

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. ZANGHIRATI

## **Iterati di operatori e regolarità Gevrey microlocale anisotropa**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 67 (1982), p. 85-104

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1982\\_\\_67\\_\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__67__85_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Iterati di operatori e regolarità Gevrey microlocale anisotropa.

L. ZANGHIRATI (\*)

SUMMARY - *A microlocal version of the theorem of the iterates for quasi-elliptic operators proved in [8] is given.*

### Introduzione.

La versione microlocale del teorema classico di Kotake-Narasimhan per gli operatori ellittici, data da Bolley-Camus-Mattera in [2], come pure la sua estensione ad una classe di operatori ipoellittici [1], è parsa non scevra di interesse per le varie implicazioni in essa contenute.

In questa nota viene provato per le classi di Gevrey anisotrope  $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $q_i \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq n$ , un risultato analogo al primo di quelli sopracitati: in effetti viene data una versione microlocale del « teorema degli iterati di un operatore  $q$ -quasi-ellittico » [8] <sup>(1)</sup>. A tale scopo si definisce qui il fronte d'onda anisotropo  $WF_{\sigma q}(u)$  di una distribuzione  $u$  rispetto la classe  $\mathcal{G}^{\sigma q}$  modificando in modo opportuno la definizione di « fronte d'onda rispetto una classe  $C^L$  » data da Hörmander in [3]. Si caratterizzano poi i vettori Gevrey d'ordine  $\sigma q$

(\*) Indirizzo dell'A. Istituto Matematico, Via Machiavelli 35, 44100 Ferrara.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue applicazioni.

<sup>(1)</sup> Estensioni e complementi al teorema degli iterati quasi-ellittici sono contenuti in [9] e [10].

per un operatore  $P$ , cioè le distribuzioni  $u$  su  $\Omega$  tali che per ogni compatto  $K \subset \Omega$  esiste una costante  $C_k > 0$  per cui:

$$\|P^N u\|_{L^1(K)} \leq O_k^{N+1} (N^\sigma)^{m_q N} \quad N = 1, 2, \dots,$$

dove  $m_q$  indica il  $q$ -ordine dell'operatore  $P$ . Infine si introduce la nozione di fronte d'onda  $WF_{\sigma q}(u; P)$  di una distribuzione  $u$  rispetto la classe di Gevré  $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$  e gli iterati di  $P$ . Si perviene così al risultato principale di questa nota:

**TEOREMA.** *Sia  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $P(x, D)$  un operatore differenziale di  $q$ -ordine  $m_q$  a coefficienti in  $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$ . Allora:*

$$(a) \quad WF_{\sigma q}(u) \subset WF_{\sigma q}(u; P) \cup \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : P_0(x, \xi) = 0\},$$

dove  $P_0(x, \xi)$  è la parte di  $P(x, \xi)$   $q$ -omogenea di grado  $m_q$ .

Da questo teorema si deduce che se  $u$  è un vettore Gevré di ordine  $\sigma q$  per l'operatore  $P$  allora:

$$WF_{\sigma q}(u) \subset \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : P_0(x, \xi) = 0\},$$

e che se  $P(x, D)$  è  $q$ -quasi-ellittico in  $\Omega$ , allora:

$$WF_{\sigma q}(u) = WF_{\sigma q}(u; P).$$

Da qui, per proiezione su  $\Omega$ , si ottiene il teorema degli iterati quasi-ellittici [8].

Dal precedente teorema segue subito anche:

$$WF_{\sigma q}(u) \subset WF_{\sigma q}(Pu) \cup \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : P_0(x, \xi) = 0\}$$

che si può riguardare come la versione microlocale di un noto teorema di regolarità Gevré per le soluzioni di un'equazione quasi-ellittica [7].

Facciamo infine osservare come il teorema ottenuto possa dare informazioni, circa la regolarità Gevré di una distribuzione, più complete di quelle fornite da teoremi che fanno uso di fronte d'onda isotropi. In effetti, indicati con  $WF_{\sigma}(u)(WF_{\sigma}(u; P))$  il fronte d'onda di  $u$  rispetto alla classe di Gevré isotropa  $\mathcal{G}^{\sigma}$  (rispetto a  $\mathcal{G}^{\sigma}$  ed agli iterati

di  $P$ ), dal Teorema 3.2 di [1], segue:

$$(b) \quad WF_{\sigma}(u) \subset WF_{\sigma}(u; P) \cup \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : P_m(x, \xi) = 0\},$$

dove  $P_m(x, \xi)$  è la parte principale di  $P(x, \xi)$ .

Ad esempio, se  $P(D)$  è l'operatore del calore:

$$P(D) = \sum_{k=1}^n D_k^2 + iD_t, \quad D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_t = -i \frac{\partial}{\partial t},$$

da (a) segue:

$$WF_{\sigma(1, \dots, 1, 2)}(u) \subset WF_{\sigma(1, \dots, 1, 2)}(u; P),$$

mentre da (b):

$$WF_{\sigma}(u) \subset WF_{\sigma}(u; P) \cup \{(x, t; 0, \tau) : (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Un altro esempio è fornito dall'operatore:

$$Q(x, D) = e^{-i\theta} P^r(x, D_x)^r + iD_t^{mp}, \quad D = (D_x, D_t)$$

dove  $P(x, D_x)$  è un operatore  $q$ -quasi-ellittico in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , di  $q$ -grado  $m$ ,  $p \geq r > 0$  sono interi e  $\theta$  è una direzione evitata dal simbolo  $q$ -principale di  $P^r$ .

Posto  $v = ((p/r)q_1, \dots, (p/r)q_n, 1)$ , da (a) si ha per ogni  $\sigma \geq 1$ :

$$WF_{\sigma v}(u) \subset WF_{\sigma v}(u; Q),$$

mentre da (b):

$$WF_{\sigma}(u) \subset WF_{\sigma}(u; Q) \cup \{(x, t; \xi, 0) : (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}.$$

Pertanto, se  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  è soluzione di  $Q(x, D)u = 0$ , dalla prima di queste inclusioni si deduce che  $u \in \mathcal{G}^{\sigma v}(\Omega)$ , mentre dalla seconda non si ottiene alcuna informazione circa la regolarità Gevrey locale di  $u$ .

Segnaliamo che risultati relativi ad un fronte d'onda  $\mathcal{C}^{\infty}$  anisotropo sono stati ottenuti da Lascar [4] e da Parenti-Rodino [5] e che Rodino ha recentemente [6] introdotto la nozione di «  $\psi$ -filtro » che, ove si scelga opportunamente  $\psi$ , può fornire una nozione di fronte d'onda Gevrey come quella definita in questa nota.

# 1. Fronte d'onda rispetto le classi di Gevrey anisotrope.

1.1. DEFINIZIONI. Chiameremo peso in  $\mathbb{R}^n$  una  $n$ -pla  $q = (q_1, \dots, q_n)$  di numeri reali  $\geq 1$  con  $q_j = 1$  per almeno un  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Se le componenti di  $q$  sono razionali si può scrivere  $q$  nella forma  $(m/m_1, \dots, m/m_n)$ ,  $m_j \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $m = \max_j m_j$ .

In questa nota useremo un peso  $q$  di questo tipo;  $q$ , e quindi  $m_1, \dots, m_n$  dovranno ritenersi fissati.

