RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. SALVADORI
F. VISENTIN

Sul problema della biforcazione generalizzata di Hopf per sistemi periodici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 68 (1982), p. 129-147

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__129_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 68 (1982)

Sul problema della biforcazione generalizzata di Hopf per sistemi periodici.

L. SALVADORI - F. VISENTIN (*)

1. Introduzione.

Consideriamo il problema della biforcazione della soluzione statica $z \equiv 0$ di un sistema differenziale T-periodico

$$(S_0) \qquad \dot{z} = f_0(t, z)\,, \qquad f_0(t, 0) \equiv 0\,,$$

in soluzioni T-periodiche dei sistemi differenziali perturbati

$$(S) \qquad \dot{z} = f(t, z)\,,$$

con f vicina ad f_0 in una opportuna topologia. Le funzioni f, f_0 si suppongono definite e continue al variare di z in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^n$ e di t in $\mathbb{R}$, periodiche in t di periodo T, e di classe C^∞ in z con derivate rispetto a z (di ogni ordine) continue in (t, z). Sia $f'_{0z}(t, 0)$ una matrice costante, C, il che può sempre ottenersi con un opportuno cambiamento della variabile z. Supponiamo che C abbia un autovalore nullo, mentre ogni altro autovalore, λ, soddisfi la condizione di non risonanza $\lambda \neq 2\pi m i/T$, $m = 0, \pm 1, \ldots$.

(*) Indirizzo degli AA.: L. SALVADORI: Dipartimento di Matematica, Libera Università di Trento, 38050 Povo (Trento); F. VISENTIN: Istituto di Matematica dell'Università di Napoli - Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli.
Lavoro svolto nell'ambito del C.N.R.: Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e Contratto n. 79.00696.01.

Questo problema è stato trattato nel caso $n = 1$ da Andronov et al. in [1], nello studio della biforcazione per sistemi autonomi piani da un'orbita periodica L_0 del sistema imperturbato ad orbite periodiche dei sistemi perturbati (cfr. anche [7]). Sotto certe condizioni, difatti, con l'uso di opportune coordinate, si può ridurre il problema a quello della biforcazione della soluzione nulla di un'equazione periodica scalare, con cui si identifica ora (S_0), in soluzioni periodiche di un'equazione scalare perturbata (S). L'orbita del sistema originario è rappresentata dalla soluzione $z \equiv 0$ di (S_0). Un importante risultato in [1], che qui esprimiamo in termini di (S_0), è che se la soluzione $z \equiv 0$ di (S_0) soddisfa una certa condizione di stabilità involgente un numero intero $k > 1$, allora: (i) il numero delle orbite periodiche biforcate vicine all'origine e relative alle funzioni f vicine ad f_0 non può superare k; (ii) per ogni $j \in \{1, \ldots, k\}$ si può determinare f arbitrariamente vicina ad f_0 tale che (S) ammetta esattamente j orbite periodiche che giacciono in un intorno arbitrariamente piccolo dell'origine. La condizione di stabilità è che l'origine di (S_0) sia k-stabile o k-instabile. Con ciò si vuole intendere (n. 2) che la soluzione nulla di (S_0) sia stabile (risp. instabile), ed inoltre che questa proprietà sia preservata rispetto alle perturbazioni di f_0 di ordine $\geqslant k$, ma non rispetto a quelle di ordine inferiore. L'una e l'altra di queste due proprietà espresse per il sistema autonomo imperturbato originario, equivalgono a richiedere che L_0 sia un ciclo limite multiplo di molteplicità k, nel senso specificato in [1].

Nel caso generale dei sistemi (S_0), (S), De Oliveira e Hale mostrano in [4], per $n \geqslant 1$ qualsiasi, con l'applicazione del metodo di Liapunov-Schmidt, che la proprietà (i) sussiste in generale quando l'ordine di molteplicità della radice $c = 0$ della funzione di biforcazione $G(c, f_0)$ è finito e che k si identifica con questo ordine. Se accanto all'autovalore semplice 0 ogni altro autovalore di C ha parte reale negativa, (S_0) ammette nello spazio (t, z) una varietà invariante attrattiva H_0 periodica in t, le cui sezioni per t fissato sono unidimensionali e tangenti in $z = 0$ all'autospazio corrispondente all'autovalore nullo di C. In [4] si mostra allora che nell'esame della proprietà (i), $G(c, f_0)$ può essere sostituita dalla funzione di biforcazione $G^*(c, f_0)$, relativa all'equazione differenziale (E_0) delle soluzioni di (S_0) giacenti su H_0. In questo caso la condizione a cui abbiamo dianzi accennato sufficiente per il verificarsi della proprietà (i), equivale alla condizione che l'origine di (E_0) sia k-stabile o k-instabile. Inoltre, anche lo studio della stabilità delle orbite biforcate viene ricondotto allo studio della funzione di biforcazione relativa ad una conveniente equazione dif-

ferenziale scalare (E). In [8] si fornisce una soluzione di questi medesimi problemi in termini della funzione spostamento $V(c, f_0)$ relativa ad un conveniente insieme di soluzioni di (S_0) o, rispettivamente, in termini delle funzioni spostamento $V^*(c, f_0)$, $V^*(c, f)$, relative ad (E_0), (E).

Nel presente lavoro si perviene ad un'analisi completa di tutte le situazioni che possono presentarsi per $n \geqslant 1$, mostrando che in ogni caso, indipendentemente da ogni ulteriore ipotesi sugli autovalori di C, il verificarsi delle proprietà (i), (ii) equivale alla condizione che l'origine di un'equazione periodica scalare (E_k) convenientemente associata ad (S_0) sia k-stabile o k-instabile. Si prova inoltre che se per ogni $k > 1$ tale condizione non è soddisfatta, allora per ogni intero $j > 0$ e per ogni intorno U di $z = 0$ si può determinare f arbitrariamente vicina ad f_0 tale che (S) ammetta esattamente j orbite periodiche giacenti in U.

