad t \in]0, t_1[\\ U(z, 0) = t_1 \varphi(z) \quad z \in]-z_0, 0[, \end{array} \right.$$

dove la $\varphi(z)$ è la funzione assegnata nella (16).

Se poi si opera anche il seguente cambiamento delle variabili indipendenti

$$z' = \frac{t_1 z}{t_1 - t} \quad t' = \frac{t_1^2}{t_1 - t} - t_1 \quad (t_1 = z_0/w),$$

posto

$$T < t_1, \quad T^* = \frac{t_1^2}{t_1 - T} - t_1,$$

il problema in questione si riconduce al seguente noto problema [3] di diffusione del calore relativo a un dominio non variabile col tempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t'} = \eta \frac{\partial^2 U}{\partial z'^2} \quad z' \in]-z_0, 0[; t' \in]0, T^*] \\ \left(\frac{\partial U}{\partial z'} \right)_{z'=-z_0} = \left(\frac{\partial U}{\partial z'} \right)_{z'=0} = 0 \quad t' \in]0, T^*] \\ U(z', 0) = t_1 \varphi(z') \quad z' \in]-z_0, 0[. \end{array} \right.$$

Nel caso infine in cui la conducibilità elettrica del fluido è tanto grande da poter essere considerata infinita nella (17) si deve porre $\eta = 0$, per cui l'equazione diventa lineare del primo ordine; in base

a una nota proprietà delle equazioni di tale tipo le soluzioni della (17) sono soluzioni anche dell'equazione ⁽¹⁾

$$(21) \quad dt = \frac{t_1 - t}{\Phi} d\Phi ;$$

da qui si ha

$$\int_0^t \frac{dt}{t_1 - t} = \int_{\Phi(z,0)}^{\Phi(z,t)} \frac{d\Phi}{\Phi}$$

e si ottiene così la soluzione

$$\Phi(z, t) = \frac{t_1}{t_1 - t} \varphi(z), \quad \text{con } \varphi(z) = \Phi(z, 0),$$

che introdotta nella (17), sempre con $\eta = 0$, per $t \rightarrow 0$ impone che sia $d\varphi(z)/dz = 0$, ossia che $\varphi(z)$ sia costante: si conclude allora che nel caso $\eta = 0$ la (20) è l'unica soluzione possibile.

⁽¹⁾ Nel caso particolare in questione la (21) può anche essere ottenuta direttamente dalla (17), in cui si faccia $\eta = 0$, moltiplicandola per dt e tenendo conto che per la (11₂) è

$$-\frac{z}{t_1 - t} dt = dz.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. PRIMICERIO, *Sulle variazioni del campo magnetico in un fluido conduttore in movimento*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **14** (1965), pp. 30-46.
- [2] G. TORALDO DI FRANCA, *Onde elettromagnetiche*, Zanichelli, Bologna, 1953, Cap. IX, § 7.
- [3] H. S. CARSLAW e J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Clarendon Press, 1959, § 36.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 aprile 1982.