Per ogni  $\lambda > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  poniamo:

$$\lambda^q x = (\lambda^{q_1} x_1, \dots, \lambda^{q_n} x_n).$$

Una funzione  $f$  definita in  $\mathbb{R}^n$  dicesi positivamente  $q$ -omogenea di grado  $\alpha \in \mathbb{R}$  se per ogni  $\lambda > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$f(\lambda^q x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  poniamo:

$$|x|_q = \left( \sum_{j=1}^n x_j^{2/q_j} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La funzione  $x \rightarrow |x|_q$  così definita è subadditiva, positivamente  $q$ -omogenea di grado 1 e verifica:

$$(1.1) \quad C^{-1}(1 + |x|)^{1/\max q_j} \leq 1 + |x|_q \leq C(1 + |x|) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

dove  $|x|$  denota l'usuale norma euclidea e  $C$  è una costante dipendente solo da  $n$ .

Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^n$  dicesi  $q$ -conico se

$$x \in E, \quad \lambda > 0 \Rightarrow \lambda^q x \in E.$$

Chiameremo  $q$ -grado del monomio  $a_\alpha \xi^\alpha$ ,  $a_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , il numero  $\langle \alpha, q \rangle$  e  $q$ -grado del polinomio  $P(x) = \sum a_\alpha \xi^\alpha$  il massimo dei  $q$ -gradi dei suoi monomi.

Chiameremo infine classe di Gevrey di ordine  $\sigma q$  in  $\Omega$ ,  $\sigma \geq 1$ , l'insieme  $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$  delle  $u \in C^\infty(\Omega)$  tali che per ogni compatto  $K \subset \Omega$  esiste

una costante  $C_k$  per cui:

$$\sup_K |D^\alpha u| \leq C_k (C_k \langle \alpha, q \rangle^\sigma)^{\langle \alpha, a \rangle}.$$

Con le lettere  $C, C_1, C_2, \dots$  indicheremo costanti anche diverse dipendenti unicamente dai dati  $n, q, P, u, \Omega, K, \dots$ .

**1.2. LEMMA.** *Sia  $K$  un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\sigma \geq 1$ ,  $0 < r \leq 1$ . Allora per ogni intero positivo  $N$  esiste una funzione  $\chi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , uguale ad 1 in  $K$ , uguale a 0 nell'insieme  $\{x: \inf_{y \in K} |x - y|_q > r\}$  e tale che:*

$$(1.2) \quad |D^{\alpha+\beta} \chi_N| \leq C_\alpha r^{-\sigma \langle \alpha, a \rangle} (CN r^{-1})^{\sigma \langle \beta, a \rangle} \quad \text{se } |\beta| \leq N, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

*Inoltre la costante  $C_\alpha$  dipende solo da  $\alpha$  ed  $n$ , mentre  $C$  dipende solo da  $n$ .*

**DIM.** Sia  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{supp } \Phi \subset \{x: |x|_q < \frac{1}{4}\}$ ,  $\Phi \geq 0$ ,  $\int \Phi = 1$ . Sia inoltre  $u$  la funzione caratteristica dell'insieme:

$$\{x: |x - y|_q < r/2, y \in K\}.$$

Posto per ogni  $a > 0$ :  $\Phi_a(x) = a^{-\sigma \sum_{i=1}^n a_i} \Phi(a^{-\sigma a} x)$ , si verifica agevolmente che la funzione:

$$\chi_N = u * \Phi_r * \underbrace{\Phi_{r/N} * \dots * \Phi_{r/N}}_{N \text{ fattori}}$$

gode delle proprietà richieste, la (1.2) essendo soddisfatta con:

$$C_\alpha = n \int |D^\alpha \Phi|; \quad C = \max_{|\alpha|=1} C_\alpha.$$

**1.3. LEMMA.** *Sia  $u \in \mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$  e  $\chi_N \in C_0^\infty(K)$ ,  $K \subset \Omega$ ,  $K$  compatto,  $\Omega$  aperto. Se:*

$$(1.3) \quad |D^\alpha \chi_N| \leq C (CN^\sigma)^{\langle \alpha, a \rangle} \quad \langle \alpha, q \rangle \leq mN, \quad N = 1, 2, \dots \quad (2)$$

(2) L'esistenza di una successione  $\chi_N$  soddisfacente (1.3) è assicurata dal Lemma 1.2.

*allora esiste una costante  $C'$  tale che*

$$(1.4) \quad |(\chi_N u)^\wedge(\xi)| \leq C'(C' N^\sigma)^{mN} (N^\sigma + |\xi|_a)^{-mN} \quad N = 1, 2, \dots$$

**DIM.** Dalla formula di Leibniz, tenuto conto che  $u \in \mathcal{G}^{\sigma a}(\Omega)$  e che vale (1.3), segue:

$$|D^\alpha(\chi_N u)| \leq C_1(C_1 N)^{\sigma \langle \alpha, a \rangle} \quad \langle \alpha, q \rangle \leq mN.$$

Quindi:

$$|\xi^\alpha(\chi_N u)^\wedge(\xi)| \leq C_2(C_2 N)^{\sigma \langle \alpha, a \rangle} \quad \langle \alpha, q \rangle \leq mN.$$

Sommando le maggiorazioni che si ottengono da questa con  $\alpha = 0$  ad  $\alpha = m_j N e^j$  <sup>(3)</sup>,  $j = 1, \dots, n$ , e tenendo conto della (1.1) si perviene agevolmente alla tesi.

**1.4. LEMMA.** *Sia  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  ed  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .  $u \in \mathcal{G}^{\sigma a}$  in un intorno di  $x^0$  se e solo se esiste un intorno  $U$  di  $x^0$  ed una successione  $\{u_N\}$  limitata in  $\mathcal{E}'(\Omega)$  tale che:*

$$(1.5) \quad u_N = u \quad \text{in } U, \quad N = 1, 2, \dots,$$

$$(1.6) \quad |\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CN^\sigma/|\xi|_a)^{mN} \quad N = 1, 2, \dots$$

**DIM.** Supponiamo  $u \in \mathcal{G}^{\sigma a}$  in  $\{x: |x - x_0| < 3r\}$ ,  $0 < r \leq 1$ , e sia  $\{\chi_N\}$  una successione fornita delle proprietà indicate nel Lemma 1.2 con  $K = \{x: |x - x^0| \leq r\}$ . Utilizzando i Lemmi 1.2 e 1.3 si verifica subito che la successione  $u_N = u \chi_{mN}$  soddisfa (1.5), (1.6) ed è limitata in  $\mathcal{E}'(\Omega)$ .

Viceversa, sia  $\{u_N\}$  una successione siffatta. Allora, essendo  $\{u_N\}$  limitata in  $\mathcal{E}'(\Omega)$  esisteranno due costanti  $C$  ed  $M$  tali che:

$$(1.7) \quad |\hat{u}_N(\xi)| \leq C(1 + |\xi|_a)^M.$$

Per la (1.6), fissato  $\alpha$ , basterà prendere  $N$  sufficientemente grande perchè l'integrale  $\int |\xi^\alpha \hat{u}_N(\xi)| d\xi$  converga.