Il procedimento seguito per le dimostrazioni di queste proposizioni non differisce sensibilmente da quello adottato in [2] per dimostrare proposizioni analoghe (che estendono al caso di $n > 2$ certi altri risultati di Andronov et al. relativi ai sistemi piani [1]) concernenti la biforcazione da posizioni di equilibrio in orbite periodiche quando: (1) (S_0) è autonomo; (2) C possiede una coppia di autovalori puramente immaginari $\pm i$ ed ogni altro autovalore λ soddisfa la condizione di non risonanza $\lambda \neq mi$, $m = 0, \pm 1, \ldots$. (Per $n > 2$ cfr. anche Chafee [3]). Tuttavia anche il problema trattato in [2] è riconducibile allo studio di un sistema differenziale soddisfacente le attuali ipotesi del sistema (S_0). Ciò si può ottenere attraverso un opportuno cambiamento di variabili, con l'uso di coordinate polari (r, θ) nel piano, anche se la singolarità di questa trasformazione per $r = 0$ richiede un attento esame per legittimare il trasferimento di informazioni dal sistema trasformato a quello originario.

Nello schema analitico adottato si può infine includere anche il problema della biforcazione da una posizione di equilibrio a posizioni di equilibrio quando (S_0), (S) sono autonomi. Sussistono risultati analoghi, ancora espressi mediante le proprietà di k-stabilità e k-instabilità dell'origine di un'equazione scalare costruita opportunamente a partire da (S_0) (cfr. anche Hale [5]).

I risultati ottenuti vengono illustrati attraverso la loro applicazione (n. 5) ad un sistema meccanico ad un grado di libertà, soggetto ad una sollecitazione dissipativa lineare e ad una sollecitazione di componente lagrangiana $Q(t, q) = F(q)\beta(t)$, con $F(0) = F'(0) = 0$, e $\beta(t)$ funzione

periodica. L'esempio consente di stimare l'influenza del fattore periodico $\beta(t)$ sul numero delle orbite periodiche biforcate, attraverso un'analisi dell'influenza del fattore periodico medesimo sulla stabilità della posizione di equilibrio $q = 0$.

2. Alcuni concetti di stabilità concernenti un'equazione periodica scalare.

Per $a_0 > 0$ poniamo $B(a_0) = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leqslant a_0\}$. Sia Γ_T l'insieme delle funzioni $X \in C(\mathbb{R} \times B(a_0), \mathbb{R})$, periodiche in t di periodo $T > 0$, di classe C^∞ in x e con derivate rispetto ad x (di ogni ordine) continue in (t, x). Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = X_0(t, x)\,, \tag{2.1}$$

con $X_0 \in \Gamma_T$, $X_0(t, 0) \equiv 0$, $X'_{0x}(t, 0) \equiv 0$, e sia per ogni t

$$X_{02}(t)x^2 + X_{03}(t)x^3 + \ldots \tag{2.2}$$

la serie di MacLaurin del secondo membro della (2.1). Sia $x(t, c)$ la soluzione di (2.1) di condizioni iniziali $(0, c)$, e sia $a'_0 \in (0, a_0)$ tale che $x(t, c)$ esista nell'intervallo $[0, T]$ per $c \in B(a'_0)$; diremo funzione spostamento relativa alle soluzioni di (2.1), la funzione $V^*: B(a'_0) \to \mathbb{R}$ definita da

$$V^*(c) = x(T, c) - c\,. \tag{2.3}$$

Sia $h > 1$ un intero. Per $c \in B(a'_0)$ la soluzione $x(t, c)$ di (2.1) può scriversi

$$x(t, c) = u_1(t)c + \ldots + u_h(t)c^h + o(|c|^h)\,, \tag{2.4}$$

con le u_i funzioni continue e tali che $u_1(0) = 1$, $u_i(0) = 0$ per $i = 2, \ldots, h$. Introducendo (2.4) in (2.1) si ricavano le equazioni per la determinazione delle u_i. Si ha precisamente $u_1(t) \equiv 1$ e

$$\dot{u}_i(t) = U_i(t)\,, \quad u_i(0) = 0\,, \qquad i = 2, \ldots, h\,, \tag{2.5}$$

ove ogni $U_i(t)$ si costruisce mediante le funzioni $u_1, \ldots, u_{i-1}, X_{02}, \ldots, X_{0i}$. In definitiva le $u_i(t)$ non dipendono altro che dai coefficienti dei termini

di ordine non superiore ad i della serie (2.2). Questa medesima proprietà sussiste dunque anche per le derivate, calcolate per $c = 0$, della funzione spostamento, avendosi precisamente $dV^*(0)/dc = 0$, $d^iV^*(0)/dc^i = i!u_i(T)$, $i = 2, \ldots, h$.

2.1. Definizione. Sia $h > 1$ un intero. La soluzione $x \equiv 0$ dell'equazione (2.1) si dice h-stabile (h-instabile) se

(i) per ogni $\xi \in \Gamma_T$, di ordine $> h$ in x, la soluzione $x \equiv 0$ della equazione

$$\dot{x} = X_{02}(t)x^2 + \ldots + X_{0h}(t)x^h + \xi(t, x) \tag{2.6}$$

è stabile (instabile);

(ii) la proprietà (i) non è verificata se h viene sostituito da un qualsiasi $m = 2, \ldots, h-1$.

Le proprietà di h-stabilità e h-instabilità possono essere caratterizzate per il tramite di condizioni involgenti la funzione spostamento V^* relativa all'equazione (2.1). Precisamente sussiste il seguente teorema.

2.2 Teorema. Sia $h > 1$ un intero. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la soluzione nulla di (2.1) sia h-stabile o h-instabile è che si abbia

$$d^iV^*(0)/dc^i = 0 \quad \text{per } i = 1, \ldots, h-1\,, \qquad d^hV^*(0)/dc^h = g^* \neq 0\,. \tag{2.7}$$

Inoltre la soluzione nulla di (2.1) è h-stabile se e solo se valgono le (2.7) con h dispari e $g^* < 0$.

Dimostrazione.

