RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIO MATTEI

Sui moti di Beltrami-Caldonazzo in magnetofluidodinamica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 68 (1982), p. 11-15

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__68__11_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 68 (1982)

Sui moti di Beltrami-Caldonazzo in Magnetofluidodinamica.

Giulio Mattei (*)

Summary - In this paper we extend to Magnetofluiddynamics (with and without the Hall effect) the study of the so-called « Beltrami-Caldonazzo motions » of classical hydrodynamics. Magnetic fields (and, in correspondence, the pressure field) that make such motions possible are determined. So classes of exact solutions of the nonstationary magnetofluiddynamic equations (with and without the Hall effect) are pointed out.

1. Introduzione e formulazione del problema.

Nell'ambito della Meccanica dei fluidi (omogenei) incomprimibili viscosi, B. Caldonazzo in un lavoro del 1926 [1] ha studiato e caratterizzato i moti non stazionari di Beltrami (1) che siano simmetrici rispetto ad un asse. In particolare, in [1] Caldonazzo ha per primo messo in luce un moto della classe suddetta il cui campo di velocità è dato dalla

$$\boldsymbol{v} = A \exp[-\nu k^2 t][J_1(kr)\,\boldsymbol{e}_\varphi + J_0(kr)\,\boldsymbol{e}_z]\,. \tag{1.1}$$

Nella (1.1) $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ sono i versori di una terna di coordinate cilindriche ortogonali (r, φ, z) di asse z, A e k due costanti arbitrarie, ν il coeffi-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Meccanica Razionale, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa.

(1) Moti per i quali, come è ben noto, il campo di velocità $\boldsymbol{v}$ è ovunque ed in ogni istante parallelo al vortice $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$.

ciente di viscosità cinematica (costante), t il tempo, J_1 e J_0 le funzioni di Bessel di prima specie di ordine uno e zero rispettivamente.

Il moto (1.1) è un particolare moto di Beltrami in quanto da (1.1) segue la

$$\boldsymbol{\omega} = k\boldsymbol{v} \; . \tag{1.2}$$

Chiameremo dunque il moto caratterizzato da (1.1) *moto di Beltrami-Caldonazzo* ([2]).

Lo scopo di questa Nota è, in sintesi, quello di studiare i moti di Beltrami-Caldonazzo in Magnetofluidodinamica (MFD). Specificatamente, consideriamo un fluido omogeneo, incomprimibile, viscoso (stokesiano lineare), dotato di conducibilità elettrica finita e soggetto a forze di massa di origine non elettromagnetica conservative; in un primo tempo si supporrà trascurabile l'effetto Hall, in un secondo tempo se ne terrà conto. Nell'ambito delle equazioni MFD indefinite *non linearizzate* descriventi tale fluido, ci si chiede se siano possibili moti di Beltrami-Caldonazzo e, in caso affermativo, ci si propone di determinare dei campi magnetici (ed, in corrispondenza, il campo di pressione) che rendono tali moti possibili (stabilendo così in particolare delle classi di soluzioni esatte non stazionarie delle equazioni di base).

2. Equazioni di base.

Le equazioni non lineari di base sono (in unità di Gauss)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{\omega} - \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} - U\right) + \frac{1}{4\pi\mu\varrho}(\operatorname{rot}\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{B} + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \; , \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \; , \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) + \nu_m\nabla^2\boldsymbol{B} \; , \tag{2.3}$$

([2]) In [2] Sect. 54 α (a cui si rimanda per l'interpretazione meccanica della (1.1)) il moto (1.1) di Caldonazzo è visto come un particolare moto di Trkal. I moti di Trkal (cfr. [2] Sect. 50) sono quei moti per i quali $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}(x, y, z)\exp[-\nu k^2 t]$, con k costante arbitraria ed $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ soddisfacente l'equazione $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a}$.

con la condizione

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 . \tag{2.4}$$

In esse p è la pressione, ϱ la densità (costante), U il potenziale delle forze di massa di origine non elettromagnetica riferito all'unità di massa, μ la permeabilità magnetica (costante), $\boldsymbol{B}$ il vettore induzione magnetica, $\nu_m = c^2/4\pi\mu\sigma$ il coefficiente (costante) di viscosità magnetica (c velocità della luce nel vuoto, σ conducibilità elettrica costante).

Le (2.1), (2.2), (2.3) costituiscono un sistema non lineare di 7 equazioni differenziali alle derivate parziali in 7 funzioni incognite scalari: le tre componenti di $\boldsymbol{v}$, le tre di $\boldsymbol{B}$ e p.