<sup>(3)</sup> Qui, come nel seguito,  $e^j$ ,  $j = 1, \dots, n$  sta ad indicare il  $j$ -mo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

Scelto  $N$  in tal modo, per la (1.5) si avrà:

$$(1.8) \quad D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n} \int \exp[i\langle x, \xi \rangle] \xi^\alpha \hat{u}_N(\xi) d\xi \quad x \in U.$$

Maggioriamo il secondo membro di (1.8) utilizzando (1.6) quando  $|\xi|_q \geq N^\sigma$  e (1.7) altrimenti. Tenuto conto che  $|\xi^\alpha| \leq |\xi|_q^{\langle \alpha, a \rangle}$  si ha così per ogni  $x \in U$ :

$$|D^\alpha u(x)| \leq C' N^{\sigma \langle \alpha, a \rangle} (1 + N^\sigma)^M \int_{|\xi|_q < N^\sigma} d\xi + C(CN^\sigma)^{mN} \int_{|\xi|_q > N^\sigma} |\xi|_q^{\langle \alpha, a \rangle - mN} d\xi.$$

Quindi:

$$|D^\alpha u(x)| \leq C'' (C''(\langle \alpha, q \rangle + \nu))^{\sigma(\langle \alpha, a \rangle + \nu)}$$

dove  $\nu$  è un intero che dipende solo da  $n$ ,  $q$  ed  $M$ .

Per completare la dimostrazione basta ora osservare che:

$$(\langle \alpha, q \rangle + \nu)^{\langle \alpha, a \rangle + \nu} \leq 2^{\nu^2} (2^{2\nu} \langle \alpha, q \rangle)^{\langle \alpha, a \rangle}.$$

**1.5. DEFINIZIONE.** Sia  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $(x^0, \xi^0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Diremo che  $(x^0, \xi^0)$  appartiene al complementare del fronte d'onda  $WF_{\alpha q}(u)$  di  $u$  rispetto alla classe  $\mathcal{G}^{\alpha q}$ ,  $q = (m/m_1, \dots, m/m_n)$ , se esiste un intorno aperto  $U$  di  $x^0$ , un intorno aperto  $q$ -conico  $\Gamma$  di  $\xi^0$  ed una successione  $u_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$  tale che:

- i)  $u_N = u$  in  $U$ ,
- ii)  $u_N$  è limitata in  $\mathcal{E}'(\Omega)$ ,
- iii)  $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CN^\sigma/|\xi|_q)^{mN}$ ,  $\xi \in \Gamma$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,

dove  $C$  è una opportuna costante positiva.

**1.6. LEMMA.** Sia  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\alpha q}(u)$ ,  $U$  e  $\Gamma$  come nella Definizione 1.5,  $K$  un intorno compatto di  $x^0$  contenuto in  $U$  ed  $F$  un intorno  $q$ -conico di  $\xi^0$  contenuto in  $\Gamma$ , chiuso in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Sia poi  $\chi_N \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$  una successione di funzioni identicamente uguali ad uno su  $K$ , soddisfacenti la (1.3).

Allora esiste un intero  $N_0$  tale che la successione  $\chi_{N+N_0} u$  verifica i), ii), iii) con  $K$  in luogo di  $U$  ed  $F$  in luogo di  $\Gamma$ .

**Dim.** Sia  $u_N$  una successione verificante le condizioni indicate nella definizione 1.5. Essendo  $u_N$  limitata in  $\mathcal{E}'(\Omega)$  esistono due costanti  $C$  ed  $M$  tali che:

$$(1.8) \quad |(u_N)^\wedge(\eta)| \leq C(1 + |\eta|_q)^M \quad N = 1, 2, \dots$$

Posto:

$$N_0 = \left[ n + 1 + M + \sum_{j=1}^n q_j \right] + 1,$$

da (1.3) segue:

$$(1.9) \quad |\hat{\chi}_{N+N_0}(\eta)| \leq C_1^{N+1} N^\sigma / (N^\sigma + |\eta|_q)^{mN} (1 + |\eta|_q)^{-(n+1+\sum_{j=1}^n q_j + M)}.$$

Notiamo poi che se  $F$  e  $\Gamma$  sono come specificato nell'enunciato, esiste una costante  $C_2$  tale che:

$$(1.10) \quad \xi \in F, \quad \eta \notin \Gamma \Rightarrow |\xi - \eta|_q \geq C_2(|\xi|_q + |\eta|_q).$$

Ciò è pressochè immediato se  $q_j = 1$ ,  $1 \leq j \leq n$  e si prova per  $q$  arbitrario osservando che la trasformazione di  $\mathbb{R}^n$  in sè:

$$T: \xi \rightarrow (\operatorname{sgn} \xi_1 |\xi_1|^{1/q_1}, \dots, \operatorname{sgn} \xi_n |\xi_n|^{1/q_n}),$$

muta ogni intorno  $q$ -conico di  $\xi^0$  in un intorno conico dello stesso punto e verifica:

$$|T(\xi)| = \left( \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{2/q_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Poichè  $\chi_{N+N_0} u = \chi_{N+N_0} u_N$  si ha:

$$\begin{aligned} (\chi_{N+N_0} u)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{-n} \left( \int_{\eta \in \Gamma} \hat{\chi}_{N+N_0}(\xi - \eta) \hat{u}_N(\eta) d\eta + \int_{\eta \notin \Gamma} \hat{\chi}_{N+N_0}(\xi - \eta) \hat{u}_N(\eta) d\eta \right) = \\ &= I_1(\xi) + I_2(\xi). \end{aligned}$$

Da (1.8), (1.9), (1.10) segue, se  $\xi \in F$ :

$$\begin{aligned} |I_1(\xi)| &\leq \\ &\leq C_1^{N+1} C \int_{|\xi - \eta|_q \geq C_3(|\xi|_q + |\eta|_q)} \left( \frac{N^\sigma}{N^\sigma + |\xi - \eta|_q} \right)^{mM} \frac{(1 + |\eta|_q)^M}{(1 + |\xi - \eta|_q)^{(n+1+\sum_{j=1}^n q_j + M)}} d\eta \leq \\ &\leq C_3 (C_3 N^\sigma / (N^\sigma + |\xi|_q))^{mM}. \end{aligned}$$

Quanto ad  $I_2$  si ha:

$$I_2(\xi) = \int_{\substack{\eta \in \Gamma \\ |\xi - \eta|_q > \frac{1}{3}(|\xi|_q + |\eta|_q)}} \hat{\chi}_{N+N_0}(\xi - \eta) \hat{u}_N(\eta) d\eta + \\ + \int_{\substack{\eta \in \Gamma \\ |\xi - \eta|_q < \frac{1}{3}(|\xi|_q + |\eta|_q)}} \hat{\chi}_{N+N_0}(\eta) \hat{u}_N(\xi - \eta) d\eta = I_{2,1}(\xi) + I_{2,2}(\xi)$$

$I_{2,1}$  si valuta per  $\xi \in F$  come sopra  $I_1$ , mentre per  $I_{2,2}$ , osservato che:

$$|\xi - \eta|_q \leq \frac{1}{3}(|\xi|_q + |\eta|_q) \Rightarrow \frac{1}{2}|\xi|_q \leq |\eta|_q \leq 2|\xi|_q$$

si ha, utilizzando ancora (1.8) e (1.10):

$$|I_{2,2}(\xi)| \leq CC_1^{N+1} N^{\sigma m N} \int_{(1/2n)|\xi|_q \leq |\eta|_q \leq 2n|\xi|_q} \frac{(1 + (1/3n)|\xi|_q + (1/3n)|\eta|_q)^M}{|\eta|_q^{Nm} (1 + |\eta|_q)^{(n+1 + \sum_{j=1}^n a_j + M)}} d\eta \leq \\ \leq C_4 (C_4 N^\sigma / |\xi|_q)^{mN}.$$

**1.7. TEOREMA.** *La proiezione di  $WF_{\sigma q}(u)$  su  $\Omega$  è il complementare del più grande aperto in cui  $u \in \mathcal{G}^{\sigma q}$ .*

La dimostrazione, che si fonda sul Lemma 1.6, è analoga a quella del Teorema 3.2 in [3].

