RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. CARICATO

Formulazione relativa delle leggi di evoluzione di un sistema continuo in relatività generale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 68 (1982), p. 229-244

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__229_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 68 (1982)

Formulazione relativa delle leggi di evoluzione di un sistema continuo in relatività generale.

G. CARICATO (*)

Introduzione.

L'interesse fisico di una teoria delle deformazioni finite dei corpi elastici è reso manifesto, nell'ultimo decennio, dall'esigenza di trattare, per il suo tramite, problemi astrofisici quali la rivelazione della radiazione gravitazionale mediante la sua interazione con la massa di un corpo elastico e l'analisi delle proprietà delle stelle di neutroni riguardanti il comportamento meccanico delle loro croste solide. A tal proposito ricordo B. Carter e H. Quintana [1] i quali hanno calcolato la deviazione dal comportamento di un fluido perfetto per una stella di neutroni in moto stazionario che subisce una deformazione elastica per effetto di un cambiamento del momento angolare. Ricordo inoltre l'ampia trattazione della meccanica relativistica dei continui fatta da A. Bressan in un recente volume [2].

D'altra parte se l'ambiente naturale della Relatività generale è una varietà riemanniana a 4 dimensioni dotata di metrica iperbolica normale, e le leggi fisiche relativistiche sono ivi formulate utilizzando grandezze assolute, è pur vero che il fisico nel suo laboratorio, l'astronomo e l'astrofisico nei loro osservatori esaminando i fenomeni naturali operano in particolari riferimenti, ed hanno bisogno di conoscere quali legami esistono fra le grandezze assolute che intervengono nelle leggi fisiche e le grandezze relative che essi determinano con i loro

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico G. Castelnuovo, Città Universitaria, Piazzale A. Moro, 00185 Roma.

strumenti, fondate su nozioni operative di carattere spaziale o temporale. Ne consegue che acquista un senso concreto anche l'esigenza di dare una formulazione relativa delle leggi fisiche rispetto a un riferimento fisico assegnato. Per tali ragioni in questo lavoro inizierò lo studio della evoluzione relativistica di un sistema continuo rispetto a un determinato riferimento fisico, fondandomi essenzialmente su precedenti ricerche di C. Cattaneo [3] e mie [4].

1. Preliminari geometrico-cinematici. Il tensore di deformazione.

Com'è noto, lo spaziotempo ambiente dei fenomeni gravitazionali ed elettromagnetici è dato da una varietà differenziabile a 4 dimensioni nella quale, introdotto un sistema di coordinate locali x^h, sia assegnata una metrica iperbolica normale cui attribuiremo segnatura $+ + + -$. Supponiamo che la struttura riemanniana della varietà V_4 sia determinata dalla evoluzione regolare di un sistema materiale continuo $\mathscr{S}$, di cui indichiamo con $\mathscr{C}$ la configurazione generica e con $\mathscr{C}^*$ una ben determinata configurazione di riferimento che possiamo, ad esempio, far coincidere con quella assunta dal sistema $\mathscr{S}$ a un dato istante.

Il sistema di coordinate x^h introdotto sia tale che la configurazione $\mathscr{C}$ abbia equazione $x^4 = \text{cost}$ e $\mathscr{C}^*$ equazione $x^4 = 0$. Pensiamo poi introdotto in V_4 un secondo sistema di coordinate locali y^4, con $y^4 = x^4$ e y^1, y^2, y^3 coordinate della particella generica P^* di $\mathscr{C}^*$, che la particella stessa porta invariabilmente con sè durante la sua evoluzione. La corrispondenza fra i due sistemi di coordinate sarà espressa da leggi del tipo

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} x^\varrho = x^\varrho(y^1, y^2, y^3, y^4) & \varrho = 1, 2, 3 \\ x^4 = y^4 \,. \end{cases}
$$

Esse istituiscono un omeomorfismo fra le configurazioni $\mathscr{C}^*$ e $\mathscr{C}$, e permettono di descrivere per ogni punto P^* di $\mathscr{C}^*$ la corrispondente linea di corrente (o traiettoria spaziotemporale). Indichiamo con $\{L\}$ la congruenza delle linee di corrente, del genere tempo, di tutte le particelle di $\mathscr{S}$ e con $\boldsymbol{u}$ il campo di vettori di norma -1 tangenti alle linee della congruenza $\{L\}$ e rivolti verso il futuro.

