RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

S. BALDASSARRI-GHEZZO
S. CHIARUTTINI

Sulla rappresentazione di certi $\tilde{A}$-moduli

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 67 (1982), p. 161-169
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1982__67__161_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol 67 (1982)

Sulla rappresentazione di certi $\tilde{A}$-moduli.

S. BALDASSARRI GHEZZO - S. CHIARUTTINI (*)

Viene provato, sopra un esempio notevole, come possa costruirsi un fascio di moduli $\mathcal{M}^*$, isomorfo ad un dato $\mathcal{A}$-modulo localmente libero di rango $n > 1$ su una varietà algebrica affine $V = (V, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A} \in$ P.E., (vedi n. 1), di dimensione maggiore di 1 su un corpo algebricamente chiuso, $\mathcal{M}^*$ essendo siffatto da avere una sezione globale i cui germi sono fra i generatori liberi di $\mathcal{M}^*_x$ su ogni punto $x \in V$.

Più in particolare:

Sulla varietà algebrica $V = (V, \mathcal{A})$ di anello

$$A = k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]/(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)$$

sopra un corpo k algebricamente chiuso, si considera il sotto-$\mathcal{A}$-modulo localmente libero $\mathcal{M}$ di $\mathcal{A}^2$ generato in ogni punto da

$$m_1 = (-x_2, -x_3)\,, \qquad m_2 = (x_1, 0)\,, \qquad m_3 = (0, x_1);$$

e sull'aperto $D(x_1)$, complementare di $x_1 = 0$ in V, il sottofascio $\overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}$ di $\mathcal{M}/D(x_1)$, generato da m_1 ed m_2.

Sia H il chiuso $x_2 = x_3 = 0$ in V, allora è $H \subset D(x_1)$, inoltre $D(H)$ e $D(x_1)$ costituiscono un ricoprimento di V, e $\Gamma(D(H), \mathcal{M}) \simeq \Gamma(V, \mathcal{M})$ perchè H ha codimensione maggiore di 1 in V e $V \in$ P.E.

Associando ad ogni aperto U di V con $U \subseteq D(H)$, il $\Gamma(U, \mathcal{A})$-modulo $\Gamma(U, \mathcal{M})$, e ad ogni altro aperto U di V, $(U \cap H \neq \emptyset)$, il $\Gamma(U, \mathcal{A})$-

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Matem. Applicata, Università, Via Belzoni 7, Padova.

modulo generato da m_1 ed m_2, ed inoltre ad ogni inclusione di aperti la restrizione canonica dei moduli associati, si ottiene un sottofascio proprio $\overline{\mathcal{M}}'$ di $\mathcal{M}$. $\overline{\mathcal{M}}'$ così definito, risulta localmente libero di rango 2, isomorfo ad $\mathcal{M}$ fuori di H, ed esso ammette una sezione globale, quella rappresentata da m_1, i cui germi sono fra i generatori liberi delle fibre $\overline{\mathcal{M}}'_x$ in ogni punto x di V.

Però $\overline{\mathcal{M}}'$ possiede fibre generate da germi non tutti appartenenti a sezioni globali, (per esempio sui punti x del chiuso $x_1 = x_3 = 0$ le fibre $\overline{\mathcal{M}}'_x$ sono generate da m_1 ed m_3, ed m_3 non è sezione globale in $\overline{\mathcal{M}}'$).

In questo lavoro, tramite i fasci $\big(D(H), \mathcal{M}/D(H)\big)$ e $\big(D(x_1), \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}\big)$, si dà una rappresentazione di un fascio $\mathcal{M}^*$ riducibile e isomorfo ad $\mathcal{M}$.

1. Richiamiamo per comodità alcune notazioni usate in [1], [2] e [3], e che vengono qui conservate; in particolare i riferimenti a [1] indicano il verificarsi delle ipotesi richieste dal caso generale.