Si prova inoltre agevolmente il seguente:

**1.8. TEOREMA.** *Se  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $P(x, D)$  è un operatore differenziale lineare a coefficienti in  $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$ , allora:*

$$WF_{\sigma q}(Pu) \subset WF_{\sigma q}(u).$$

## 2. Fronte d'onda rispetto gli iterati di un operatore e rispetto le classi di Gevrey anisotrope.

**2.1. DEFINIZIONE.** *Sia  $q = (m_1/m, \dots, m_n/m)$ ,  $\sigma \geq 1$  e  $P(x, D)$  un operatore differenziale lineare a coefficienti in  $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$ , di  $q$ -ordine  $m_q$  in  $\Omega$ ,  $\Omega$  essendo un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Sia inoltre  $s \in \mathbb{R}$ . Indichiamo con  $\mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega; P)$  lo spazio delle distribuzioni  $u$  in  $\Omega$  tali che, per*

ogni compatto  $K \subset \Omega$  esiste una costante  $C_k$  verificante:

$$\|P^N u\|_{H^s(K)} \leq C_k (C_k N^s)^{m_s N} \quad N = 0, 1, \dots$$

dove  $H^s$  denota l'usuale spazio di Sobolev di ordine  $s$  e  $P^N$  l' $N$ -esimo iterato di  $P$ .

Poniamo inoltre:

$$\mathfrak{G}^{sa}(\Omega; P) = \bigcup_s \mathfrak{G}_s^{sa}(\Omega; P).$$

**2.2. LEMMA.** Sia  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Per ogni  $x^0 \in \Omega$  esiste un intorno  $V$  di  $x^0$  tale che  $u \in \mathfrak{G}^{sa}(V; P)$ , se e solo se esiste un intorno  $U$  di  $x^0$ ,  $U \subset\subset V$ , ed una successione  $\{f_N\} \subset \mathcal{E}'(V)$  tale che:

$$(2.1) \quad f_N = P^N u \quad \text{in } U, \quad N = 0, 1, \dots,$$

$$(2.2) \quad |f_N(\xi)| \leq C(CN^s)^{m_s N} (1 + |\xi|)^M \quad N = 0, 1, \dots,$$

dove  $C > 0$  ed  $M \in \mathbb{R}$  sono costanti opportune.

**DIM.** La dimostrazione che le condizioni indicate siano sufficienti è pressochè immediata. D'altro canto, supposto  $u \in \mathfrak{G}_s^{sa}(V; P)$  ed  $U$  come nell'enunciato, basta considerare una funzione  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(V)$  identicamente uguale ad 1 in  $U$  e porre  $f_N = \chi P^N u$ ,  $N = 0, 1, \dots$  perchè riescano soddisfatte (2.1) e (2.2) con  $M = -s$ .

**2.3. LEMMA.** Sia  $K$  un compatto contenuto in  $\Omega$ ,  $\{\chi_N\}$  una successione di funzioni in  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  soddisfacenti la condizione (1.3) ed  $\mathcal{F}$  un sottoinsieme di  $\mathfrak{G}^s(\Omega)$  tale che per ogni  $a \in \mathcal{F}$  sia:

$$(2.3) \quad \sup_K |D^\alpha a| \leq C(C\langle \alpha, q \rangle^s)^{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

dove  $C$  è la stessa costante che figura in (1.3).

Allora esiste una costante  $C_1$  tale che se  $\alpha_1, \dots, a_{j-1} \in \mathcal{F}$ ,  $\alpha^1, \dots, \alpha^j \in \mathbb{N}^n$  e  $\langle \alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^j, q \rangle \leq mN$

$$(2.4) \quad \sup_K |D^{\alpha^1} a_1 D^{\alpha^2} (a_2 \dots D^{\alpha^{j-1}} (a_{j-1} D^{\alpha^j} \chi_N) \dots)| \leq \\ \leq C_1^{N+1} \Gamma(\sigma \langle \alpha^1 + \dots + \alpha^j, q \rangle + 1).$$

DIM. La dimostrazione segue le linee di quella del Lemma 5.3 in [3]. Osserviamo innanzitutto che è sufficiente provare (2.4) nel caso in cui i multiindici  $\alpha^1, \dots, \alpha^j$  abbiano tutti altezza 1, poichè il caso generale è riconducibile a questo introducendo la funzione costante 1 tante volte quanto è necessario.

Si deve dunque provare che:

$$(2.5) \quad |D_{h_1}(a_1 D_{h_2}(a_2 \dots D_{h_{j-1}}(a_{j-1} D_{h_j} \chi_N) \dots))| \leq C'^{N+1} \Gamma(\sigma(q_{h_1} + \dots + q_{h_j}) + 1)$$

dove  $h_1, \dots, h_j \in \{1, \dots, n\}$  e  $D_{h_i} = -i(\partial/\partial x_{h_i})$ .

Sviluppando le derivate indicate a primo membro di (2.5) si ottiene:

$$\sum'_{\alpha^1 + \dots + \alpha^j = e^{h_1} + \dots + e^{h_j}} (D^{\alpha^1} a_1) (D^{\alpha^2} a_2) \dots (D^{\alpha^j} \chi_N)$$

dove  $\sum'$  sta ad indicare una somma opportuna ed  $e^{h_1}, \dots, e^{h_j}$  sono vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

Dalla (1.3), tenendo conto che se  $\langle \alpha, q \rangle \leq Nm$  allora

$$(Nm)^{\sigma \langle \alpha, q \rangle} \leq \Gamma(\sigma \langle \alpha, q \rangle + 1) e^{2Nm},$$

discende

$$\sup_K |D^\alpha \chi_N| \leq C_1^{N+1} \Gamma(\sigma < \alpha, q > + 1)$$

dove  $C_1 = C^m e^{2m}$ . Da questa e dalla (2.3) si ottiene dunque che il primo membro di (2.5) è maggiorato da:

$$C_2^{N+1} \sum'_{\alpha^1 + \dots + \alpha^j = e^{h_1} + \dots + e^{h_j}} \Gamma(\sigma \langle \alpha^1, q \rangle + 1) \Gamma(\sigma \langle \alpha^2, q \rangle + 1) \dots \Gamma(\sigma \langle \alpha^j, q \rangle + 1)$$

dove  $C_2$  è una nuova costante dipendente solo da  $C, C_1, q$ .