(u) Supponiamo che siano verificate le (2.7); proveremo allora che la soluzione $x \equiv 0$ di (2.1) è h-stabile se h è dispari e $g^* < 0$, ed è h-instabile in ogni altro caso. Dalle (2.7) segue

$$V^*(c) = (g^*/h!)c^h + o(|c|^h); \tag{2.8}$$

inoltre è possibile trovare un intorno I di $c = 0$ tale che $V^*(c) < 0$ per $c \in I$ e $c > 0$, $V^*(c) > 0$ per $c \in I$ e $c < 0$. Da ciò segue ovviamente

$$x(T, c) < c \quad \text{per } c \in I \text{ e } c > 0\,, \qquad x(T, c) > c \quad \text{per } c \in I \text{ e } c < 0\,. \tag{2.9}$$

Sia $\varepsilon \in (0, a_0')$ e sia $\delta \in (0, \varepsilon)$ tale che $|x(t, c)| < \varepsilon$ per $c \in B(\delta)$, $t \in [0, T]$, Essendo il secondo membro di (2.1) una funzione periodica di periodo T, si ha

$$x_{t_0+T}(t + T, c) = x_{t_0}(t, c) \qquad \text{per ogni } (t_0, c) \in \mathbb{R}^+ \times B(a_0') ,$$

dove $x_\theta(\cdot, c)$ è la soluzione di (2.1) di condizioni iniziali (θ, c). Risulta allora per $c \in B(\delta)$, $x(t, c') = x_T(t + T, c') = x(t + T, c)$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, con $c' = x(T, c)$. Da (2.9) segue $c' \in B(\delta)$ e $|x(t, c)| < \varepsilon$ per ogni $t \in [T, 2T]$. Iterando questo procedimento si ha in definitiva

$$|x(t, c)| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}^+ \text{ e } c \in B(\delta) . \tag{2.10}$$

Pertanto la soluzione $x \equiv 0$ di (2.1) è stabile. Analogamente si prova che, se $g^* > 0$, allora, indipendentemente dalla parità di h, la soluzione $x \equiv 0$ di (2.1) è instabile. Poichè modifiche dei termini di ordine superiore ad h nel secondo membro di (2.1) conducono per la nuova funzione spostamento agli stessi valori (2.7), le anzidette proprietà di stabilità della soluzione nulla di (2.1) sono preservate rispetto a tali modifiche. Supposto ora di nuovo h dispari e $g^* < 0$, si scelga la perturbazione $\xi(t, x) = ax^{m+1}$, con a costante ed $m = 2, \ldots, h - 1$. Introducendo lo sviluppo di una soluzione dell'equazione

$$\dot{x} = X_{02}(t)x^2 + \ldots + X_{0m}(t)x^m + ax^{m+1} , \tag{2.11}$$

analogo a (2.4), nell'equazione stessa, si ottiene ancora $u_1(t, a) \equiv 1$, mentre per la determinazione delle $u_i(t, a)$, $i = 2, \ldots, m + 1$, si perviene alle equazioni

$$\dot{u}_i = U_i(t) , \quad u_i(0, a) = 0 , \qquad i = 2, \ldots, m ,$$
$$\dot{u}_{m+1} = \overline{U}_m(t) + a , \quad u_{m+1}(0, a) = 0 ,$$

con $\overline{U}_m(t)$ costruita tramite $u_1, \ldots, u_m, X_{02}, \ldots, X_{0m}$. Si ha $u_2(T, a) = \ldots = u_m(T, a) = 0$ e, per a sufficientemente grande, $u_{m+1}(T, a) > 0$; la corrispondente soluzione nulla di (2.11) è quindi instabile. Risulta allora provata nel caso in esame la proprietà (ii) della Definizione 2.1. Analogamente si procede negli altri casi.

(v) Supponiamo ora che la soluzione $x \equiv 0$ di (2.1) sia h-stabile; proveremo allora che h è dispari e $g^* < 0$. In base a quanto dimostrato

in (u) segue $d^i V^*(0)/dc^i = 0$ per $i = 1, \ldots, h-1$. Supponiamo che sia $d^h V^*(0)/dc^h = 0$, allora risulta anche $u_h(T) = 0$. Consideriamo l'equazione perturbata

$$\dot{x} = X_{02}(t)x^2 + \ldots + X_{0h}(t)x^h + ax^{h+1}, \tag{2.12}$$

con a costante. Procedendo come per la (2.11), si dimostra che per a sufficientemente grande la corrispondente soluzione $x \equiv 0$ di (2.12) è instabile e ciò è assurdo. Pertanto si ha $g^* \neq 0$. Utilizzando ancora il risultato conseguito in (u) segue immediatamente che h deve essere dispari e $g^* < 0$. Analogamente si procede negli altri casi e il teorema risulta così completamente dimostrato.

2.3 Osservazione. Non è difficile provare che se sono verificate le (2.7) con h dispari, la soluzione nulla dell'equazione (2.6) è, per ogni perturbazione $\xi(t, x)$, asintoticamente stabile o completamente instabile a seconda che $g^* < 0$ o $g^* > 0$. Se invece h è pari la medesima soluzione è asintoticamente stabile a destra e completamente instabile a sinistra, o viceversa, a seconda che $g^* < 0$ o $g^* > 0$. Ove sia opportuno evidenziare questi aspetti della h-stabilità o instabilità, diremo, a seconda dei casi che la soluzione nulla dell'equazione imperturbata (2.1) è h-asintoticamente stabile o h-completamente instabile, eventualmente a destra o a sinistra.