Precisamente: k è un corpo commutativo, algebricamente chiuso, ed $A = k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]/(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)$ è un dominio d'integrità noetheriano che gode della proprietà di estensione, cioè è tale che, per ogni suo ideale I di altezza maggiore di 1, nel corpo totale delle frazioni di A, risulta, per tutti gli ideali primi p di A che non contengono I, $\bigcap\limits_{p \not\supset I} A_p = A$, ([1], nn. 1 e 2; [2], n. 1; [3], nn. 5 e 7).

M è il sottomodulo di A^2 generato su A dagli elementi $m_1 = (-x_2, -x_3)$, $m_2 = (x_1, 0)$, $m_3 = (0, x_1)$, i quali soddisfano alla relazione $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i m_i = 0$, ([1], n. 3; [2], n. 1; [3], n. 7).

Indichiamo con $\mathcal{A} = \tilde{A}$ il fascio strutturale dello spettro primo $X = \operatorname{Spec} A$, e con $\mathcal{M} = \tilde{M}$ il fascio associato ad M. Notiamo che $\mathcal{M}$ è un $\mathcal{A}$-modulo localmente libero di rango 2, e quindi, al pari di $\mathcal{A}$, esso è coerente, privo di torsione, e gode della proprietà di estensione, ($\mathcal{A} \in$ P.E. ed $\mathcal{M} \in$ P.E.), cioè ogni sezione definita fuori di un chiuso H di codimensione maggiore di 1 in X, è restrizione di una sezione globale, quindi, indicando con $D(H)$ il complementare di H in X, l'omomorfismo canonico iniettivo $\Gamma(X, \mathcal{M}) \to \Gamma\big(D(H), \mathcal{M}\big)$ è anche suriettivo, ([2], n. 2; [3], nn. 6 e 7; [5], n. 4).

Consideriamo l'ideale $\bar{x} = \langle x_2, x_3 \rangle$ di A, generato dalle componenti della sezione m_1 di $\mathcal{M}$, esso individua nello spazio X un chiuso $H = V(\bar{x}) \subset D(x_1)$, di codimensione maggiore di 1 in X. Nelle fibre di $\mathcal{M}$ sopra i punti di H, è $m_1 = -(x_2/x_1)m_2 - (x_3/x_1)m_3$. Allora se $M_{\bar{x}}$ è il modulo delle frazioni di M con denominatori fuori di $\bar{x}$, consideriamo il sottomodulo $\overline{M}$ di $M_{\bar{x}}$ generato su $A_{\bar{x}}$ da m_2 ed $\overline{m}_3 = (x_3/x_1)m_3$, e sull'aperto $D(x_1)$ contenente H, rappresentiamo con $\overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}$ il sotto-$\mathcal{A}/D(x_1)$-modulo di $\mathcal{M}/D(x_1)$ generato liberamente da m_2 ed $\overline{m}_3$, per cui è $\overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})\bar{x}} = \overline{M}$, ([4], (0, (5.3.11))).

Fra $\overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}$ ed $\mathcal{M}/D(x_1)$ esiste l'isomorfismo ([6], prop. 1, p. 207) di $\mathcal{A}/D(x_1)$-moduli

$$\varepsilon_{\bar{x}}: \begin{cases} m_2 \to m_2 \\ \overline{m}_3 \to m_3 \end{cases} \tag{1}$$

ed $\overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}$ ammette in ogni punto di $D(x_1)$ un sistema di generatori liberi contenente il germe della sezione $m_1 = -(x_2/x_1)m_2 - \overline{m}_3$, ([1], n. 6; [2], n. 3; [3], n. 7). Inoltre $D(x_1)$ e $D(H)$ costituiscono un ricoprimento di X, ed il fascio definito per incollamento da $(D(x_1), \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})})$ e $(D(H), \mathcal{M}/D(H))$ è localmente isomorfo ad $\mathcal{M}$, e ad esso isomorfo fuori di H, perciò è ad esso isomorfo su X, ([2], n. 4); ne daremo un'altra rappresentazione.