Non è difficile riconoscere che le  $j$ -ple di multiindici  $(\alpha^1, \dots, \alpha^j)$  rispetto alle quali si somma in  $\sum'$  sono tali che:

$$\begin{aligned} \sum'_{\alpha^1 + \dots + \alpha^j = e^{h_1} + \dots + e^{h_j}} x_1^{\sigma \langle \alpha^1, q \rangle} x_2^{\sigma \langle \alpha^2, q \rangle} \dots x_j^{\sigma \langle \alpha^j, q \rangle} = \\ = (x_1^{\sigma q_{h_1}} + \dots + x_j^{\sigma q_{h_1}}) (x_2^{\sigma q_{h_2}} + \dots + x_j^{\sigma q_{h_2}}) \dots (x_{j-1}^{\sigma q_{h_{j-1}}} + x_j^{\sigma q_{h_{j-1}}}) x_j^{\sigma q_{h_j}}. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 & \sum'_{\alpha^1 + \dots + \alpha^j = e^{h_1} + \dots + e^{h_j}} \Gamma(\sigma\langle\alpha^1, q\rangle + 1) \Gamma(\sigma\langle\alpha^2, q\rangle + 1) \dots \Gamma(\sigma\langle\alpha^j, q\rangle + 1) = \\
 & = \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} (x_1^{\sigma a_{h_1}} + \dots + x_j^{\sigma a_{h_j}}) (x_2^{\sigma a_{h_2}} + \dots + x_j^{\sigma a_{h_2}}) \dots (x_{j-1}^{\sigma a_{h_{j-1}}} + x_j^{\sigma a_{h_{j-1}}}) x_j^{\sigma a_{h_j}} \cdot \\
 & \cdot \exp[-(x_1 + \dots + x_j)] dx_1 \dots dx_j \leq \\
 & \leq \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} (x_1 + \dots + x_j)^{\sigma a_{h_1}} (x_2 + \dots + x_j)^{\sigma a_{h_2}} \dots (x_{j-1} + x_j)^{\sigma a_{h_{j-1}}} x_j^{\sigma a_{h_j}} \cdot \\
 & \cdot \exp[-(x_1 + \dots + x_j)] dx_1 \dots dx_j = \\
 & = \frac{\Gamma(\sigma(q_{h_1} + \dots + q_{h_j}) + 1)}{(\sigma q_{h_j} + 1)(\sigma q_{h_j} + \sigma q_{h_{j-1}} + 2) \dots (\sigma q_{h_j} + \dots + \sigma q_{h_2} + j - 1)} \leq \\
 & \leq 2(2^{\sigma \max a_h})^j \Gamma((q_{h_1} + \dots + q_{h_j}) + 1).
 \end{aligned}$$

Resta così provata (2.5).

**2.4. LEMMA.** *Sia  $P$  un operatore differenziale di  $q$ -ordine  $m_q$  con coefficienti  $\in \mathfrak{G}^q(\Omega)$ . Sia inoltre  $K$  un compatto  $\subset \Omega$  e  $\{\chi_N\}$  una successione di funzioni appartenenti a  $C_0^\infty(K)$  soddisfacenti (1.3).*

*Allora per ogni  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  esiste un  $p_0 > 0$  tale che se  $p > p_0$ ,  $r \geq 0$  la successione  $f_N = \chi_{pN+r} P^N u$  verifica:*

$$(2.6) \quad |f_N(\xi)| \leq C(C(N^\sigma + |\xi|_q))^{m_q N + M} \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad N = 0, 1, \dots$$

dove  $C > 0$  ed  $M \in \mathbb{R}$  sono costanti opportune.

**DIM.** È

$$(2.7) \quad f_N(\xi) = (u, {}^t P^N(\chi_{pN+r} \exp[-i\langle x, \xi \rangle]))$$

dove  ${}^t P$  denota l'aggiunto formale di  $P$ .

Sia:

$${}^t P(x, D) = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq m_q} \alpha_\alpha(x) D^\alpha$$

e siano  $0 = k_1 < k_2 < \dots < k_{s-1} < k_s = m_q$  gli elementi dell'insieme  $\{\langle \alpha, q \rangle : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$  non superiori ad  $m_q$ . Allora si ha:

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad {}^t P(\exp[-i\langle x, \xi \rangle] \chi_{pN+r}) &= \exp[-i\langle x, \xi \rangle] |\xi|_q^{m_q} R \chi_{pN+r} = \\
 &= \exp[i\langle x, \xi \rangle] |\xi|_q^{m_q} R \chi_{pN+r}
 \end{aligned}$$

dove:

$$R = R_1 + \dots + R_s$$

ed:

$$R_j = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq m_q} \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \langle \beta, q \rangle = k_j}} (-1)^\beta a_\alpha(x) \binom{\alpha}{\beta} \frac{\xi^\beta}{|\xi|_q^{m_q}} D^{\alpha-\beta} \quad j = 1, \dots, s$$

$R_j$  è dunque un operatore differenziale lineare di  $q$ -ordine  $\leq m_q - k_j$  a coefficienti  $\in \mathcal{G}^{\sigma q}(\Omega)$  in  $x$  e  $q$ -omogenei di grado  $-(m_q - k_j)$  in  $\xi$ . Da (2.8), per interazione, segue:

$$\begin{aligned} (2.9) \quad {}^t P^N(\exp[-i\langle x, \xi \rangle] \chi_{pN+r}) &= \exp[-i\langle x, \xi \rangle] |\xi|_q^{Nm_q} R^N \chi_{pN+r} = \\ &= \exp[-i\langle x, \xi \rangle] |\xi|_q^{Nm_q} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq s_1 \\ 1 \leq i \leq N}} R_{j_1} R_{j_2} \dots R_{j_N} \chi_{pN+r}. \end{aligned}$$

I coefficienti degli operatori  $R_j$ ,  $1 \leq j \leq s$ , quando  $|\xi|_q = 1$ , godono delle proprietà richieste nel Lemma 2.3 agli elementi di  $\mathcal{F}$ . Esiste quindi una costante  $C_1$  tale che se  $|\xi|_q = 1$  ed

$$\langle \alpha, q \rangle + Nm_q - k_{j_1} - \dots - k_{j_N} \leq (pN + r)m$$

si ha:

$$|D^\alpha R_{j_1} R_{j_2} \dots R_{j_N} \chi_{pN+r}| \leq C_1^{N+1} N^{\sigma(\langle \alpha, q \rangle + Nm_q - k_{j_1} - \dots - k_{j_N})}.$$

Per omogeneità è allora per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e per gli  $\alpha$  sopra indicati:

$$\begin{aligned} (2.10) \quad |D^\alpha R_{j_1} R_{j_2} \dots R_{j_N} \chi_{pN+r}| &\leq C_1^{N+1} |\xi|_q^{k_{j_1} + \dots + k_{j_N} - Nm_q} \cdot \\ &\cdot N^{\sigma(\langle \alpha, q \rangle + Nm_q - k_{j_1} - \dots - k_{j_N})}. \end{aligned}$$

Sia  $M$  il  $q$ -ordine di  $u$  su  $K$ . Posto allora  $p_0 = m_q/m$  se  $M < 0$ ,  $p_0 = (M + m_q)/m$  se  $M \geq 0$ , da (2.7), tenendo conto di (2.9) e (2.10), si ha se  $p \geq p_0$ ,  $r \geq 0$ :

$$\begin{aligned} |\hat{f}_N(\xi)| &\leq C_2^{N+1} |\xi|_q^{Nm_q} \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq M} (1 + |\xi|_q)^{M - \langle \alpha, q \rangle} \cdot \\ &\cdot \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq s \\ 1 \leq i \leq N}} |\xi|_q^{k_{j_1} + \dots + k_{j_N} - Nm_q} N^{\sigma(Nm_q + \langle \sigma, q \rangle - k_{j_1} - \dots - k_{j_N})} \leq C_3^{N+1} (N^\sigma + |\xi|_q)^{Nm_q + M}. \end{aligned}$$

Resta così provato (2.6).