Per l'invertibilità della corrispondenza (1.1) possiamo anche prendere in considerazione la trasformazione inversa

$$\text{(1.2)}\qquad \begin{cases} y^\varrho = y^\varrho(x^1, x^2, x^3, x^4) & \varrho = 1, 2, 3 \\ y^4 = x^4; \end{cases}$$

ne segue che le coordinate y^h possono essere assunte anch'esse come coordinate atte a rappresentare le particelle di $\mathscr{C}$. Chiameremo le x^h *coordinate euleriane* e le y^h *coordinate lagrangiane* del generico punto P di $\mathscr{C}$; e indicheremo con $g_{hk}(x)$ le componenti covarianti euleriane del tensore metrico di V_4 in P, con

$$\text{(1.3)}\qquad \overset{*}{g}_{hk}(y) = g_{rs}(x)\cdot\frac{\partial x^r}{\partial y^h}\frac{\partial x^s}{\partial y^k}$$

le corrispondenti componenti lagrangiane. Parimenti indicheremo, con $\overset{*}{\Gamma}{}^l_{hk}$ i simboli di Christoffel di 2ª specie in coordinate lagrangiane, e quindi legati alle corrispondenti espressioni euleriane Γ^l_{hk} dalle relazioni

$$\text{(1.4)}\qquad \overset{*}{\Gamma}{}^l_{hk} = \Gamma^n_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial y^h}\frac{\partial x^s}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial y^l}{\partial x^n} + \frac{\partial^2 x^s}{\partial y^k\,\partial y^h}\cdot\frac{\partial y^l}{\partial x^s}\,.$$

Il campo di vettori $\boldsymbol{u}$ tangenti alle linee di corrente di $\mathscr{S}$, orientati verso il futuro, avrà componenti controvarianti euleriane

$$\text{(1.5)}\qquad u^\varrho(x) = \frac{\partial_4 x^\varrho}{\sqrt{-\,\|\partial_4 P\|}}\,,\qquad u^4(x) = \frac{1}{\sqrt{-\,\|\partial_4 P\|}}\qquad \left(\partial_4 x^\varrho \equiv \frac{\partial x^\varrho}{\partial y^4}\right)$$

e componenti lagrangiane

$$\text{(1.6)}\qquad \overset{*}{u}{}^\varrho(y) = u^k\frac{\partial y^\varrho}{\partial x^k} = \delta^\varrho_4\cdot\frac{1}{\sqrt{-\,\|\partial_4 P\|}} = 0\,,\qquad \overset{*}{u}{}^4 = \frac{1}{\sqrt{-\,\|\partial_4 P\|}}$$

con

$$\text{(1.7)}\qquad \|\boldsymbol{u}\| = \overset{*}{u}{}^4\,\overset{*}{u}_4 = \overset{*}{g}_{44}(\overset{*}{u}{}^4)^2 = -1\,.$$

Osserviamo che il sistema di coordinate lagrangiane y^r verifica la circostanza seguente: lungo ogni linea di corrente del sistema $\mathscr{S}$, ossia lungo ogni linea della congruenza $\{L\}$ si ha

$$y^\varrho = \text{cost}\,, \quad \varrho = 1, 2, 3\,; \quad y^4 = \text{variabile}\,.$$

Ne consegue che il campo di vettori $\boldsymbol{u}$ ha componenti controvarianti lagrangiane

$$\overset{*}{u}{}^\varrho = 0\,, \quad \overset{*}{u}{}^4 \neq 0$$

com'è indicato in (1.6). Per tali motivi si suol dire che il sistema di coordinate y^r è *adattato alla congruenza* $\{L\}$.

D'ora in poi assumeremo localmente la congruenza $\{L\}$ come riferimento fisico rispetto al quale studieremo l'evoluzione del continuo $\mathscr{S}$, anche se l'effettiva conoscenza della congruenza medesima si ottiene soltanto quando sono determinate le leggi finite di evoluzione del sistema materiale $\mathscr{S}$.

In questo lavoro supporremo note sia la metrica di V_4 sia la congruenza $\{L\}$, e ci preoccuperemo unicamente di formulare le leggi di evoluzione di una certa classe di sistemi continui [cfr. n. 2] rispetto al riferimento fisico $\{L\}$ operando in questo con la tecnica delle proiezioni [5].

A tale scopo in ogni evento P della generica linea del riferimento fisico $\{L\}$ consideriamo lo spazio vettoriale tangente alla varietà V_4 decomposto nella somma di un sottospazio unidimensionale θ_P collineare a $\boldsymbol{u}(P)$ e di un sottospazio tridimensionale Σ_P ortogonale a $\boldsymbol{u}(P)$. Indichiamo poi con

$$\gamma_{hr} = g_{hr} + u_h u_r \quad (\gamma_{h4} \equiv 0) \tag{1.9}$$

le componenti euleriane del tensore metrico di Σ_P, noto come tensore metrico spaziale standard, e con

$$\overset{*}{\gamma}_{hr} = \overset{*}{g}_{hr} + \overset{*}{u}_h \overset{*}{u}_r \quad (\overset{*}{\gamma}_{4r} \equiv 0) \tag{1.9$'$}$$

le corrispondenti componenti lagrangiane. Indichiamo inoltre con

$$d\sigma^2 = \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta > 0\,, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \tag{1.10}$$

la norma spaziale del generico elemento lineare dP di V_4, e poniamo

$$\gamma = \det \|\gamma_{\varrho\delta}\|\,, \quad \overset{*}{\gamma} = \det \|\overset{*}{\gamma}_{\varrho\delta}\|\,. \tag{1.11}$$

Il tensore metrico γ_{hr} ci consente di definire il tensore locale di deformazione del sistema continuo $\mathscr{S}$ nello spostamento che questo subisce quando passa dalla configurazione di riferimento $\mathscr{C}^*$ alla configurazione $\mathscr{C}$.