3. Sistemi periodici e relativi problemi di biforcazione generalizzata di Hopf.

Per $a_0 > 0$ poniamo $B^{(n)}(a_0) = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \|z\| \leqslant a_0\}$. Sia Ω_T, $T > 0$, l'insieme delle funzioni $f \in C(\mathbb{R} \times B^{(n)}(a_0), \mathbb{R}^n)$, T-periodiche in t, di classe C^∞ in z e con derivate rispetto a z (di ogni ordine) continue in (t, z). Muniamo Ω_T della topologia generata dalla successione delle norme

$$|f|^{(l)} = \sup\left\{\left|\frac{\partial^j f}{\partial z^j}(t, z)\right|, \quad j = 0, \ldots, l, \ (t, z) \in [0, T] \times B^{(n)}(a_0)\right\}.$$

Consideriamo un'equazione differenziale

$$\dot{z} = f_0(t, z), \tag{3.1}$$

ove $f_0 \in \Omega_T$ e $f_0(t, 0) \equiv 0$. Supporremo che la matrice jacobiana $f'_{0z}(t, 0)$

sia indipendente dal tempo ed ammetta un autovalore nullo. Supporremo inoltre che i rimanenti autovalori λ_j, $j = 1, \ldots, n-1$, soddisfino la condizione di non risonanza $\lambda_j \neq 2\pi m i/T$, $m = 0, \pm 1, \ldots$. Per ogni $f \in \Omega_T$ consideriamo l'equazione perturbata

$$\dot{z} = f(t, z) . \tag{3.2}$$

Siamo interessati al problema di fornire una stima del numero di orbite periodiche di (3.2) giacenti in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^n$ quando f è vicina ad f_0 nella topologia anzidetta. Precisamente daremo una caratterizzazione del verificarsi dell'una o dell'altra delle seguenti proprietà (a), (b).

(a) Esiste un intero $k > 1$ tale che

(i) esistono un intorno N_1 di f_0 ed $a_1 > 0$ tali che per ogni $f \in N_1$ il sistema (3.2) ammette al più k orbite T-periodiche giacenti in $B^{(n)}(a_1)$;

(ii) per ogni intero j, $1 \leqslant j \leqslant k$, per ogni $a_2 \in (0, a_1)$ e per ogni intorno N_2 di f_0, $N_2 \subset N_1$, esiste $f \in N_2$ tale che (3.2) ammette esattamente j orbite T-periodiche giacenti in $B^{(n)}(a_2)$;

(iii) per ogni $\bar{a} \in (0, a_1)$ esiste un intorno $\bar{N}$ di f_0, $\bar{N} \subset N_1$, tale che, se $f \in \bar{N}$ e se γ è un'orbita T-periodica di (3.2) giacente in $B^{(n)}(a_1)$, allora γ giace in $B^{(n)}(\bar{a})$.

(b) Per ogni intorno N di f_0, per ogni intero $j > 0$ e per ogni $a > 0$ esiste $f \in N$ tale che (3.2) abbia esattamente j orbite T-periodiche giacenti in $B^{(n)}(a)$.

Con un opportuno cambiamento di variabili, l'equazione (3.1) può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_0(t, x, y) \\ \dot{y} &= A_0 y + Y_0(t, x, y) \end{aligned} \tag{3.1$'$}$$

con $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, X_0, Y_0 di ordine $\geqslant 2$ in (x, y) ed A_0 matrice $(n-1) \times (n-1)$ costante, i cui autovalori sono diversi da $2\pi m i/T$, $m = 0, \pm 1, \ldots$. Corrispondentemente scriveremo la (3.2) nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(t, x, y, f) \\ \dot{y} &= A_0 y + Y(t, x, y, f) . \end{aligned} \tag{3.2$'$}$$

Sia $h > 0$ un intero. Indicato con

$$\Phi^{(h)}(t, x) = \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2 + \dots + \varphi_h(t)x^h$$

un polinomio $(n-1)$-dimensionale di grado h a coefficienti (vettoriali) periodici di periodo T, proponiamoci la determinazione di questi coefficienti in modo che lungo le soluzioni del sistema imperturbato (3.1)′ risulti

$$\left\{\frac{d}{dt}[y - \Phi^{(h)}(t, x)]\right\}_{y=\Phi^{(h)}(t,x)} = o(|x|^h) . \tag{3.3}$$

La (3.3) equivale alla condizione che le funzioni φ_j siano soluzioni delle equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t) &= A_0\varphi_1(t) \\ \dot{\varphi}_j(t) &= A_0\varphi_j(t) + \Psi_j(t) \qquad j = 2, \dots, h , \end{aligned} \tag{3.4}$$

dove le $\Psi_j(t)$ sono funzioni periodiche di periodo T dipendenti da $\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}$. La richiesta periodicità delle φ_j e le ipotesi su A_0 comportano, come è immediato riconoscere, che le (3.4) ammettono una ed una sola soluzione la quale può essere determinata ricorsivamente osservando che $\varphi_1(t) \equiv 0$.

Considerata l'equazione scalare ausiliaria

$$\dot{x} = X_0(t, x, \Phi^{(h)}(t, x)) , \tag{E_h}$$

siamo ora in grado di fornire la caratterizzazione delle proprietà (a), (b), introdotte precedentemente, in termini delle proprietà di h-stabilità o instabilità della soluzione nulla dell'equazione (E_h). Sussiste precisamente il seguente teorema.

3.1 Teorema. Se esiste un intero $h > 1$ tale che la soluzione $x \equiv 0$ di (E_h) è h-stabile o h-instabile, allora sussiste la proprietà (a) ed è $k = h$. Se invece per ogni intero $h > 1$ la soluzione $x \equiv 0$ di (E_h) non è h-stabile nè h-instabile, allora sussiste la proprietà (b).

Per dimostrare il Teorema 3.1 abbiamo bisogno di alcune considerazioni e lemmi preliminari.

Effettuando la trasformazione $\eta = y - \Phi^{(h)}(t, x)$, i sistemi (3.1)′ e (3.2)′ assumono rispettivamente la forma

$$(3.1)'' \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= X_0^{(h)}(t, x, \eta) \\ \dot{\eta} &= A_0\eta + W_0^{(h)}(t, x, \eta) \end{aligned}$$

e

$$(3.2)'' \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= X^{(h)}(t, x, \eta, f) \\ \dot{\eta} &= A_0\eta + W^{(h)}(t, x, \eta, f) \end{aligned}$$

ove $W_0^{(h)}(t, x, 0)$ è di ordine $\geqslant h$ in x e $X_0^{(h)}(t, x, \eta)$, $W_0^{(h)}(t, x, \eta)$ sono di ordine $\geqslant 2$ in (x, η). Per $(c, \eta_0) \in B^n(a_0)$, una soluzione $\big(x(t, c, \eta_0, f), \eta(t, c, \eta_0, f)\big)$ di (3.2)″ sarà detta una (T, η)-soluzione se essa esiste in $[0, T]$ ed è tale che $\eta(T, c, \eta_0, f) = \eta_0$. Dalle ipotesi fatte su A_0 e dal teorema delle funzioni implicite, con la formula di variazione della costante arbitraria, applicata alla seconda delle equazioni (3.2)″, segue facilmente il seguente lemma.