2.5. DEFINIZIONE. Sia  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $P(x, D)$  un operatore differenziale lineare di  $q$ -ordine  $m_q$  a coefficienti in  $\mathcal{G}^q(\Omega)$ . Si dice che  $(x^0, \xi^0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  è nel complementare del fronte d'onda  $WF_{\sigma_q}(u; P)$  di  $u$  rispetto alla classe  $\mathcal{G}^q$  ed agli iterati di  $P$ , se esiste un intorno aperto  $U$  di  $x^0$ , un intorno aperto  $q$ -conico  $\Gamma$  di  $\xi^0$  ed una successione  $\{f_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ , tale che:

- j)  $f_N = P^N u$  in  $U$ ,  $N = 0, 1, \dots$ ,
- jj)  $|\hat{f}_N(\xi)| \leq C(N^\sigma + |\xi|_q)^{m_q N + M}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $N = 0, 1, \dots$ ,
- jjj)  $|\hat{f}_N(\xi)| \leq C(CN^\sigma)^{N m_q} (1 + |\xi|)^M$ ,  $\xi \in \Gamma$ ,  $N = 0, 1, \dots$ ,

con  $C > 0$  ed  $M \in \mathbb{R}$  costanti opportune.

2.6. LEMMA. Con le notazioni della Definizione 2.5, supponiamo  $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u; P)$ ,  $\xi^0 \neq 0$ . Sia  $K$  un intorno compatto di  $x^0$  contenuto in  $U$  ed  $F$  un intorno  $q$ -conico di  $\xi^0$  contenuto in  $\Gamma$ , chiuso in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Sia poi  $\{\chi_N\}$  una successione di funzioni appartenenti a  $\mathcal{C}_0^\infty(K)$  e soddisfacente la condizione (1.3).

Allora la successione  $\chi_{\mu N + r} P^N u$ , dove  $\mu$  ed  $r$  sono interi,  $\mu \geq m_q/m$ ,  $r \geq \left(\sum_{j=1}^n q_j + 1 + M\right)/m$ , soddisfa jjj) in  $F$ .

DIM. Si ha

$$\chi_{\mu N + r} P^N u = \chi_{\mu N + r} \hat{f}_N.$$

Quindi:

$$(2.12) \quad (\chi_{\mu N + r} P^N u)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \hat{\chi}_{\mu N + r}(\xi - \eta) \hat{f}_N(\eta) d\eta.$$

Dalla (1.3) con opportuni valori di  $\alpha$  si ottiene:

$$(2.13) \quad |\hat{\chi}_{\mu N + r}(\xi)| \leq C_1^{N+1} \left( \frac{N^\sigma}{N^\sigma + |\xi|_q} \right)^{(N\mu + r)m}$$

e

$$(2.14) \quad |\hat{\chi}_{\mu N + r}(\xi)| \leq C_1^{N+1} \left( \frac{N^\sigma}{1 + |\xi|_q} \right)^{mh}$$

dove  $h$  è il più piccolo intero positivo maggiore di  $\left(\sum_{j=1}^n q_j + M + 1\right)/m$ .

Per ogni  $\xi \in F$ , si può ora maggiorare il secondo membro di (2.12)

utilizzando jjj) e (2.14) per  $\eta \in \Gamma$ , jj), (2.13) e (1.10) per  $\eta \notin \Gamma$ . Si ottiene così la tesi.

Utilizzando il Lemma 2.6 si può provare:

**2.7. TEOREMA.** *Sia  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $P$  è un operatore differenziale a coefficienti in  $\mathcal{G}^{\sigma}(\Omega)$ . La proiezione di  $WF_{\sigma_q}(u; P)$  su  $\Omega$  è il complementare del più grande sottoinsieme aperto  $\Omega'$  di  $\Omega$  tale che per ogni  $x^0 \in \Omega'$  esiste un intorno  $V$  per il quale riesce  $u \in \mathcal{G}^{\sigma}(V; P)$ .*

**2.8. TEOREMA.** *Sia  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $P$  un operatore differenziale a coefficienti in  $\mathcal{G}^{\sigma}(\Omega)$ . Allora:*

$$WF_{\sigma_q}(u; P) \subset WF_{\sigma_q}(Pu) \subset WF_{\sigma_q}(u) .$$

**DIM.** Sia  $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u)$ . Esiste quindi un intorno aperto  $U$  di  $x^0$ , un intorno aperto  $q$ -conico  $\Gamma$  di  $\xi^0$  ed una successione  $\{u_N\}$  limitata in  $\mathcal{E}'(\Omega)$ , tale che:

$$u_N = u \text{ in } U ; \quad |\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CN^{\sigma}/|\xi|_q)^{mM} \quad \xi \in \Gamma, \quad N = 0, 1, \dots$$

Sia  $K$  un intorno compatto di  $x^0$  contenuto in  $U$  ed  $F$  un intorno  $q$ -conico di  $\xi^0$  contenuto in  $\Gamma$ , chiuso in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Sia poi  $\{\chi_N\}$  una successione di funzioni in  $\mathcal{C}_0^{\infty}(U)$ , identicamente uguali ad 1 in  $K$ , per la quale valga la condizione (3.1).

Indicati con  $\nu$ ,  $\mu$  e  $p$  tre numeri naturali tali che  $\nu m_q = \mu m$ ,  $p \geq \mu + m_q/m$ , poniamo  $f_N = \chi_{pN} P^N u$ . Si ha allora, con le notazioni del Lemma 2.4 (v. (2.9)):

$$\hat{f}_N(\xi) = |\xi|_q^{m_q N} (u, R \chi_{pN} \exp[-i\langle x, \xi \rangle]) = |\xi|_q^{m_q N} \widehat{\psi_N u}(\xi)$$

ove si è posto  $\psi_N = R^N \chi_{pN}$ . Dalla (2.10) segue poi:

$$|D^{\alpha} \psi_N(\xi)| \leq C^{N+1} N^{\sigma \langle \alpha, q \rangle} \quad \text{se } \langle \alpha, q \rangle \leq m \mu N, \quad |\xi|_q \geq N^{\sigma} .$$

Il Lemma 1.6 assicura allora che esiste un intorno  $N_0 > 0$  ed una costante  $\varepsilon_1$  tale che:

$$|\widehat{\psi_{N+N_0} u}(\xi)| \leq C_1 (C_1 N^{\sigma}/|\xi|_q)^{m \mu N} \quad \text{se } \xi \in F, \quad |\xi|_q > N^{\sigma} .$$

Quindi:

$$|\hat{f}_{N+N_0}(\xi)| \leq C_2(C_2 N^\sigma)^{Nm_q} |\xi|_q^{N_0 m_q} \quad \text{se } \xi \in \Gamma, \quad |\xi|_q > N^\sigma.$$

Per il Lemma 2.4  $f_N$ , e quindi anche  $f_{N+N_0}$ , soddisfa in  $\mathbb{R}^n$  la condizione jj) della Definizione 2.5. Da questa discende se  $|\xi|_q < N^\sigma$ :

$$|\hat{f}_{N+N_0}(\xi)| \leq C_2(C_2 N^\sigma)^{Nm_q} (1 + |\xi|_q)^M.$$

Così  $f_{N+N_0}$  verifica jjj) per ogni  $\xi \in F$  e  $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u; P)$ . Resta dunque provato che:

$$WF_{\sigma_q}(u; P) \subset WF_{\sigma_q}(u)$$

e quindi:

$$WF_{\sigma_q}(u; P) = WF_{\sigma_q}(Pu, P) \subset WF_{\sigma_q}(Pu).$$

Poichè il Teorema 1.8 assicura che  $WF_{\sigma_q}(Pu) \subset WF_{\sigma_q}(u)$ , la dimostrazione è completa.