A tale scopo indichiamo con $m_{hr}(y^1, y^2, y^3) \equiv \gamma_{hr}(y^1, y^2, y^3, 0)$ il tensore metrico spaziale standard in $\mathscr{C}^*$ e con

$$d\overset{*}{\sigma}{}^2 = m_{hr}\, dy^r\, dy^h = m_{\varrho\sigma}\, dy^\varrho\, dy^\sigma \tag{1.12}$$

la norma dell'elemento lineare dP_* di $\mathscr{C}^*$.

Premesso ciò, chiamiamo *tensore locale di deformazione* del sistema continuo $\mathscr{S}$ nello spostamento $\mathscr{C}^* \to \mathscr{C}$ il tensore simmetrico spaziale

$$\overset{*}{\varepsilon}_{hr} = \tfrac{1}{2}(\overset{*}{\gamma}_{hr} - \delta^\alpha_h \delta^\beta_r m_{\alpha\beta}) \qquad (\overset{*}{\varepsilon}_{h4} \equiv 0) \tag{1.13}$$

la cui espressione euleriana è

$$\varepsilon_{hr} = \overset{*}{\varepsilon}_{pq} \frac{\partial y^p}{\partial x^h} \frac{\partial y^q}{\partial x^r} = \frac{1}{2}\left(\gamma_{hr} - \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^h} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^r} m_{\alpha\beta}\right). \tag{1.14}$$

Osserviamo che la congruenza $\{L\}$ può essere interpretata localmente come l'insieme delle traiettorie di un gruppo di trasformazioni a un parametro il cui campo generatore è il campo di vettori $\boldsymbol{u}$; in questo ordine di idee sussistono le relazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\mathscr{L}_u g_{hr}(x) = \nabla_h u_r + \nabla_r u_h \equiv K_{hr} \\ &\mathscr{L}_u \gamma_{hr}(x) = \mathscr{P}_{\Sigma\Sigma}(K_{hr}) \equiv \tilde{K}_{hr} \\ &\mathscr{L}_u \varepsilon_{hr} \quad = \tfrac{1}{2} \mathscr{L}_u \gamma_{hr} = \tfrac{1}{2} \tilde{K}_{hr} \end{aligned}\right. \tag{1.15}$$

nelle quali l'operatore $\mathscr{L}_u$ indica la *derivata di Lie* rispetto al gruppo di trasformazioni generato dal campo di vettori $\boldsymbol{u}(x)$.

Scritte in forma lagrangiana le relazioni (1.15) diventano

$$\left\{\begin{aligned} &\mathscr{L}_u \overset{*}{g}_{hr} = \overset{*}{\nabla}_h \overset{*}{u}_r + \overset{*}{\nabla}_r \overset{*}{u}_h \\ &\mathscr{L}_u \overset{*}{\gamma}_{hr} = \overset{*}{u}{}^4 \partial_4 \overset{*}{\gamma}_{hr} \\ &\mathscr{L}_u \overset{*}{\varepsilon}_{hr} = \overset{*}{u}{}^4 \partial_4 \overset{*}{\varepsilon}_{hr} = \tfrac{1}{2} \overset{*}{u}{}^4 \partial_4 \overset{*}{\gamma}_{hr}\,. \end{aligned}\right. \tag{1.16}$$

2. Il principio di conservazione della massa di pura materia. Il tensore degli sforzi.

Cominciamo con le seguenti osservazioni:

I) L'ente geometrico-cinematico assoluto più immediato associato a un qualsiasi elemento $\mathfrak{C}$ (porzione piccolissima) del continuo $\mathscr{S}$ nella sua configurazione $\mathscr{C}$ è il *tubo elementare d'universo* $\Gamma_{\mathfrak{C}}$ che $\mathfrak{C}$ descrive durante la sua evoluzione.