3.2 Lemma. Esistono $\varepsilon \in (0, a_0)$, un intorno N di f_0 ed una funzione $\sigma(c, f) \in C\big(B(\varepsilon) \times N, \mathbb{R}^{n-1}\big)$, $\sigma(0, f_0) = 0$, $\sigma(\cdot, f) \in C^\infty$, tali che per ogni $(c, \eta_0) \in B^{(n)}(\varepsilon)$ e per ogni $f \in N$, una soluzione di (3.2)″ di condizioni iniziali $(0, c, \eta_0)$ è una (T, η)-soluzione se e solo se $\eta_0 = \sigma(c, f)$. Inoltre le derivate di σ rispetto a c sono tutte continue in (c, f).

Consideriamo la funzione spostamento relativa alle soluzioni $\big(x(t, c, \sigma(c, f), f), \eta(t, c, \sigma(c, f), f)\big)$ di (3.2)″, cioè la funzione

$$V(c, f) = x\big(T, c, \sigma(c, f), f\big) - c\,.$$

Gli zeri della funzione spostamento forniscono le soluzioni T-periodiche di (3.2)″ corrispondenti ai valori iniziali $\big(c, \sigma(c, f)\big) \in B^{(n)}(\varepsilon)$. Daremo ora un lemma che mette in relazione la funzione V, ora introdotta, con la funzione V^* relativa all'equazione (E_h).

3.3 Lemma. Sia $h > 1$ un intero. Se la soluzione $x \equiv 0$ di (E_h) è h-stabile o h-instabile, allora

$$\partial^i V(0, f_0)/\partial c^i = 0 \quad \text{per } i = 1, \ldots, h-1\,, \qquad \partial^h V(0, f_0)/\partial c^h \neq 0\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Sviluppando $x(t, c, \sigma(c, f_0), f_0)$, $\eta(t, c, \sigma(c, f_0), f_0)$ come funzioni di c e tenendo presente che $\sigma(0, f_0) = 0$, si ha

$$x(t, c, \sigma(c, f_0), f_0) = u_1(t, f_0)c + \ldots + u_h(t, f_0)c^h + o(|c|^h)\,, \tag{3.5}$$

$$\eta(t, c, \sigma(c, f_0), f_0) = \eta_1(t, f_0)c + \ldots + \eta_h(t, f_0)c^h + o(|c|^h)\,, \tag{3.6}$$

con $u_1(0, f_0) = 1$, $u_i(0, f_0) = 0$ per $i = 2, \ldots, h$ e $\eta_i(0, f_0) = \eta_i(T, f_0)$ per $i = 1, \ldots, h$. Sostituendo (3.5) e (3.6) nella seconda delle (31.)$''$, uguagliando i coefficienti dei termini dello stesso ordine in c, e ricordando che $W_0^{(h)}(t, x, 0)$ è di ordine $\geqslant h$ in x e che $W_0^{(h)}(t, x, \eta)$ è di ordine $\geqslant 2$ in (x, η), si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta_1(t, f_0) = A_0\eta_1(t, f_0)\,,$$

da cui $\eta_1(t, f_0) = \eta_1(0, f_0)\exp(A_0 t)$. Da $\eta_1(0, f_0) = \eta_1(T, f_0)$ e dalle ipotesi su A_0 segue $\eta_1(t, f_0) \equiv 0$. Di conseguenza per la determinazione di $\eta_2(t, f_0)$ si ha l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta_2(t, f_0) = A_0\eta_2(t, f_0)$$

e quindi ancora $\eta_2(t, f_0) \equiv 0$. Iterando questo procedimento si ha

$$\eta_i(t, f_0) \equiv 0 \qquad \text{per } i = 1, \ldots, h-1\,. \tag{3.7}$$

Dato che lo sviluppo di η comincia con termini di ordine $\geqslant h$, per calcolare le funzioni $u_i(t, f_0)$ possiamo porre nella prima delle (3.1)$''$ $\eta = 0$; otteniamo allora l'equazione

$$\dot{x} = X_0^{(h)}(t, x, 0)\,, \tag{3.8}$$

che coincide con l'equazione (E_h). Pertanto le derivate $\partial^i V(0, f_0)/\partial c^i$ per $i = 1, \ldots, h$ coincidono ordinatamente con quelle della funzione spostamento V^* dell'equazione (E_h) per $c = 0$. Dall'ipotesi che la soluzione $x \equiv 0$ di (E_h) è h-stabile o h-instabile segue l'asserto.

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema 3.1.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.1. Supponiamo che esista un intero $h > 1$ tale che la soluzione nulla di (E_h) sia h-stabile o h-instabile,

e dimostriamo che vale la proprietà (a) con $k = h$. Risulta $\partial^i V(0, f_0)/\partial c^i = 0$ per $i = 1, \ldots, h-1$ e $\partial^h V(0, f_0)/\partial c^h \neq 0$; da ciò segue che esistono $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ e un intorno $N_1 \subset N$ di f_0 tali che per $c \in B(\varepsilon_1)$ ed $f \in N_1$, $\partial^h V(c, f)/\partial c^h \neq 0$. Per il teorema di Rolle possiamo allora dire che $V(c, f)$ ha al più h radici in $B(\varepsilon_1)$; la (i) è quindi verificata. Proviamo la (ii). Per $j = 1$, basta scegliere $f = f_0$. Sia ora j un intero tale che $2 \leqslant j \leqslant h$. Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_0^{(h)}(t, x, \eta) + \sum_1^{j-1} {}_i\, a_i x^{h-i} \\ \dot{\eta} &= A_0 \eta + W_0^{(h)}(t, x, \eta)\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

con a_i, $i = 1, \ldots, j$, costanti opportune. Con un tipo di argomento usato in [2] si perviene a dimostrare che si possono determinare le a_i arbitrariamente piccole in modo che la (3.9) abbia esattamente j orbite T-periodiche. La (ii) risulta dunque provata. Per dimostrare la (iii) osserviamo che per $\bar{c} > 0$, sufficientemente piccolo, e $c \in B(\bar{c})$ esiste $\mu > 0$ tale che $|V(c, f_0)| \geqslant \mu |c|^h$. Per la continuità di $V(c, f)$ in (c, f_0) possiamo allora dire che per ogni $c_1 \in B(\bar{c})$ esiste un intorno $N_{c_1} \subset N_1$ di f_0 tale che per $f \in N_{c_1}$ tutte le radici di $V(c, f)$ contenute in $B(\bar{c})$ si trovano in $B(c_1)$. Da ciò segue immediatamente la (iii).