2. Consideriamo ancora l'isomorfismo (1) del n. precedente

$$\varepsilon_{\bar{x}}: \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})} \to \mathcal{M}/D(x_1)$$

definito da $m_2 \mapsto m_2$, $\overline{m}_3 \mapsto m_3$, con $\overline{m}_3 = (0, x_3)$, e sia ϑ l'isomorfismo indotto da $\varepsilon_{\bar{x}}^{-1}$ fra i $\Gamma(D(x_1), \mathcal{A})$-moduli $\Gamma(D(H) \cap D(x_1), \mathcal{M})$, (il quale per la P.E. è isomorfo a $\Gamma(D(x_1), \mathcal{M})$), e $\Gamma(D(x_1), \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})})$. Esso opera moltiplicando le seconde componenti per x_3/x_1.

Nell'insieme prodotto cartesiano

$$\Gamma(D(H), \mathcal{M}) \times \Gamma(D(H) \cap D(x_1), \mathcal{M}) \times \Gamma(D(x_1), \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}),$$

sia $\mathfrak{J}$ il sottoinsieme delle terne rappresentate da

$$\big(m,\ m + a(0, x_3 - x_1),\ \vartheta(m + a(0, x_3 - x_1))\big),$$

con $m \in M$ ed $a \in A$, le quali saranno indicate con $(m; a)$.

3. Introduciamo in $\mathfrak{J}$ la relazione d'equivalenza $R_{\mathfrak{J}}$

$$(m; a)\, R_{\mathfrak{J}}\, (n; b) \Leftrightarrow m = n,$$

e rappresentiamo gli elementi dell'insieme quoziente $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$ con

$$\{m\} = \Big\{\big(m,\ m + a(0, x_3 - x_1),\ \vartheta(m + a(0, x_3 - x_1))\big)\Big\}$$

dove a varia in A.

Esiste una biiezione naturale di $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$ su $\Gamma(D(H), \mathcal{M}) \cong M$.

Inoltre con la somma $\{m\} + \{n\} = \{m + n\}$, ed il prodotto $h\{m\} = \{hm\}$ per $h \in A$, $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$ diventa un A-modulo M^* privo di torsione, generato dagli elementi $\{m_1\} = \{(-x_2, -x_3)\}$, $\{m_2\} = \{(x_1, 0)\}$ ed $\{m_3\} = \{(0, x_1)\}$, con la relazione $\sum_{i=1}^{3} x_i\{m_i\} = \Big\{\sum_{i=1}^{3} x_i m_i\Big\}$, e quindi isomorfo ad M.

4. Osserviamo ora che per ogni elemento

$$m = \bar{a}m_1 + \bar{b}m_2 + \bar{c}m_3 = (-\bar{a}x_2 + \bar{b}x_1,\ -\bar{a}x_3 + \bar{c}x_1) \tag{2}$$

di M, si può scegliere una rappresentazione nel modo seguente: se $\bar{a}$, $\Big($scritto senza somme parziali nulle, come $+h - h$ e $\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - 1\Big)$, possiede addendi multipli di $x_2 y_2$, riduciamoli in A, modulo $\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - 1$, e sia $\bar{a}'$ l'espressione così ottenuta, la quale fornisce un rappresentante di $\bar{a}$ scelto in $k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$.

Mettiamo poi in evidenza in $\bar{a}'$ tutti gli addendi che contengono il fattore x_1, e scriviamo

$$\bar{a}' = a_1 x_1 + a_2; \tag{2$'$}$$

dunque a_2 appartiene a $k[x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$ ed è privo di addendi in $Ax_2 y_2$. Possiamo allora usare, per l'elemento $m \in M$ della (2), la seguente scrittura:

$$m^* = \big(-a_2 x_2 + (\bar{b} - a_1 x_2)x_1,\ -a_2 x_3 + (\bar{c} - a_1 x_3)x_1\big),$$

cioè dopo la riduzione in M modulo $\sum_{i=1}^{3} x_i m_i$, e indicando con a_1 e a_2 anche gli elementi di A che essi rappresentano, si ottiene per m la seguente espressione, che diremo *ridotta*:

$$(3) \qquad m^* = a_2 m_1 + (\bar{b} - a_1 x_2) m_2 + (\bar{c} - a_1 x_3) m_3 = a_2 m_1 + b m_2 + c m_3$$

con $b, c \in A$ ed a_2 è il rappresentante in $k[x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$, privo di addendi in Ax_2y_2, di un elemento di A.