Modificando opportunamente la dimostrazione del Lemma 3.5 di [1] si ottiene:

**2.9. LEMMA.** *Sia  $h$  un intero e  $P_0(x, \xi)$  un polinomio in  $\xi$   $q$ -omogeneo di grado  $m_q$  avente coefficienti in  $\mathcal{G}^{\sigma_q}(\Omega)$ . Siano poi  $V$  un sottoinsieme chiuso contenuto in  $\Omega$  ed  $F$  un sottoinsieme chiuso e  $q$ -conico contenuto in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tali che  $P_0(x, \xi) \neq 0$  per ogni  $(x, \xi) \in V \times F$ . Allora esiste una costante  $C$  tale che:*

$$(2.15) \quad |D_x^\alpha P_0^h(x, \xi)| \leq C^{|\alpha|+h} \Gamma(\langle \alpha, q \rangle + 1)^\sigma |\xi|_q^{hm_q} \quad (x, \xi) \in V \times F.$$

**2.10. TEOREMA.** *Sia  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $P(x, D)$  un operatore differenziale di  $q$ -ordine  $m_q$  a coefficienti in  $\mathcal{G}^{\sigma_q}(\Omega)$ . Allora:*

$$WF_{\sigma_q}(u) \subset WF_{\sigma_q}(u; P) \cup \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : P_0(x, \xi) = 0\}$$

dove  $P_0(x, \xi)$  è la parte di  $P(x, \xi)$   $q$ -omogenea di grado  $m_q$ .

**DIM.** Sia  $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u; P)$  e  $P_0(x^0, \xi^0) \neq 0$ . Esiste allora un intorno  $U$  di  $x^0$ , un intorno  $q$ -conico  $\Gamma$  di  $\xi^0$  ed una successione  $\{f_N\} \subset \mathcal{E}'(\Omega)$  verificante le condizioni j), jj), jjj) indicate nella Definizione 2.5. Sia  $K$  un intorno compatto di  $x^0$  contenuto in  $U$  ed  $F$  un intorno

q-conico di  $\xi^0$  contenuto in  $\Gamma$ , chiuso in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , tali che  $P_0(x, \xi) \neq 0$  in  $K \times F$ .

Sia  $\chi_n \in C_0^\infty(K)$ ,  $\chi_N = 1$  in un intorno  $V$  di  $x^0$  contenuto in  $K$ , soddisfacente inoltre la condizione (1.3).

Sia inoltre  $p$  un intero  $\geq 3m_q$ . Posto  $u_N = \chi_{pN} u$ , dimostreremo che  $\hat{u}_N(\xi)$  verifica per ogni  $\xi \in F$  la iii) della Definizione 1.5. Poichè le i) e ii) di tale definizione sono immediate, resterà allora provato che  $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u)$ .

Cominciamo con l'osservare che per ogni  $(x, \xi) \in K \times F$  si ha:

$$(2.18) \quad {}^tP(\exp[-i\langle x, \xi \rangle P_0^{-1}w] = \exp[-i\langle x, \xi \rangle](I - R)w$$

dove, posto  ${}^tP(x, D) = \sum_{\langle \alpha, a \rangle \leq m_q} a_\alpha(x) D^\alpha$  è  $R = R_1 + \dots + R_{s-1}$ , con

$$-R_j = \sum_{\substack{\langle \alpha, a \rangle \leq m_q \\ \langle \beta, a \rangle = k_j \\ \gamma \leq \alpha - \beta}} \frac{\alpha}{\beta! \gamma! (\alpha - \beta - \gamma)!} a_\alpha(x) (-\xi)^\beta (D^{\alpha - \beta - \gamma} P_0^{-1}) D^\gamma \quad 1 \leq j \leq s-1$$

e  $0 = k_1 < \dots < k_{s-1} < m_q$  come indicato nella dimostrazione del Lemma 2.4. Dunque  $R_j$  è un operatore differenziale di  $q$ -ordine  $\leq m_q - k_j$ , avente coefficienti in  $\mathcal{G}^{\sigma_q}(K)$  in  $x$  e  $q$ -omogenei di grado  $k_j - m_q$  in  $\xi$ , se  $(x, \xi) \in K \times F$ . Da (2.18) si deduce:

$$(2.19) \quad {}^tP^N(\exp[-i\langle x, \xi \rangle] P_0^{-N}w) = \exp[-i\langle x, \xi \rangle] ((I - R)P_0)^N P_0^{-N}w.$$

Usando un tipo di ragionamento già usato in [3], poniamo:

$$w_N = P_0^N \sum_{h_1 + \dots + h_N \leq mN} P_0^{-1} R^{h_1} P_0^{-1} R^{h_2} \dots P_0^{-1} R^{h_N} \chi_{pN}$$

ed

$$e_N = \sum_{j=1}^N ((I - R)P_0)^{N-j} \sum_{h_j + \dots + h_N = mN} R^{h_{j+1}} P_0^{-1} R^{h_{j+2}} \dots P_0^{-1} R^{h_N} \chi_{pN}$$

allora:

$${}^tP^N(\exp[-i\langle x, \xi \rangle] P_0^{-N}w_N) = \exp[-i\langle x, \xi \rangle] (\chi_{pN} - e_N).$$

Quindi, per la (2.19):

$$\exp[-i\langle x, \xi \rangle] \chi_{pN} = {}^tP^N(\exp[-i\langle x, \xi \rangle] P_0^{-N}w_N) + \exp[-i\langle x, \xi \rangle] e_N.$$

Poichè sul supporto di  $w_N$  è  $P^N w = f_N$ , discende da qui:

$$(2.20) \quad \hat{u}_N(\xi) = (P_0^{-N} w_N f_N)^\wedge(\xi) + (e_N u)^\wedge(\xi) \quad \xi \in F.$$

Dobbiamo valutare i due addendi a secondo membro. Cominceremo col provare una maggiorazione per  $D^\alpha(P_0^{-N} w_N)$ .