Dimostriamo ora che, se per ogni intero $h > 1$ la soluzione $x \equiv 0$ di (E_h) non è h-stabile nè h-instabile, allora vale la (b). Per ogni intero positivo j, posto $h = j + 1$, consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_0^{(h)}(t, x, \eta) + b x^h \\ \dot{\eta} &= A_0 \eta + W_0^{(h)}(t, x, \eta)\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

con b costante non nulla. La soluzione $x \equiv 0$ dell'equazione (E_h) associata al sistema (3.10) è h-stabile o h instabile e ricadiamo quindi nel caso precedente. Dall'arbitrarietà di j e di b segue allora la (b). La dimostrazione del teorema è pertanto completa.

4. Casi particolari.

(1) Una interessante conseguenza del Teorema 3.1 è fornita dal seguente corollario, nel quale i concetti di h-stabilità e di h-instabilità per il sistema (3.1) sono analoghi ai corrispondenti definiti per un'equazione scalare.

4.1 COROLLARIO. Supponiamo che tutti gli autovalori di A_0 abbiano parte reale negativa. Allora: (i) se la soluzione $z \equiv 0$ del sistema imperturbato (3.1) è h-stabile o h-instabile, sussiste la proprietà (a) con $k = h$; (ii) se per ogni $h > 1$ la soluzione $z \equiv 0$ del sistema imperturbato (3.1) non è h-stabile nè h-instabile, allora sussiste la proprietà (b).

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si consegue osservando che la funzione spostamento per l'equazione (E_h) e la funzione spostamento relativa alle (T, η)-soluzioni del sistema imperturbato hanno fino all'ordine h le medesime derivate per $c = 0$. Utilizzando allora certi noti risultati [6], si ha che la soluzione $x \equiv 0$ di (E_h) è h-stabile o h-instabile se e solo se le analoghe proprietà sussistono per la soluzione $z \equiv 0$ del sistema (3.1). Ciò evidentemente completa la dimostrazione del corollario.

(2) Consideriamo l'equazione differenziale $\dot{z} = f_0(z)$ con $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, cioè il sistema piano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_0(x, y) \\ \dot{y} &= Y_0(x, y) \,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sia L_0 una soluzione periodica di (4.1), che non sia una posizione di equilibrio, di equazioni parametriche $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, e sia T il suo più piccolo periodo positivo. Introduciamo il seguente sistema di coordinate in un intorno di L_0

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s) + n\psi'(s) \\ y &= \psi(s) - n\varphi'(s) \end{aligned} \qquad s \in R,\ n \in [-\delta, \delta]$$

con δ piccolo. Sotto la condizione $(\varphi'(s))^2 + (\psi'(s))^2 > 0$, per ogni $s \in [0, T)$ le orbite di $\dot{z} = f(z)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, vicine ad L_0 e relative alle funzioni f vicine ad f_0 nel predetto intorno di L_0, hanno equazioni parametriche $n = n(s)$ con $n(s)$ soddisfacente l'equazione differenziale

$$\frac{dn}{ds} = R(s, n, f) \,, \tag{4.2}$$

ove R è C^∞ in n, periodica in s di periodo T, e $R(s, 0, f_0) \equiv 0$. Inoltre se L_0 non è un ciclo limite semplice (cfr. [1]), il valore medio di

$\partial R(s, 0, f_0)/\partial n$ in un periodo è zero. Ponendo allora

$$p = n \exp\left(-\int_0^s \frac{\partial R}{\partial n}(\tau, 0, f_0)\, d\tau\right),$$

(4.2) diventa

$$\frac{dp}{ds} = P(s, p, f)\,, \tag{4.3}$$

con $P(s, 0, f_0) = \partial P(s, 0, f_0)/\partial p = 0$. Pertanto il problema della biforcazione da un'orbita periodica, che non sia un ciclo limite semplice, in orbite periodiche di un sistema autonomo piano, può ricondursi all'esame dell'equazione scalare periodica (4.3) che, per $f = f_0$, soddisfa appunto tutte le ipotesi del sistema (3.1).

(3) Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{z} = f_0(z)\,, \tag{4.4}$$

con $f_0 \in C^\infty(B^{(n)}(a_0), \mathbb{R}^n)$, $f_0(0) = 0$. La matrice jacobiana $f_0'(0)$ abbia una coppia di autovalori puramente immaginari $\pm i$, ed i rimanenti autovalori λ_j, $j = 1, \ldots, n-2$, soddisfino la condizione $\lambda_j \neq mi$, $m = 0, \pm 1, \ldots$. Consideriamo anche le equazioni differenziali perturbate

$$\dot{z} = f(z)\,, \tag{4.5}$$

con $f \in C^\infty(B^{(n)}(a_0), R^n)$, $f(0) = 0$. Effettuando un opportuno cambiamento di variabili, la (4.5) può scriversi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta y + X(x, y, q, f) \\ \dot{y} &= \alpha y + \beta x + Y(x, y, q, f) \\ \dot{q} &= A_0 q + Q(x, y, q, f) \end{aligned} \tag{4.6}$$

con $\alpha(f_0) = 0$, $\beta(f_0) = 1$, A_0 matrice $(n-2)\times(n-2)$ costante, e con $X(x, y, q, f)$, $Y(x, y, q, f)$, $Q(x, y, q, f_0)$ di ordine $\geqslant 2$ in (x, y, q). Posto in (4.6)