II) Il *tempo relativo standard* $\tilde{t}$ di $P \in \mathfrak{C}$ è diverso in generale da quello di ogni altro evento $Q \in \mathfrak{C}$, diverso da P, in virtù della formula

$$d\tilde{t} = -\frac{1}{c} \overset{*}{u}_r \, dy^r . \tag{2.1}$$

III) In un intorno 4-dimensionale di $\mathfrak{C}$ possiamo sostituire al sistema di coordinate locali y^r un altro sistema di coordinate locali $y^{r'}$, sempre interno al riferimento fisico $\{L\}$,

$$y^{\varrho'} = y^{\varrho} , \qquad y^{4'} = y^{4'}(y^1, y^2, y^3, y^4) \tag{2.2}$$

che in P soddisfi le condizioni

$$\begin{cases} (y^{r'})_P = (y^r)_P \\ (\tilde{\partial}_\varrho y^4)_P = 0 \leftrightarrow (\partial_\varrho y^{4'})_P = -(\overset{*}{u}_\varrho \overset{*}{u}{}^4 \partial_4 y^{4'})_P , \qquad (\partial_4 y^{4'})_P \neq 0 . \end{cases} \tag{2.3}$$

Il nuovo sistema di coordinate $y^{r'}$ così ottenuto risulta tempo-ortogonale in P, ossia l'elemento d'ipersuperficie $y^{4'} =$ cost. contenente P è ortogonale a $\boldsymbol{u}(P)$ e perciò tangente a Σ_P in P. Ne segue che la trasformazione (2.2)-(2.3) può essere anche interpretata come un omeomorfismo che fa corrispondere a $\mathfrak{C}$ l'intersezione $\overline{\mathfrak{C}} \equiv \Gamma_{\mathfrak{C}} \cap \Sigma_P$, ed ogni tensore puramente spaziale definito in $\mathfrak{C}$ può essere anche interpretato come un tensore definito in $\overline{\mathfrak{C}}$: ciò soprattutto allo scopo di dedurre relazioni tensoriali valide in P.

Premesse queste osservazioni, nello spazio vettoriale tangente a V_4 in P scegliamo come quaterna di vettori base di un riferimento locale $\mathscr{R}_P$ i vettori

$$(2.4) \qquad \tilde{e}_\varrho \equiv \tilde{\partial}_\varrho P = \partial_\varrho P + \overset{*}{u}_\varrho \overset{*}{u}^4 \partial_4 P \qquad (\varrho = 1, 2, 3), \; e_4 \equiv \partial_4 P \, .$$

Potendo interpretare $\mathscr{R}_P$ come *riferimento locale di quiete istantanea* (o *di moto incipiente*) per l'elemento C, sembra lecito accettare in $\mathscr{R}_P$, proprio come in meccanica newtoniana:

a) il principio di conservazione della massa di pura materia;

b) la nozione di sforzo fra due elementi contigui del continuo $\mathscr{S}$;

c) i principi della termodinamica.

Se indichiamo con μ la densità di massa propria in $\mathscr{C}$ e con dV il volume proprio del generico elemento C di $\mathscr{C}$; con μ^* la densità di massa propria nella configurazione di riferimento $\mathscr{C}^*$, e con dV^* il volume (proprio) dell'elemento C* corrispondente di C, il *principio di conservazione della massa di pura materia* in forma lagrangiana assume la forma

$$(2.5) \qquad \mu \, dV = \mu^* \, dV^* \, .$$

Poichè valgono le formule

$$(2.6) \qquad dV = \sqrt{\overset{*}{\gamma}} \, dy^1 \, dy^2 \, dy^3 \, , \qquad dV^* = \sqrt{m} \, dy^1 \, dy^2 \, dy^3 \, ,$$

all'equazione (2.5) possiamo sostituire l'equivalente

$$(2.7) \qquad \mu \sqrt{\frac{\overset{*}{\gamma}}{m}} = \mu^* \, .$$

Quest'ultima viene poi ad assumere la forma euleriana

$$(2.8) \qquad \nabla_h(\mu u^h) = 0 \, .$$

A proposito della nozione di sforzo specifico $\boldsymbol{\phi}_n$ ci limiteremo ad ammettere in $\mathscr{R}_P$ che le azioni di contatto esplicate sulla frontiera ∂C dell'elemento C dagli elementi di $\mathscr{S}$ contigui a C medesimo siano soggette alla condizione seguente:

$$\lim_{\mathcal{C}\to P} \frac{1}{\mathcal{C}} \int_{\partial\mathcal{C}} \boldsymbol{\Phi}_n \, d\partial\mathcal{C} = \text{valore finito} \neq 0 \,. \tag{2.9}$$

Scegliamo come elemento $\mathcal{C}$ di $\mathcal{S}$ un tetraedro infinitesimo di Σ_P con un vertice in P (1) e i tre spigoli concorrenti in P paralleli ai vettori $\tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho$; indichiamo con $\boldsymbol{n} \equiv \tilde{n}^\alpha \tilde{\boldsymbol{e}}_\alpha$ un vettore del genere spazio, di norma 1, ortogonale alla 2-faccetta del tetraedro opposta al vertice P, con $\boldsymbol{\Phi}_n$ lo sforzo specifico relativo a tale 2-faccetta, e con $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}, \boldsymbol{\Phi}^{(2)}, \boldsymbol{\Phi}^{(3)}$ rispettivamente gli sforzi specifici relativi alle 2-faccette del tetraedro le cui giaciture sono quelle individuate dalle coppie $(\tilde{\boldsymbol{e}}_2, \tilde{\boldsymbol{e}}_3)$, $(\tilde{\boldsymbol{e}}_3, \tilde{\boldsymbol{e}}_1)$, $(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2)$. Posto inoltre