È:

$$P_0^{-N} w_N = \sum_{h_1 + \dots + h_N \leq mN} \sum_{\substack{1 \leq j \leq s-1 \\ 1 \leq j \leq h_1}} \dots \sum_{\substack{1 \leq N_j \leq s-1 \\ 1 \leq j \leq h_N}} P_0^{-1} R_1 \dots R_{1_{h_1}} P_0^{-1} R_{2_{h_1}} \dots R_{2_{h_2}} \dots \\ \dots P_0^{-1} R_{N_1} \dots R_{N_{h_N}} \chi_{pN}.$$

Utilizzando il Lemma 2.3, tenuto anche conto del Lemma 2.9 e della  $q$ -omogeneità in  $\xi$  di  $P_0^{-N} w_N$ , si ottiene, se  $\xi \in F$ ,  $|\xi|_q > N^\sigma$ ,  $\langle \alpha, q \rangle + m_a \sum_{1 \leq j \leq N} h_j - \sum^* k_{i_j} \leq pmN$ ,

$$|D^\alpha P_0^{-1} R_{1_1} \dots R_{1_{h_1}} P R_{2_1} \dots R_{2_{h_2}} \dots P_0^{-1} R_{N_1} \dots R_{N_{h_N}} \chi_{pN}| \leq \\ \leq C^{N+1} \Gamma \left( \sigma \left( \langle \alpha, q \rangle + m_a \sum_{1 \leq j \leq N} h_j - \sum^* k_{i_j} \right) + 1 \right) |\xi|_q^{-m_a N - m_a} \sum_{1 \leq j \leq N} h_j + \sum^* k_{i_j}$$

dove  $\sum^*$  sta ad indicare la somma per  $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq j \leq h_j$ ,  $1 \leq i_j \leq s-1$ . Tenuto conto che il numero degli addendi nello sviluppo di  $P_0^{-N} w_N$  è maggiorato da  $C_0^N$ , dove  $C_0$  dipende solo da  $n$  e  $q$  e che  $m_a \sum_{1 \leq j \leq N} h_j + \sum^* k_{i_j} \leq (p-1)mN$ , si ha con una nuova costante  $C$ :

$$|D^\alpha P_0^{-N} w_N| \leq C^{N+1} N^{\sigma \langle \alpha, q \rangle} |\xi|_q^{-m_a N}$$

se  $\langle \alpha, q \rangle \leq mN(p - m_a)$ ,  $\xi \in F$ ,  $|\xi|_q \geq N^\sigma$ ,  $N$  sufficientemente grande. Il Lemma 2.6 assicura allora che è:

$$(2.21) \quad |(P_0^{-N} w_N f_N)^\wedge(\xi)| \leq C^{N+1} (N^\sigma / |\xi|_q)^{m_a N} |\xi|^M$$

se  $\xi \in F$ ,  $|\xi|_q \geq N^\sigma$ ,  $N \gg$ .

Resta da valutare  $e_N$ . Lo sviluppo di  $e_N$  è:

$$e_N = \sum_{j=1}^N \sum_{d_1 + l_1 + \dots + d_r + l_r = N-j} \sum_{h_j + \dots + h_N = mN} \sum_{\substack{1 \leq i \leq s-1 \\ 1 \leq i \leq l_1}} \dots \sum_{\substack{1 \leq r_i \leq s-1 \\ 1 \leq i \leq l_r}} \cdot \\ \cdot \sum_{\substack{1 \leq j_i \leq s-1 \\ 1 \leq i \leq h_j+1}} \dots \sum_{\substack{1 \leq N_i \leq s-1 \\ 1 \leq i \leq h_N}} (-1)^{l_1 + \dots + l_r} R_{1_1} P_0 \dots R_{1_{l_1}} P_0 P_0^{d_1} \dots \\ \dots R_{r_1} P_0 \dots R_{r_{l_r}} P_0 P_0^{d_r} R_{j_1} \dots R_{j_{h_j+1}} P_0^{-1} \dots R_{N_1} \dots R_{N_{h_N}} P_0^{-1} \chi_{pN}.$$

Ragionando come sopra per  $w_N$  si ha se  $\xi \in F$ ,  $|\xi|_q \geq N^\sigma$ ,

$$\langle \alpha, q \rangle + m_a \sum_{1 \leq i \leq l_r} l_i - \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq v \leq l_i \\ 1 \leq i_v \leq s-1}} K_{i_v} + m_q(Nm+1) - \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ 1 \leq v \leq h_j \\ 1 \leq i_v \leq s-1}} K_{i_v} - K_{i_{h_{j+1}}} \leq mpN,$$

$$|D^\alpha R_{i_1} P_0 \dots R_{N_{h_N}} P_0^{-1}| \leq C^{N+1} N^{\sigma \langle \alpha, q \rangle} (N^\sigma / |\xi|_q)^{dmN}$$

dove  $d = m_a - k_{s-1}$  e si è tenuto conto del fatto che

$$(2.22) \quad m_a \sum_{1 \leq i \leq r} l_i - \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq v \leq l_i \\ 1 \leq i_v \leq s-1}} k_{i_v} + m_q(Nm+1) - \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ 1 \leq v \leq h_j \\ 1 \leq i_v \leq s-1}} K_{i_v} - K_{i_{h_{j+1}}} \geq dmN.$$

Poichè il primo membro di (2.22) è maggiorato da  $m(p-1)N$  ed il numero degli addendi in  $e_N$  da  $C_0^N$  si ha:

$$|D^\alpha e_N| \leq C^{N+1} N^{\sigma \langle \alpha, q \rangle} (N^\sigma / |\xi|_q)^{dmN} \quad \xi \in F, \quad |\xi|_q \geq N^\sigma, \quad \langle \alpha, q \rangle \leq Nm.$$

Quindi:

$$(2.23) \quad |(e_N u)^\wedge| \leq C^{N+1} (N^\sigma / |\xi|_q)^{dmN} |\xi|^{M_2} \quad \xi \in F, \quad |\xi|_q \geq N^\sigma, \quad \langle \alpha, q \rangle \leq Nm$$

dove  $M_2$  è una costante che dipende dall'ordine di  $u$  su  $K$ .

Da (2.20), (2.21), (2.23), posto  $\delta = \min(m_a, md)$ , discende

$$|\hat{u}_N(\xi)| \leq C^{N+1} (N^\sigma / |\xi|_q)^{\delta N} |\xi|_q^M \quad \xi \in F, \quad |\xi|_q \geq N^\sigma, \quad N \gg$$

e da qui si deduce facilmente che  $(x^0, \xi^0) \notin WF_{\sigma_q}(u)$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] P. BOLLEY - J. CAMUS, *Regularité Gevrey et itérés pour une classe d'opérateurs hypoelliptiques*, 1980.
- [2] P. BOLLEY - J. CAMUS - C. MATTERA, *Analyticité microlocale et itérés d'opérateurs*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1978-79.
- [3] L. HÖRMANDER, *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients*, Comm. Pure Appl. Math., **24** (1971), pp. 671-704.

- [4] R. LASCAR, *Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi-homogènes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **27**, (1977), pp. 79-123.
- [5] C. PARENTI - L. RODINO, *Parametrices for a class of pseudo-differential operators. I e II*, Ann. Mat. pure e appl., (IV), **125** (1980), pp. 221-278.
- [6] L. RODINO, *Microlocal analysis for spatially inhomogeneous pseudo-differential operators*.
- [7] L. P. VOLEVIC, *Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi-ellittici*, Mat. Sbornik, **59** (1962), pp. 3-52 (in russo).
- [8] L. ZANGHIRATI, *Iterati di operatori quasi-ellittici e classi di Gevrey*, Boll. dell'Un. Mat. Ital. (5), **18-B** (1981).
- [9] L. ZANGHIRATI, *Iterati di una classe di operatori ipoellittici e classi generalizzate di Gevrey*, Suppl. Boll. Un. Mat. Ital., **1** (1980), pp. 177-195.
- [10] L. ZANGHIRATI, *Complementi al teorema degli iterati quasi-ellittici*. Boll. Suppl. Boll. Un. Mat. Ital., (6), **1-A** (1982), pp. 137, 143.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 maggio 1981.