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r \operatorname{sen}\theta\,, \quad q = rw\,, \tag{4.7}$$

con $r \in \mathbb{R}$, si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= R(\theta, r, w, f) \\ \frac{dw}{d\theta} &= \frac{1}{\beta} A_0 w + \eta(\theta, r, w, f) \end{aligned} \tag{4.8}$$

il quale per $f = f_0$ verifica tutte le ipotesi del sistema (3.1). Il problema della biforcazione in orbite periodiche con periodo vicino a 2π del sistema (4.5) può ricondursi al problema della biforcazione in orbite 2π-periodiche di (4.8). Il trasferimento di informazioni dal sistema (4.8) a quello originario (4.5) richiede tuttavia un accurato esame della singolarità della trasformazione (4.7) in $r = 0$. Ciò viene appunto compiuto in [2]. Notiamo che se esiste $h > 1$ tale che la soluzione nulla dell'equazione (E_h) associata a (4.8) per $f = f_0$, è h-stabile o h-instabile, allora h deve essere in questo caso necessariamente dispari. Inoltre ad ogni orbita periodica non banale di (4.5) corrispondono due orbite periodiche di (4.8), di cui una con valori di r sempre positivi, l'altra con valori di r sempre negativi. In conclusione, nell'accennata ipotesi di h-stabilità o h-instabilità, il numero delle orbite periodiche non banali di (4.5) nel problema locale in esame, non può superare il numero $(h-1)/2$.

(4) Supponiamo che il sistema imperturbato (3.1) sia autonomo. Nell'ipotesi che la matrice jacobiana $f_0'(0)$ abbia $\lambda = 0$ come autovalore semplice, possiamo scriverlo nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_0(x, y) \\ \dot{y} &= A_0 y + Y_0(x, y)\,, \end{aligned} \tag{4.9}$$

con A_0 matrice $(n-1)\times(n-1)$ costante e non singolare, e X_0, Y_0 di ordine $\geqslant 2$. Naturalmente per tale sistema sussistono le proprietà (a) e (b) con un qualsiasi periodo T tale che ogni autovalore λ di A_0 soddisfi la condizione $\lambda \neq 2\pi m i/T$, $m = 0, \pm 1, \ldots$ (e con perturbazioni dello stesso periodo T). Ma in aggiunta, per (4.9) si può anche prendere in esame il problema della biforcazione della soluzione statica $x \equiv y \equiv 0$ in soluzioni statiche dei sistemi perturbati (3.2), con f vicina ad f_0, ed indipendente dal tempo. Tale problema può ricondursi, analogamente, allo studio delle proprietà di stabilità della soluzione

$x \equiv 0$ di un'equazione differenziale scalare. Precisamente, denotiamo con (a') e (b') le proprietà (a) e (b) in cui le orbite periodiche del sistema (3.2) si pensino sostituite con le posizioni di equilibrio degli attuali sistemi perturbati. Indicata con $\sigma(x)$ l'unica soluzione dell'equazione

$$A_0\sigma(x) + Y_0(x, \sigma(x)) = 0$$

in un intorno di $x = 0$, $\sigma = 0$, e considerata l'equazione differenziale scalare

$$\dot{x} = X_0(x, \sigma(x)) , \tag{4.10}$$

si ha il seguente teorema.

4.2 TEOREMA. Se esiste un intero $h > 1$ tale che la soluzione $x \equiv 0$ di (4.10) sia h-stabile o h-instabile, allora sussiste la proprietà (a'), in ogni altro caso sussiste la proprietà (b').

La dimostrazione si consegue con argomentazioni simili a quelle del Teorema 3.1. Parimenti si può fornire un corollario di questo teorema analogo al Corollario 4.1.

5. Un esempio.

Consideriamo l'equazione

$$\ddot{q} = F(q)\beta(t) - \dot{q} , \tag{5.1}$$

con $F \in C^\infty(B(a_0), \mathbb{R})$ tale che $F(0) = F'(0) = 0$ e $\beta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ periodica. La (5.1) descrive il moto di un sistema materiale ad un grado di libertà soggetto ad una sollecitazione dissipativa lineare e ad una sollecitazione derivante dal potenziale $U(t, q) = \beta(t)\int_0^q F(\xi)\, d\xi$. Supponiamo in un primo tempo che $F(q)$ non abbia derivate tutte nulle in $q = 0$, cosicchè potremo scrivere

$$F(q) = aq^m + o(|q|^m) , \tag{5.2}$$

con $a \neq 0$ e $m \geqslant 2$. Cominceremo altresì, per semplicità e per fornire

una concretezza di risultati, col porre a raffronto i due seguenti casi:

I) $\beta(t) = 1$;

II) $\beta(t) = \text{sent}$.

Il caso generale di una funzione di periodo T qualsiasi sarà esaminato successivamente. Notiamo che il caso I) corrisponde ad un potenziale indipendente dal tempo $U^*(q) = \int_0^q F(\xi)\,d\xi$. Col cambiamento di variabili $q + \dot{q} = x$, $\dot{q} = y$, l'equazione (5.1) può essere sostituita dal sistema

$$(5.1)' \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= F(x-y)\beta(t) \\ \dot{y} &= -y + F(x-y)\beta(t)\,. \end{aligned}$$