$$\tilde{\boldsymbol{e}}^\varrho = \gamma^{\varrho\tau} \tilde{\boldsymbol{e}}_\tau \,, \qquad \tilde{e}^\varrho = \sqrt{\|\tilde{\boldsymbol{e}}^\varrho\|} = \sqrt{\overset{*}{\gamma}{}^{\varrho\varrho}} \,, \qquad \varrho, \tau = 1, 2, 3 \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^\varrho = \boldsymbol{\Phi}^{(\varrho)} \tilde{e}^\varrho \,, \tag{2.11}$$

l'applicazione della formula (2.9) col procedimento usato nella meccanica classica in coordinate generali consente di dedurre nel generico punto P di $\mathcal{C}$ la formula di Cauchy

$$\boldsymbol{\Phi}_n(P) = \boldsymbol{\Phi}^\varrho \tilde{n}_\varrho \,, \qquad \varrho = 1, 2, 3 \,. \tag{2.12}$$

Ai prodotti scalari

$$Y^{\varrho\tau} = \boldsymbol{\Phi}^\varrho \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}^\tau \,, \qquad \varrho, \tau = 1, 2, 3 \tag{2.13}$$

diamo il nome di caratteristiche lagrangiane degli sforzi (o di tensione o dello stress).

Abbiamo così introdotto un tensore stress definito come un tensore di Σ_P, per il quale postuliamo le *relazioni di simmetria* (2)

$$Y^{\varrho\tau} = Y^{\tau\varrho} \,, \qquad \varrho, \tau = 1, 2, 3 \,. \tag{2.14}$$

(1) Propriamente dovremmo dire una porzione di $\mathcal{S}$ omeomorfa a un tetraedro infinitesimo di Σ_p; e in modo analogo dobbiamo intendere i vettori Φ_n, $\Phi^{(s)}$. Ma in virtù della precedente Osservazione II possiamo semplificare il nostro linguaggio.

(2) Questo postulato è imposto dalle equazioni gravitazionali einsteiniane.

Possiamo modificarne la definizione, sì da pensare allo stress come a un tensore puramente spaziale e simmetrico di V_4. A tale scopo introduciamo in $\mathscr{R}_P$ un tensore *simmetrico* Y^{rs} $(r, s = 1, 2, 3, 4)$ puramente spaziale rispetto al riferimento fisico $\{L\}$, le cui componenti $Y^{\varrho\tau}$ siano date dalle formule (2.13).

Tale definizione impone al tensore Y^{rs} le condizioni

$$Y^{rs}\overset{*}{u}_s = 0 \tag{2.15}$$

le quali si traducono nelle relazioni

$$Y^{\varrho 4} = -\,Y^{\varrho\tau}\frac{\overset{*}{u}_\tau}{\overset{*}{u}_4}, \qquad Y^{44} = -\,Y^{4\tau}\frac{\overset{*}{u}_\tau}{\overset{*}{u}_4} = Y^{\varrho\tau}\frac{\overset{*}{u}_\varrho\,\overset{*}{u}_\tau}{(\overset{*}{u}_4)^2}. \tag{2.16}$$

Queste relazioni mostrano che le componenti Y^{rs} dello stress sono esprimibili tutte mediante le 6 componenti distinte $Y^{\varrho\tau}$. Tale circostanza è anche posta in evidenza dalla formula

$$Y^{hr} = \left(\delta^h_\varrho - \delta^h_4\frac{\overset{*}{u}_\varrho}{\overset{*}{u}_4}\right)\left(\delta^r_\tau - \delta^r_4\frac{\overset{*}{u}_\tau}{\overset{*}{u}_4}\right)Y^{\varrho\tau}. \tag{2.17}$$

Volendo esprimere lo stress mediante le sue componenti euleriane poniamo

$$X^{rs}(x) = Y^{hk}\frac{\partial x^r}{\partial y^h}\frac{\partial x^s}{\partial y^k}. \tag{2.18}$$

Chiameremo le funzioni $X^{rs}(x)$ le *caratteristiche euleriane dello stress.*

Vedremo ora cosa potremo trarre dall'accettazione in $\mathscr{R}_P$ del 1° e del 2° principio della Termodinamica. La loro ammessa validità ci consente di limitare ogni nostra futura considerazione a quella classe di sistemi continui per i quali l'entropia specifica s, funzione caratteristica della struttura dei corpi come l'energia interna specifica u, sia dotata della proprietà seguente:

« Introdotta la scala assoluta delle temperature, in una qualunque trasformazione infinitesima di un dato corpo la corrispondente variazione di entropia coincide col rapporto fra il calore ∂q assorbito (in senso algebrico) dall'unità di massa propria del corpo medesimo e la temperatura assoluta T di tale massa ».