3. Soluzione del problema.

Ci si chiede dunque se e sotto quali condizioni siano possibili in MFD moti il cui campo di velocità è dato dalla (1.1).

Per (1.1), la (2.2) è identicamente soddisfatta, e oltre alla (1.2), sussistono le

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nu k^2 \boldsymbol{v} , \qquad \nabla^2 \boldsymbol{v} = -k^2 \boldsymbol{v} . \tag{3.1}$$

La (2.1) assume per conseguenza la forma

$$\frac{1}{4\pi\mu\varrho} (\operatorname{rot} \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B} = \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} - U\right). \tag{3.2}$$

Dunque la forza magnetica per unità di volume, $(1/4\pi\mu)(\operatorname{rot} \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B}$*, deve essere conservativa per il realizzarsi dei moti in questione.*

La (3.2) può soddisfarsi prendendo un campo magnetico (non stazionario) della forma

$$\boldsymbol{B} = B_\varphi(r, t)\, \boldsymbol{e}_\varphi + B_z(r, t)\, \boldsymbol{e}_z . \tag{3.3}$$

Infatti da (3.3) segue

$$\boldsymbol{B} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \operatorname{grad}\left(\frac{B^2}{2} + \int \frac{B_\varphi^2}{r}\, dr\right). \tag{3.4}$$

La (2.4) resta identicamente soddisfatta dalla (3.3) e la (2.3), avendosi per (1.1) e (3.3)

$$\text{rot}\,(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) = 0\,, \tag{3.5}$$

assume la forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \boldsymbol{B}\,. \tag{3.6}$$

La (3.6) coincide con la ben nota equazione di diffusione di un campo magnetico in un conduttore in quiete. Per (3.3) la (3.6) proiettata su $\boldsymbol{e}_r$ dà una identità, proiettata su $\boldsymbol{e}_\varphi$ dà

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \nu_m \left(\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2}\right), \tag{3.7}$$

proiettata su $\boldsymbol{e}_z$ dà

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \nu_m \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r}\right). \tag{3.8}$$

Fra le soluzioni non stazionarie della (3.7) segnaliamo le

$$B_\varphi(r, t) = C \exp\left[-\nu_m \lambda^2 t\right] J_1(\lambda r)\,, \tag{3.9}$$

$$B_\varphi(r, t) = \frac{C}{r} \exp\left[-r^2/4\nu_m t\right], \tag{3.10}$$

$$B_\varphi(r, t) = \frac{Cr}{2\nu_m t^2} \exp\left[-r^2/4\nu_m t\right], \tag{3.11}$$

e fra quelle della (3.8) le

$$B_z(r, t) = C \exp\left[-\nu_m \xi^2 t\right] J_0(\xi r)\,, \tag{3.12}$$

$$B_z(r, t) = \frac{C}{\nu_m t} \exp\left[-r^2/4\nu_m t\right]. \tag{3.13}$$

(Nelle precedenti C, λ e ξ sono costanti arbitrarie non nulle).

Passiamo ora alla determinazione della pressione. Da (3.2) per (3.4) segue

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{v^2}{2}-U+\frac{B^2}{8\pi\mu\varrho}+\frac{1}{4\pi\mu\varrho}\int\frac{B_\varphi^2}{r}\,dr=f(t)\,, \tag{3.14}$$

con $f(t)$ funzione arbitraria del tempo. L'integrale Bernoulliano (3.14) determina la pressione.

In definitiva possiamo concludere che in MFD sono possibili moti non stazionari di Beltrami-Caldonazzo (1.1) *con campi magnetici non stazionari del tipo* (3.3) *soluzioni delle* (3.7)-(3.8) (*per esempio* (3.9)-(3.13)) *e con un campo di pressione dato dalla* (3.14).

4. Caso in cui non è trascurabile l'effetto Hall.

Nel caso in cui non è trascurabile l'effetto Hall le (2.1), (2.2) e (2.4) restano inalterate, mentre la (2.3) è sostituita dalla

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B})+\nu_m\nabla^2\boldsymbol{B}+\beta\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{B})\,, \tag{4.1}$$

dove si è posto $\beta=c^2\beta_H/4\pi\mu$, con β_H coefficiente di Hall.

Osservando che la (4.1) differisce dalla (2.3) per il solo termine contenente β e tenuto conto della (3.4), è immediato riconoscere che i risultati del n. 3 restano validi anche in presenza dell'effetto Hall.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Caldonazzo, *Moti elicoidali, simmetrici ad un asse, di liquidi viscosi*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, **59** (1926), pp. 657-665.

[2] R. Berker, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik, Band VIII/2 (1963), pp. 1-384.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 novembre 1981.