Denoteremo con f_0 il secondo membro di (5.1)'. Gli autovalori della matrice jacobiana $f_0'(0)$ sono 0 e -1. Ci proponiamo di mostrare che per il sistema (5.1)' il procedimento descritto al n. 3 è finito; esso cioè conduce alla determinazione di un numero intero h per cui la soluzione $x \equiv 0$ dell'equazione (E_h) associata a (5.1) è h-stabile o h-instabile. Precisamente proveremo che risulta $h = m$ nel caso I) e $h = 2m - 1$ nel caso II). Posto

$$\Phi^{(m)}(t, x) = \varphi_1(t)x + \ldots + \varphi_m(t)x^m\,,$$

la determinazione delle funzioni $\varphi_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, con le caratteristiche descritte al n. 3, è ricondotta all'integrazione delle equazioni differenziali

$$d\varphi_i(t)/dt = -\varphi_i(t)\,, \quad i = 1, \ldots, m-1\,, \qquad d\varphi_m(t)/dt = -\varphi_m(t) + \beta(t)\,,$$

con $\varphi_j(0) = \varphi_j(2\pi)$, $j = 1, \ldots, m$. Si ha $\varphi_1(t) \equiv \ldots \equiv \varphi_{m-1}(t) \equiv 0$, e corrispondentemente $u_1(t) \equiv 1$ e $u_i(t) \equiv 0$ per $i = 2, \ldots, m-1$. Si ha inoltre $u_m(t) = at$ nel caso I) e $u_m(t) = a(1 - \text{cost})$ nel caso II). Nel caso I) si ha dunque $u_m(2\pi) = 2\pi a \neq 0$ e di conseguenza $h = m$. Rileviamo anche che in questo caso la posizione di equilibrio $q = 0$ è m-asintoticamente stabile quando m è dispari ad $a < 0$, m-instabile in ogni altro caso (cfr. Osservazione 2.3 e dim. Corollario 4.1). Nel caso II) invece $u_m(2\pi) = 0$; è necessario allora proseguire nel procedimento sostituendo a $\Phi^{(m)}$ un polinomio di grado più elevato. La natura

stessa della equazione suggerisce di assumere questo grado uguale a $2m-1$. Posto allora

$$\Phi^{2m-1}(t, x) = \varphi_1(t)x + \ldots + \varphi_{2m-1}(t)x^{2m-1},$$

le funzioni φ_i e u_i fino all'ordine m, con le proprietà richieste, coincidono con le omonime precedenti. Inoltre è facile riconoscere che risulta $u_i(2\pi) = u_i(0)$ per $i = m+1, \ldots, 2m-2$, mentre la $u_{2m-1}(t)$ non è periodica e si ha precisamente $u_{2m-1}(2\pi) = -ma^2\pi/2$. Nel caso II) si ha pertanto $h = 2m-1$. È interessante rilevare che, poichè in questo caso h è dispari e $u_{2m-1}(2\pi) < 0$, la soluzione $x \equiv 0$ di (E_{2m-1}) è $(2m-1)$-asintoticamente stabile (cfr. Osservazione 2.3), e quindi la soluzione statica del sistema originario ha questa stessa proprietà (cfr. dim. Corollario 4.1), qualunque siano m ed il segno di a. In altri termini il fattore periodico sent ha l'effetto di rendere asintoticamente stabile la posizione di equilibrio $q = 0$ anche nei casi in cui, in assenza di tale fattore, cioè con $U(t, q) = U^*(q)$, questa stessa posizione di equilibrio è instabile. Ma, tenendo presente che nel caso II) $h = 2m-1 > m$, si riconosce anche che il fattore periodico sent ha l'effetto di indebolire il carattere di stabilità asintotica posseduto dalla posizione di equilibrio $q = 0$ per $U = U^*$, m dispari e $a < 0$. Per quanto riguarda il numero di orbite periodiche, possiamo quindi concludere che per piccole perturbazioni di f_0, in ogni intorno dell'origine, si ottengono al più m orbite 2π-periodiche nel caso I), e al più $2m-1$ nel caso II). Inoltre in ogni intorno di f_0 è possibile determinare una perturbazione che ammette esattamente j orbite 2π-periodiche arbitrariamente vicine all'origine, con $j = 1, \ldots, m$ nel caso I) e $j = 1, \ldots, 2m-1$ nel caso II). Ovviamente nel caso I) tutte queste conclusioni rimangono valide anche per la stima del numero di orbite periodiche di qualsiasi periodo T e, in particolare, per la stima del numero di posizioni di equilibrio (cfr. n. 4, (4)).

Se $\beta(t)$ è una qualsiasi funzione periodica a media non nulla in un periodo, si ottengono gli stessi risultati del caso I) se tale media è positiva; si ha invece uno scambio della proprietà di m-stabilità con quella di m-instabilità se $\beta(t)$ ha media negativa. Se poi $\beta(t)$ ha media nulla, e non è identicamente nulla, si può concludere che $h = 2m-1$.

Nel caso dianzi escluso che $F(q)$ sia una funzione piatta in $z = 0$ (in particolare identicamente nulla), allora, qualunque sia la funzione T-periodica $\beta(t)$, il procedimento del n. 3 porta per ogni $h > 0$ a funzioni $u_i(t)$ tutte periodiche di periodo T. Pertanto in questo caso sussiste la proprietà (b), e, se $\beta(t)$ è costante, anche la proprietà (b').

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDRONOV - E. LEONTOVICH - I. GORDON - A. MAIER, *Theory of bifurcations of dynamical systems in the plane,* Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem (1973).

[2] S. R. BERNFELD - P. NEGRINI - L. SALVADORI, *Quasi-invariant manifolds, stability and generalized Hopf bifurcation,* Ann. Mat. Pura e Appl., in corso di stampa.

[3] N. CHAFEE, *Generalized Hopf bifurcation and perturbations in a full neighborhood of a given vector field,* Indiana Univ. Math. J., **27** (1978).

[4] J. C. DE OLIVEIRA - J. K. HALE, *Dynamic behavior from bifurcation equations,* Tohoku Math.,

[5] J. K. HALE, *Stability from the bifurcation function,* Proc. Midwest Seminar on Differential Equations, Okla, St. Univ. (Oct. 1979).

[6] A. M. LIAPUNOV, *Probleme général de la stabilité du mouvement,* Ann. of Math. Studies, 17, Princeton Univ. Press, New Jersey (1947).

[7] V. MOAURO, *Bifurcation of closed orbits from a limit cycle in R^2,* Rend. Seminario Matematico, Univ. Padova, **65** (1981).

[8] L. SALVADORI - F. VISENTIN, *Perturbed dynamical systems: displacement and bifurcation functions,* J. Math. Anal. and Appl., **87** (1982), p. 1.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 maggio 1982.