Questi sistemi sono chiamati *sistemi a trasformazioni reversibili.*

Per ogni elemento C di un siffatto continuo $\mathscr{S}$ ha un ruolo essenziale anche l'energia libera (o potenziale termodinamico)

$$\mathscr{F} = u - EsT \tag{2.19}$$

E indicando l'equivalente meccanico del calore. Tenendo presente che u e s sono definite a meno di una costante additiva arbitraria, il potenziale termodinamico $\mathscr{F}$ risulta definito, per ogni elemento di corpo, a meno di una funzione lineare della temperatura T.

Ricordiamo che mentre nelle trasformazioni isoterme interviene essenzialmente l'energia libera, nelle trasformazioni adiabatiche interviene l'energia interna.

Comunque in relatività generale per ogni sistema a trasformazioni reversibili occorre considerare, accanto alla *densità di energia propria di pura materia*

$$\mu c^2 , \tag{2.20}$$

una *densità di energia propria termodinamica* che indicheremo con

$$\mu w , \tag{2.21}$$

ove w rappresenta $\mathscr{F}$ nelle trasformazioni isoterme ed u nelle trasformazioni isoentropiche. Ne consegue che al corpo $\mathscr{S}$ dobbiamo attribuire una *densità di massa propria*

$$\mu\left(1 + \frac{w}{c^2}\right) . \tag{2.22}$$

Se ammettiamo inoltre che fra elementi contigui del corpo *non avvengano scambi termici*, come accade nelle trasformazioni adiabatiche o negli stati di equilibrio isotermo, e dobbiamo perciò tener conto soltanto delle azioni meccaniche di contatto, al tensore energia-impulso di un siffatto sistema continuo possiamo dare la forma euleriana

$$T^{hk} = c^2 \mu\left(1 + \frac{w}{c^2}\right) u^h u^k + X^{hk} \tag{2.23}$$

o l'equivalente forma lagrangiana

$$\overset{*}{T}{}^{hk} = c^2 \mu^* \sqrt{\frac{m}{\overset{*}{\gamma}}} \left(1 + \frac{w}{c^2}\right) \overset{*}{u}{}^h \overset{*}{u}{}^k + Y^{hk} . \tag{2.24}$$

3. L'equazione fondamentale e le condizioni al contorno.

Ricordiamo che in relatività generale il tensore energia-impulso deve avere divergenza nulla, ossia deve soddisfare l'equazione

$$\nabla_k \overset{*}{T}{}^{hk} = 0 . \tag{3.1}$$

Attribuendo a $\overset{*}{T}{}^{hk}$ l'espressione (2.23) l'equazione (3.1) assume la forma

$$\nabla_k \left[c^2 \mu \left(1 + \frac{w}{c^2}\right) \overset{*}{u}{}^h \overset{*}{u}{}^k + Y^{hk} \right] = 0 \tag{3.2}$$

donde segue, con ovvie trasformazioni e in virtù di (2.8),

$$\nabla_k \overset{*}{T}{}^{hk} = (c^2 + w) \mu \overset{*}{u}{}^k \nabla_k \overset{*}{u}{}^h + \mu \overset{*}{u}{}^h \overset{*}{u}{}^k \nabla_k w + \nabla_k Y^{hk} = 0 . \tag{3.3}$$

Approfondiremo ora il senso di questa equazione valutandone le proiezioni spaziale e temporale. A tale scopo, posto

$$\overset{*}{S}_r = \overset{*}{\gamma}_{rh} \nabla_k \overset{*}{T}{}^{hk} , \qquad \overset{*}{N}_r = - \overset{*}{u}_r \overset{*}{u}_h \nabla_k \overset{*}{T}{}^{hk} \tag{3.4}$$

cominciamo a interessarci dell'equazione

$$\overset{*}{S}_r = 0 \qquad (\overset{*}{S}_4 \equiv 0) . \tag{3.5}$$

In virtù della condizione

$$\overset{*}{\gamma}_{rh} \overset{*}{u}{}^h = 0 \tag{3.6}$$

da (3.5) deduciamo

$$\overset{*}{S}_r \equiv \mu (c^2 + w) \overset{*}{u}{}^k \overset{*}{\gamma}_{rh} \nabla_k \overset{*}{u}{}^h + \overset{*}{\gamma}_{rh} \nabla_k Y^{hk} = 0 . \tag{3.7}$$

Tenendo conto inoltre delle identità (cfr. [5])

$$(3.8)\qquad \begin{cases} \nabla_k u^h = \frac{1}{2}(K_k{}^h + \Omega_k{}^h)\,, \qquad C_r \equiv u^h \nabla_h u_r \qquad (C_4 \equiv 0) \\ u^k \gamma_{rh} K_k{}^h = C_r\,, \qquad u^k \gamma_{rh} \Omega_k{}^h = C_r \\ \overset{*}{\gamma}_{rh} \nabla_k Y^{hk} = \tilde{\nabla}_k Y_r{}^k + \overset{*}{C}_\tau Y_r{}^\tau \end{cases}$$

l'equazione (3.7) diventa

$$(3.9)\qquad \overset{*}{S}_\varrho \equiv \mu\left(1 + \frac{w}{c^2}\right) c^2 \overset{*}{C}_\varrho + \overset{*}{C}_\tau Y_\varrho{}^\tau + \tilde{\nabla}_\tau Y_\varrho{}^\tau = 0 \qquad (S_4 \equiv 0)\,.$$