Le rappresentazioni ridotte degli elementi di M, con le operazioni di M, e con le relazioni

$$x_2 y_2 m_1 = (1 - x_3 y_3)\, m_1 + y_1(x_2 m_2 + x_3 m_3) \quad \text{e} \quad x_1 m_1 = - x_2 m_2 - x_3 m_3 ,$$

sono un sistema di generatori del modulo M, anzi costituiscono un insieme di rappresentanti in A^2 degli elementi di M stesso. Si osservi che se per ogni $\alpha \in A$ si prende la rappresentazione come la $(2)'$, si ha

$$\alpha m^* = \alpha_2 a_2 m_1 + (\alpha b - \alpha_1 a_2 x_2) m_2 + (\alpha c - \alpha_1 a_2 x_3) m_3 ,$$

e riducendo ulteriormente $\alpha_2 \alpha_2$, nel caso contenesse addendi in Ax_2y_2, si ottiene $(\alpha m^*)^* = (\alpha m)^*$.

5. Torniamo ora all'insieme $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$ degli elementi di M^*, (n. 3). Con la rappresentazione del numero precedente ogni elemento di $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$ può scriversi

$$\{m\} = \{m^*\} = \Big\{\big(m^*,\, m^* + a(0, x_3 - x_1),\, \vartheta(m^* + a(0, x_3 - x_1))\big)\Big\} ,$$

ed allora esso individua quel suo rappresentante in $\mathfrak{J}$, indichiamolo con $\{m\}^* = (m^*; a_2)$, che si ottiene per $a = a_2$, cioè

$$\begin{aligned}(4) \qquad \{m\}^* &= \big(m^*,\, m^* + a_2(0, x_3 - x_1),\, \vartheta(m^* + a_2(0, x_3 - x_1))\big) = \\ &= \big(a_2 m_1 + b m_2 + c m_3,\, a_2(m_1 + (0, x_3 - x_1)) + b m_2 + c m_3, \\ &\qquad\qquad a_2 m_1 + b m_2 + c(x_3/x_1) m_3\big)\end{aligned}$$

con $a_2 \in k[x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$, e $b, c \in A$, e dove a_2 è anche privo di addendi multipli di $x_2 y_2$.

Posto $\overline{m}_1 = m_1 + (0, x_3 - x_1)$ ed $\overline{m}_3 = (x_3/x_1) m_3$, è

$$\begin{aligned}(4)' \qquad \{m\}^* = (&a_2 m_1 + b m_2 + c m_3,\, a_2 \overline{m}_1 + b m_2 + c m_3, \\ &a_2 m_1 + b m_2 + c \overline{m}_3) .\end{aligned}$$

Si noti che per $\alpha \in A$ risulta $\alpha\{m\}^* \in \{\alpha m^*\} = \{(\alpha m)^*\}$.

Osserviamo infine che qui, non solo $\{m\}$ individua $\{m\}^*$ e viceversa, ma anche ciascuna delle proiezioni $\mathrm{pr}_1(\{m\}^*)$, $\mathrm{pr}_2(\{m\}^*)$ e $\mathrm{pr}_3(\{m\}^*)$ individua $\{m\}$. Infatti da $\mathrm{pr}_2(\{m\}^*) = \vartheta^{-1}\cdot \mathrm{pr}_3(\{m\}^*) = (-a_2x_2 + bx_1, \gamma x_1)$ si ottiene $\mathrm{pr}_1(\{m\}^*) = (-a_2x_2 + bx_1, -a_2x_3 + (\gamma + a_2)x_1)$.

6. Sia $\mathfrak{J}^*$ l'insieme degli $\{m\}^* = (m^*; a_2)$ definiti al numero precedente, che rappresentano, in $\mathfrak{J}$, gli elementi di $\mathfrak{J}/R_{\mathfrak{J}}$, e quindi del modulo M^*.

Essi, con le relazioni

$$(5) \qquad \alpha\{m\}^* = \{\alpha m\}^* , \quad \text{per } \alpha \in A , \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{3} x_i\{m_i\}^* = 0 ,$$

costituiscono dunque un insieme di generatori di un modulo $\mathfrak{J}^*$, di rappresentanti degli elementi di M^*.