Osserviamo che la 4-velocità assoluta

$$(3.10)\qquad U^h = \frac{dx^h}{d\tau} \qquad h = 1, 2, 3, 4$$

della generica particella del corpo $\mathscr{S}$ può essere anche scritta nella forma

$$(3.11)\qquad U^h = c u^h;$$

di conseguenza la 4-accelerazione assoluta diventa

$$(3.12)\qquad A^h \equiv \frac{DU^h}{d\tau} = \nabla_r U^h \frac{dx^r}{d\tau} = c^2 u^r \nabla_r u^h = c^2 C^h\,.$$

Pertanto all'equazione (3.9) possiamo dare l'espressione seguente:

$$(3.13)\qquad \mu\left(1 + \frac{w}{c^2}\right) \overset{*}{A}_\varrho = -\overset{*}{C}_\tau Y_\varrho{}^\tau - \tilde{\nabla}_\tau Y_\varrho{}^\tau\,.$$

È spontaneo fare un confronto fra l'equazione ora ottenuta e la 1ª equazione vettoriale indefinita della meccanica classica dei continui:

$$(3.14)\qquad \mu a_\varrho = \mu \overset{*}{g}_\varrho - \frac{\partial X_\varrho{}^\tau}{\partial x^\tau}\,.$$

Alla densità di pura materia presente nel caso classico corrisponde in relatività generale una densità di massa propria che include anche la massa dell'energia termodinamica; la divergenza spaziale dello stress è formalmente comune nei due casi; al vettore della forza di massa $\mu \overset{*}{g}_\varrho$ corrisponde in relatività una 4-forza del genere spazio agente sul generico elemento del continuo,

$$-\overset{*}{C}_\tau \, Y_\varrho{}^\tau$$

che esprime l'interazione fra lo stress e il riferimento fisico. Questo confronto induce ad ammettere che sul generico elemento C del corpo $\mathscr{S}$, tutto interno a $\mathscr{C}$, in un riferimento locale di moto incipiente, agiscano una 4-*forza d'inerzia*, una 4-*forza d'interazione*, e sul contorno $\partial\mathrm{C}$ uno *stress*, i cui rispettivi vettori

$$-\mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\overset{*}{A}_r\,, \qquad -\overset{*}{C}_k\, Y_r{}^k\,, \qquad \boldsymbol{\Phi}_n \tag{3.15}$$

sono tutti puramente spaziali.

Se ora consideriamo l'equazione di carattere integrale

$$-\int_{\mathrm{C}}\left[\mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\overset{*}{A}{}^\varrho \tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho + \overset{*}{C}_\tau\, Y^{\varrho\tau}\tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho\right] d\mathrm{C} + \int_{\partial\mathrm{C}} \boldsymbol{\Phi}_n\, d\partial\mathrm{C} = 0\,, \tag{3.16}$$

l'applicazione della formola di Cauchy (2.12) e del teorema della divergenza permettono di verificare che dall'eq. (3.16) segue l'espressione lagrangiana dell'equazione (3.13). Infatti valendo la relazione

$$\int_{\partial\mathrm{C}} \boldsymbol{\Phi}_n\, d\partial\mathrm{C} = \int_{\partial\mathrm{C}} \boldsymbol{\Phi}^\varrho \tilde{n}_\varrho\, d\partial\mathrm{C} = \tag{3.17}$$

$$= -\int_{\mathrm{C}} \frac{1}{\sqrt{\overset{*}{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial y^\varrho}\left(\sqrt{\overset{*}{\gamma}}\,\boldsymbol{\Phi}^{(\varrho)}\right) d\mathrm{C} = -\int_{\mathrm{C}} \tilde{\nabla}_\varrho\, Y^{\varrho\tau}\cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_\tau\, d\mathrm{C}\,,$$

l'equazione (3.16) diventa

$$-\int_{\mathrm{C}}\left[\mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\overset{*}{A}_\varrho + \overset{*}{C}_\tau\, Y_\varrho{}^\tau + \tilde{\nabla}_\tau\, Y_\varrho{}^\tau\right]\tilde{\boldsymbol{e}}^\varrho\, d\mathrm{C} = 0\,. \tag{3.18}$$

Poichè quest'ultima sussiste comunque C sia scelto in $\mathscr{C}$, da essa segue l'equazione locale

$$\mu\left(1+\frac{w}{c^2}\right)\overset{*}{A}_\varrho = -\overset{*}{C}_\tau Y_\varrho{}^\tau - \tilde{\nabla}_\tau Y^{\varrho\tau}, \tag{3.19}$$

ossia proprio l'equazione lagrangiana (3.13). Per tali motivi l'equazione (3.13) o l'equivalente (3.19) sarà chiamata l'*equazione fondamentale* (o la *1ª equazione vettoriale indefinita*) *della meccanica relativistica dei continui*, e l'equazione (3.16) sarà indicata come la *1ª equazione cardinale della meccanica relativistica dei continui*. Chiameremo inoltre *2ª equazione vettoriale indefinita della meccanica relativistica dei continui* le relazioni di simmetria (2.14), ponibili anche nella forma

$$Y^{\varrho\tau}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_\varrho \wedge \tilde{\boldsymbol{e}}_\tau = 0\,, \tag{3.20}$$

giacchè quest'ultima nel caso classico ha proprio tale denominazione.

In modo analogo a come si fa nel caso classico, dalla 1ª equazione cardinale possiamo dedurre facilmente le condizioni al contorno quando conosciamo la densità di 4-forza (o 4-forza specifica) $\boldsymbol{F}(Q)$, $\forall Q \in \partial\mathscr{C}$.

a) Se indichiamo con $\boldsymbol{f}(Q)$ la proiezione spaziale di $\boldsymbol{F}(Q)$ sulla piattaforma locale Σ_Q, le condizioni al contorno suddette hanno la forma

$$Y^{h\tau}\tilde{n}_\tau = f^h(Q)\,, \qquad \forall Q \in \partial\mathscr{C}\,. \tag{3.21}$$

Possiamo però associare all'equazione (3.13) o (3.19) altri tipi di condizioni al contorno.

Prendiamo in considerazione le altre seguenti:

b) Sia Γ il tubo d'universo descritto dal corpo $\mathscr{S}$ lungo la sua evoluzione, a partire da una configurazione $\mathscr{C}^*$. Indicando con Q il generico evento della frontiera di Γ, $\partial\Gamma$, e con $\boldsymbol{n}_Q$ il versore della normale a $\partial\Gamma$ in Q orientata verso l'interno di Γ, supponiamo note le equazioni delle linee orarie descritte dai punti di $\partial\mathscr{C}^*$:

$$x^h(y_{Q^*}, y^4) = \varphi^h(y_{Q^*}, y^4)\,. \tag{3.22}$$

c) Potremmo anche limitarci ad assegnare dati relativi soltanto alla configurazione iniziale $\mathscr{C}$ di $\mathscr{S}$: parleremmo in tal caso più propriamente di *condizioni iniziali.*

Ammesso che la configurazione $\mathscr{C}^*$ sia rappresentata in V_4 da un'equazione del tipo

$$x^4 = y^4 = 0\,, \tag{3.23}$$

date ad arbitrio due terne di funzioni regolari delle y^ϱ,

$$\xi^\alpha(y^1, y^2, y^3)\,, \qquad \eta^\alpha(y^1, y^2, y^3) \tag{3.24}$$

con l'unico vincolo che, posto

$$\eta^4 \equiv 1\,, \tag{3.25}$$

il campo di vettori η^h sia del genere tempo, e perciò verifichi la limitazione

$$m_{hk}\eta^h\eta^k < 0\,, \tag{3.26}$$

imponiamo alle funzioni incognite $x^\varrho(y)$, soluzioni dell'equazione fondamentale (3.13), di soddisfare sull'ipersuperficie iniziale $\mathscr{C}^*$ le relazioni

$$\begin{cases} [x^\alpha(y)]_{y^4=0} = \xi^\alpha(y^1, y^2, y^3) \\ [\partial_4 x^\alpha]_{y^4=0} = \eta^\alpha(y^1, y^2, y^3) \end{cases} \tag{3.27}$$

che in termini fisici equivalgono ad assegnare in $\mathscr{C}^*$ posizione e 4-velocità di ogni particella del corpo $\mathscr{S}$.

Dedotto ciò che era possibile, in generale, dall'equazione (3.5) prendiamo in esame la proiezione temporale dell'equazione (3.3), ossia l'equazione

$$\overset{*}{N}_r \equiv -\,\overset{*}{u}_r\,\overset{*}{u}_h \nabla_k \overset{*}{T}{}^{hk} = 0\,. \tag{3.28}$$

Tenendo presenti le condizioni [cfr. (1.7), (2.15)]

$$\begin{cases} \nabla_k(\overset{*}{u}{}^h\,\overset{*}{u}_h) = 2\overset{*}{u}_h \nabla_k\,\overset{*}{u}{}^h = 0 \\ \overset{*}{u}_h \nabla_k\, Y^{hk} = -\,\frac{1}{2}\, Y^{hk}(\nabla_h\,\overset{*}{u}_k + \nabla_k\,\overset{*}{u}_h) = -\,\frac{1}{2}\, Y^{hk}\tilde{K}_{hk} \end{cases} \tag{3.29}$$