Inoltre l'insieme $\mathrm{pr}_2(\mathfrak{J}^*)$ delle seconde componenti degli elementi di $\mathfrak{J}^*$, con la relazione $x_1\overline{m}_1 + x_2m_2 + x_1m_3 = 0$, cioè con la

$$(6) \qquad x_1(-x_2, -x_1) + x_2(x_1, 0) + x_1(0, x_1) = 0 ,$$

sono i generatori di un sotto A-modulo G di $\Gamma(D(H) \cap D(x_1), \mathcal{M})$ Allora la biiezione h: $\mathrm{pr}_2(\mathfrak{J}^*) \to M^*$, esistente per l'osservazione finale del n. precedente, si estende ad un omomorfismo δ di G in M^*, perchè la relazione (6) su $\mathrm{pr}_2(\mathfrak{J}^*)$ si trasforma, mediante h, in una combinazione lineare delle relazioni (5) su $\mathfrak{J}^*$.

Infatti la (6) in $\mathrm{pr}_2(\mathfrak{J}^*)$ equivale alla

$$(6)' \qquad \mathrm{pr}_2(\{x_1m_1\}^*) + (x_3 - x_1)\,\mathrm{pr}_2(\{m_3\}^*) + x_2\,\mathrm{pr}_2(\{m_2\}^*) + x_1\,\mathrm{pr}_2(\{m_3\}^*) = 0 ,$$

e la sua trasformata in $\mathfrak{J}^*$ è

$$\{x_1m_1\}^* + (x_3 - x_1)\{m_3\}^* + x_2\{m_2\}^* + x_1\{m_3\}^* = \sum_{i=1}^{3} x_i\{m_i\}^* + \{x_1m_1\}^* - x_1\{m_1\}^* = 0 .$$

Inoltre l'omomorfismo δ risulta suriettivo, e il suo inverso a sinistra è $\delta^{-1} = h^{-1}$, il quale è un monomorfismo di M^* su $\mathrm{pr}_2\{\mathfrak{J}^*\}$ con la struttura di G. Risulta allora anche l'esistenza di un monomorfismo di M^* su $\mathrm{pr}_3\{\mathfrak{J}^*\} \subset \Gamma(D(x_1), \overline{U}_{(\overline{x})})$.

Infine osserviamo che, se per ogni $\{m\}^* \in \mathfrak{I}^*$ consideriamo la coppia $\varphi(\{m\}^*) = \big(m^*, \vartheta(m^* + a_2(0, x_3 - x_1))\big)$, otteniamo in

$$\Gamma(D(H), \mathcal{M}) \times \Gamma\big(D(x_1), \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})}\big)$$

un insieme $\varphi(\mathfrak{I}^*)$ di elementi, i quali con le relazioni

$$(8) \qquad \alpha(\varphi\{m\}^*) = \varphi(\{\alpha m\}^*) \quad \text{per ogni } \alpha \in A\,, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{3} x_i \varphi(\{m_i\}^*) = 0\,,$$

generano un modulo che indichiamo con $\varphi(M^*)$, isomorfo ad M.

7. Costruiamo ora, conservando le notazioni (3), (4) e (4)′ fin qui usate, il seguente funtore $\mathcal{M}^*$:

Per ogni aperto U di X,

I) se è $U \not\subset D(H)$ e $U \not\subset D(x_1)$, gli associamo il $\Gamma(U, \mathcal{A})$-modulo $\Gamma(U, \mathcal{A}) \bigotimes_A \varphi(M^*)$, rappresentando convenientemente, tramite $\mathfrak{I}^*$, i suoi elementi $\alpha \bigotimes_A \varphi(\{m\}^*)$, e precisamente, se f/g è la frazione irriducibile che rappresenta $\alpha \in \Gamma(U, \mathcal{A})$, (qui $g \notin Ax_1$), dividiamo g ed m^* (v. (4)′, n. 5; e (3), n. 4) per gli eventuali fattori ad essi comuni e scriviamo $\alpha \bigotimes_A \varphi(\{m\}^*) = (1/g') \bigotimes_A f \cdot \varphi(\{m'\}^*) = (1/g') \bigotimes_A \varphi(\{fm'\}^*)$; di modo che gli elementi di $\Gamma(U, \mathcal{A}) \bigotimes_A \varphi(M^*)$ possono tutti scriversi nella forma $(1/g) \bigotimes_A \varphi(\{m\}^*)$ con $\{m\}^* \in \mathfrak{I}^*$, (e $g \notin Ax_1$).

II) se è $U \subset D(H)$ e $U \not\subset D(x_1)$, gli associamo il $\Gamma(U, \mathcal{A})$-modulo $\Gamma(U, \mathcal{M})$, il quale è isomorfo al modulo $\Gamma(U, \mathcal{A}) \bigotimes_A \varphi(M^*)$ (rappresentato come detto in I)) nell'isomorfismo pr_1, definito da

$$\mathrm{pr}_1\Big((1/g) \bigotimes_A \varphi(\{m\}^*)\Big) = (1/g)\, m^*.$$

III) se $U \subset D(x_1)$ e $U \not\subset D(H)$, e quindi $U \neq U \cap D(H)$, gli associamo il modulo $\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})})$ generato su $\Gamma(U, \mathcal{A})$ da $m_2 = (x_1, 0)$ ed $\overline{m}_3 = (0, x_3)$.

IV) se è $U \subset D(H) \cap D(x_1)$, gli associamo il $\Gamma(U, \mathcal{A})$-modulo $\Gamma(U, \mathcal{A}) \bigotimes_A \varphi(M^*)$ rappresentato come detto in I), ricordando che m^* può contenere il fattore x_1 se e solo se $a_2 = 0$, cioè se è $m^* = bm_2 + cm_3$, nel qual caso però, per conservare la rappresentazione tramite gli elementi di $\mathfrak{J}^*$, la riduzione di fattori x_1 comuni con g, sarà fatta se e solo se, qualora non sia più $b = x_1 b'$ e $c = x_1 c'$, sia tuttavia ancora $b = hx_2$ e $c = hx_3$, per cui è $bm_2 + cm_3 = -hx_1 m_1$.

Inoltre alle inclusioni degli aperti U' dei tipi II), III), e IV), in quelli, U, del tipo I), associamo come morfismi $\varrho^u_{u'}$ fra i moduli corrispondenti, rispettivamente le iniezioni pr_1, pr_2 e l'iniezione naturale fornita dalla restrizione, con

$$\mathrm{pr}_i \left((1/g) \bigotimes_A \varphi(\{m\}^*)\right) = (1/g) \bigotimes_A \mathrm{pr}_i \left(\varphi(\{m\}^*)\right).$$

All'inclusione d'un aperto del tipo IV) in uno del tipo II), associamo l'iniezione pr_1^{-1}, che si ottiene fra i moduli associati, tramite l'isomorfismo pr_1, di cui è detto in II).

Per definire la restrizione $\varrho^U_{U'}$ corrispondente all'inclusione d'un aperto del tipo IV) in uno del tipo III), osserviamo che ogni elemento $\xi = \alpha m_2 + \beta \overline{m}_3 \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_{(\overline{x})})$ può scriversi dapprima $\xi = (f_2 m_2 + f_3 \overline{m}_3)/g_1$, dove f_2 ed f_3 non abbiano un fattore in comune con g_1, dopo di che ancora, se è simultaneamente

$$(9) \qquad g_1 = x_1 g\,, \qquad f_2 = bx_1 - a_2 x_2 \qquad \text{ed} \qquad f_3 = cx_1 - a_2 x_1$$

si scriverà $\xi = (1/g) \bigotimes_A \mathrm{pr}_2 \left(\varphi(\{a_2 m_1 + bm_2 + cm_3\}^*)\right)$; e in caso contrario, se qualcuna delle (9) non vale, si scriverà $\xi = (1/g_1) \bigotimes_A \mathrm{pr}_2 \left(\varphi(\{f_2 m_2 + f_3 m_3\}^*)\right)$.

Poniamo allora comunque $\varrho^U_{U'} = \mathrm{pr}_2^{-1}$, con $\mathrm{pr}_2^{-1}\left(1/g \otimes \mathrm{pr}_2\left(\varphi(\;)\right)\right) = 1/g \otimes \varphi(\;)$.

(Per es.: per $\xi = (x_2, x_3) = (x_2 m_2 + x_1 \overline{m}_3)/x_1 \in \Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_{(\overline{x})})$, essendo allora qui, per le (9), $b = c = 0$ e $a = -1$, risulta $\xi = -\mathrm{pr}_2\, \varphi(\{m_1\}^*)$, infatti, ((4) n. 5; e (6) n. 6), $\vartheta^{-1}(\xi) = (x_2 m_2 + x_1 m_3)/x_1 = -x_1 \overline{m}_1/x_1 = -\overline{m}_1 = -\mathrm{pr}_2 \{m_1\}^*$. Invece per $\xi = \left(x_2, (x_3^2/x_1)\right) = (x_2 m_2 + x_3 \overline{m}_3)/x_1$, risulta

$$\vartheta^{-1}(\xi) = (x_2 m_2 + x_3 m_3)/x_1 = (1/x_1) \bigotimes_A \mathrm{pr}_2 \left(\{x_2 m_2 + x_3 m_3\}^*\right)$$

e quindi $\xi = (1/x_1) \otimes \mathrm{pr}_2\, \varphi(\{x_2 m_2 + x_3 m_3\}^*)$. E ancora se $\xi = (x_1 x_2, x_1 x_3) = (x_2 m_2 + x_1 \overline{m}_3)$, per cui la prima delle (9) non vale, è $\vartheta^{-1}(\xi) = x_2 m_2 + x_1 m_3 = 1 \otimes \mathrm{pr}_2 (\{x_2 m_2 + x_1 m_3\}^*)$ e $\xi = 1 \otimes \mathrm{pr}_2\, \varphi(\{x_2 m_2 + x_1 m_3\}^*)\big)$.

Infine alle altre inclusioni degli aperti dello spazio, associamo le restrizioni canoniche fra i moduli corrispondenti.

8. Il funtore $\mathcal{M}^*$ costruito al n. precedente è un fascio, ed è isomorfo ad $\mathcal{M}$ nell'isomorfismo ψ definito da: $\psi_U = \mathrm{pr}_1$, fra i moduli sugli aperti del tipo I); $\psi_U = 1$, sugli aperti del tipo II); $\psi_U = \mathrm{pr}_1 \cdot \mathrm{pr}_2^{-1}$, fra i moduli sugli aperti del tipo III) (tenuto conto dell'osservazione fatta al n. prec. a proposito della rappresentazione degli elementi di $\Gamma(U, \overline{\mathcal{M}}_{(\bar{x})})$; $\psi_U = \mathrm{pr}_1$, sugli aperti del tipo IV).

Infatti di questi ψ_U si verifica facilmente la compatibilità con le restrizioni di $\mathcal{M}^*$ ed $\mathcal{M}$.

Inoltre in ogni punto $x \in X$, il germe della sezione rappresentata da $\varphi(\{m_1\}^*)$ di $\mathcal{M}^*$ è fra i generatori liberi di $\mathcal{M}_x^*$, come volevasi.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Baldassarri Ghezzo, *Riduzione di moduli proiettivi a somme dirette*, C.E.D.A.M., Padova (1974).

[2] S. Baldassarri Ghezzo, *Un esempio della riduzione di moduli proiettivi a somme dirette*, Soc. Coop. Tip., Padova (1977).

[3] S. Baldassarri Ghezzo, *Un modello riducibile per somma diretta d'un dato $\mathcal{A}$-modulo localmente libero, con $\mathcal{A} \in P.E.$*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **60** (1978).

[4] A. Grothendieck - J. A. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique, I*, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[5] M. Raynaud, *Modules projectifs universels*, Inventiones Math., **6**, Berlin (1968), pp. 1-26.

[6] J. P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math., **61**, U.S.A. (1955), pp. 197-278.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 giugno 1981.